SMF

# Vie de la société

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 20 (1892), p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__1_0>

# BULLETIN

DE LA

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

## COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

### SÉANCE DU 6 JANVIER 1892.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

*Communications :*

M. Fouret : *Sur une manière de déduire du théorème de Budan-Fourier une limite inférieure des racines d'une équation.*

M. Raffy fait une Communication *Sur les réseaux conjugués qui se conservent dans la déformation des surfaces.* Il rappelle que les trois coordonnées d'une surface, considérées comme fonctions des paramètres d'un réseau conjugué, vérifient une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, dont les coefficients ne dépendent que de l'élément linéaire de la surface. Il montre que, *si une seule des coordonnées vérifie cette équation, les deux autres la vérifient aussi, sauf dans le cas des cylindres.* D'où l'explication de ce fait que les surfaces, dont on connaît des déformations conservant un réseau conjugué, ne dédépendent que d'un seul paramètre, abstraction faite des paramètres de position.

M. Ém. Picard communique la Note suivante :

*Sur la fonction exponentielle;*

par M. d'Arone.

Désignons par $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ deux fonctions de $n$ variables réelles, finies et continues ainsi que leurs dérivées premières, admettant des dérivées secondes finies et satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

fonctions qui, d'après un théorème connu ([1]), doivent pouvoir croître indéfiniment pour des valeurs toujours croissantes des variables.

Nous allons démontrer que, *si la différence*

$$(1) \qquad A = e^{M(x_1, x_2, \ldots, x_n)} - e^{N(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

*est une constante différente de zéro, les fonctions* M *et* N *se réduisent à des constantes.*

En effet, la différence A étant une constante et les deux expressions $\Delta^2 M$, $\Delta^2 N$ étant nulles, on a

$$(2) \qquad e^M \frac{\partial M}{\partial x_i} = e^N \frac{\partial N}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & e^M \left[ \left( \frac{\partial M}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial M}{\partial x_2} \right)^2 + \ldots + \left( \frac{\partial M}{\partial x_n} \right)^2 \right] \\ & = e^N \left[ \left( \frac{\partial N}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial N}{\partial x_2} \right)^2 + \ldots + \left( \frac{\partial N}{\partial x_n} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Élevant au carré et ajoutant les $n$ égalités (2), on obtient

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & e^{2M} \left[ \left( \frac{\partial M}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial M}{\partial x_2} \right)^2 + \ldots + \left( \frac{\partial M}{\partial x_n} \right)^2 \right] \\ & = e^{2N} \left[ \left( \frac{\partial N}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial N}{\partial x_2} \right)^2 + \ldots + \left( \frac{\partial N}{\partial x_n} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Mais, comme on peut le voir, les relations (1), (3) et (4) ne peu-

---

([1]) Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 152.

vent exister que si l'on a identiquement

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial M}{\partial x_n} = 0,$$
$$\frac{\partial N}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial N}{\partial x_n} = 0,$$

d'où

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}, \qquad N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

Considérons maintenant la relation

$$e^{G(z)} - e^{P(z)} = A, \tag{5}$$

où $G(z)$ et $P(z)$ sont des fonctions entières de la variable complexe $z$ et A une constante différente de zéro. Si $G(z)$ et $P(z)$ sont entières rationnelles, alors en dérivant l'identité (5) et supprimant les racines communes des deux polynômes $G'(z)$, $P'(z)$ qui sont du même degré de multiplicité, on démontre que *si la différence de deux fonctions exponentielles, dont les exposants sont deux fonctions entières rationnelles, est constante, ces deux fonctions doivent se réduire à deux constantes*

Si $G(z)$ et $P(z)$ sont des fonctions entières transcendantes, au sens de Weierstrass, ce que nous avons dit nous permet d'affirmer que la différence $e^M - e^N$, où M et N représentent les parties réelles des fonctions $G(z)$, $P(z)$, est une fonction de deux variables réelles à variabilité limitée dans le sens de Jordan.

