SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 49-52
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__49_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 AVRIL 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. D. André : *Sur les séquences des permutations circulaires.*

M. Raffy : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Humbert : *Évaluation de certaines aires sphériques et de certaines aires découpées sur le cylindre de révolution.*

M. V. Schlegel adresse la Communication suivante :

Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière, relatif au centre des moyennes distances.

Ce beau théorème [1], curieux également par la généralité de son objet et la simplicité de sa forme, se démontre d'une manière assez élégante, sans coordonnées ni lignes auxiliaires, à l'aide d'une méthode que j'ai exposée dans mon Ouvrage *System der Raumlehre,* Leipzig, 1872 (t. I, p. 51). Cette méthode est au fond la même que j'ai appliquée (t. X, p. 220 de ce *Bulletin*) à un théorème de M. Laisant, cité aussi par M. de la Goupillière. En voici l'application.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sommets d'un polygone quelconque. Alors le centre de gravité (M) de ces points est déterminé (selon les principes de M. Grassmann) par la formule

$$M = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n}. \tag{1}$$

Soit en outre

$$AC = A_{1+sr} A_{1+(s+1)r} \tag{2}$$

une diagonale joignant deux de ces sommets séparés l'un de l'autre par $r - 1$ sommets, et

$$B = P_s \tag{3}$$

(1) *Voir* page 5 du présent Volume.

le centre de gravité des sommets d'un polygone quelconque à p sommets, construit sur la diagonale AC.

Soit enfin

$$\widehat{BAC} = \frac{m}{2}\frac{\pi}{2}, \qquad \widehat{BCA} = \frac{n}{2}\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Alors on a la relation (voir *System der Raumlehre,* loc. cit.)

$$\frac{A - B}{C - A} = \frac{1 - i^{-m}}{i^{-m} - i^{n}}, \tag{5}$$

où le rapport est déterminé non seulement par les longueurs, mais encore par les directions des deux segments A — B et C — A.

En posant encore

$$\frac{i^{n} - 1}{i^{n} - i^{-m}} = \alpha, \qquad \frac{1 - i^{-m}}{i^{n} - i^{-m}} = \beta, \tag{6}$$

on déduit de la formule (5) par le calcul ordinaire la formule suivante

$$B = \alpha A + \beta C, \tag{7}$$

ou, en ayant égard à (2) et (3),

$$P_s = \alpha A_{1+sr} + \beta A_{1+(s+1)r}. \tag{8}$$

Substituons successivement à s les valeurs 0, 1, 2, ..., en remplaçant les indices qui surpassent la valeur n par le reste de leur division par n. Or les polygones construits sur les diverses diagonales étant tous semblables entre eux, il en est de même des triangles CAB; donc les valeurs de m, n, α, β sont les mêmes dans tous ces triangles. Par conséquent, en additionnant toutes les équations déduites de (8), nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-1} = {} & \alpha(A_1 + A_{1+r} + A_{1+2r} + \ldots + A_{n+1-r}) \\ & + \beta(A_{1+r} + A_{1+2r} + \ldots + A_1). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Or les sommes contenues dans les deux parenthèses sont identiques; et comme en outre, d'après (6), on a

$$\alpha + \beta = 1, \tag{10}$$

on trouve

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-1} = A_1 + A_{1+r} + A_{1+2r} + \ldots + A_{n+1-r}. \tag{11}$$

Le premier membre de cette relation représente à cause de la formule (1) le centre des points P_0, P_1, ..., multiplié par n, savoir le centre de tous les np sommets des polygones construits sur les diagonales du polygone donné. De même le second membre représente le centre des sommets de ce dernier polygone, multiplié par n; et l'équation (11) exprime que ces centres coïncident.

Si la série des diagonales, rentrant sur elle-même, ne rencontre pas tous les sommets, le théorème vaut également pour l'ensemble de ces séries épuisant tous les sommets, comme pour chacune de ces séries. Enfin on peut remplacer, dans les équations précédentes, tous les points par leurs projections normales ou obliques (parallèles à une direction quelconque) faites sur une droite quelconque, ou par les distances mesurées entre chaque point et sa projection.

SÉANCE DU 19 AVRIL 1893.

PRÉSIDENCE DE M. DE COMBEROUSSE.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. L. Gérard, présenté par MM. Demoulin et Raffy; M. de la Vallée Poussin, présenté par MM. Demoulin et d'Ocagne; M. le lieutenant-colonel Touche, présenté par MM. Félix Lucas et Humbert; M. Mathé, présenté par MM. Désiré André et Appell.

Communications :

M. Carvallo : *Théorie du pied équilibriste du gyroscope Gervat.*

M. Autonne : *Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation du premier ordre.*

M. Bioche fait la Communication suivante :

Sur les normalies des courbes.

J'ai déjà fait remarquer que les développables passant par une courbe peuvent être considérées comme des surfaces réglées ayant une courbure totale nulle tout le long de cette courbe, et que, par suite, on peut généraliser certaines propriétés en considérant des surfaces qui ont tout le long de la courbe une courbure fonction de l'arc, les développables correspondant au cas où cette fonction serait identiquement nulle.

Si l'on étudie, à ce point de vue, les surfaces engendrées par des normales à une courbe (surfaces que j'appellerai *normalies*), on obtient les résultats suivants :

THÉORÈME. — *Si deux normalies ont même courbure tout le long de leur directrice, elles se coupent sous un angle constant (c'est la propriété bien connue des normalies développables), ou bien elles admettent pour bissectrices des normalies développables.*

THÉORÈME. — *Si deux normalies se coupent sous un angle constant, elles ont même courbure tout le long de leur directrice.*

En particulier, si l'une est développable, l'autre l'est aussi, comme on le sait.

Si l'on considère les normalies engendrées par des droites faisant un angle constant avec la normale principale, ces normalies ont toutes, le long de la directrice, même courbure que la surface des normales principales et que celle des binormales. On sait que la valeur absolue de la courbure est pour ces surfaces le carré de la torsion de la directrice.