Si donc on pouvait démontrer la constance de la valeur de la dernière fonction, on se trouverait avoir démontré dans toute sa généralité la proposition que nous avons donnée pour des valeurs entières rationnelles des exposants.

Cette dernière propriété nous permettrait de démontrer par voie directe, sans recourir aux fonctions modulaires, un des théorèmes les plus importants de l'analyse moderne, dû à M. Picard :

*Si une fonction $f(z)$, holomorphe dans tout le plan, ne prend jamais ni la valeur $a$ ni la valeur $b$, elle se réduit à une constante* (1).

(1) Picard, *Sur les fonctions entières* (*Comptes rendus*, 1879, 2e semestre) et *Mémoire sur les fonctions entières* (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1880).

En effet, la théorie des fonctions permet d'écrire

$$f(z) - a = e^{G(z)},$$
$$f(z) - b = e^{P(z)},$$

d'où

$$e^{G(z)} - e^{P(z)} = b - a = \text{const.}$$

On aurait donc $G = \text{const.}$, $P = \text{const.}$ et, par suite, aussi $f(z) = \text{const.}$

---

## SÉANCE DU 20 JANVIER 1892.

### PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

*Communications :*

M. Hermann : *Sur quelques procédés de Cryptographie.*

M. Antomari : *Sur les podaires et les courbes polaires réciproques.*

M. Félix Lucas : *Sur un mode d'intégration de certaines équations linéaires du premier ordre.*

M. Fouret fait la Communication suivante :

### *Sur la détermination d'une limite inférieure des racines d'une équation algébrique.*

1. Il existe, comme on le sait, plusieurs méthodes pour trouver une limite supérieure des racines d'une équation algébrique et, notamment, une règle remarquable, due à Newton, qui présente l'avantage de fournir, pour cette limite, un nombre moins grand que les autres règles connues. Quant à la détermination d'une limite inférieure des racines d'une pareille équation $F(x) = 0$, on a coutume de la ramener à la recherche d'une limite supérieure des racines de $F(-x) = 0$. Ce procédé indirect est défectueux. La limite inférieure qu'il fournit est toujours négative et sa valeur absolue est généralement plus grande qu'il ne conviendrait. Voici une méthode, vraisemblablement nouvelle et, en tous cas, inconnue

dans l'enseignement [1], qui ne présente pas ces inconvénients. Elle jouit en outre des mêmes privilèges que la règle de Newton, dont elle est, en quelque sorte, la contre-partie. On la déduit immédiatement du théorème suivant :

2. *Tout nombre qui, substitué à $x$ dans le polynôme entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de l'équation $F(x) = 0$.*

Soit $a$ un nombre, positif ou négatif, qui, substitué dans le polynôme entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs. Nous allons montrer que $F(x)$ ne peut s'annuler pour aucun nombre plus petit $a - h (h > 0)$.

On a, en effet,

$$F(a-h) = F(a) - h F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{h^p}{1.2\ldots p} F^p(a) + \ldots + (-1)^m \frac{h^m}{1.2\ldots m} F^m(a).$$

D'une manière générale, et par hypothèse, $F^p(a)$ est du signe de $F(a)$ ou d'un signe contraire, suivant que $p$ est pair ou impair et le terme $\frac{h^p}{1.2\ldots p} F^p(a)$ est précédé, dans le développement précédent, du signe $+$ dans le premier cas, du signe $-$ dans le second. Donc $F(a-h)$ est une somme des termes tous de même signe et, par conséquent, ne peut être nul.

3. La marche à suivre, pour trouver une limite inférieure des racines de l'équation $F(x) = 0$ est tout indiquée. On part d'un nombre, aussi grand que possible, qui, substitué dans $F^{m-1}(x)$, donne un résultat de signe contraire à $F^m(x)$, c'est-à-dire un résultat négatif, en supposant positif le terme du plus haut degré de $F(x)$ [2]. On vérifie si ce nombre rend positif $F^{m-2}(x)$, ou on le

[1] Cette règle nous a été suggérée par le théorème de Budan et Fourier, comme on peut le voir dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série, t. XI, p. 82).

[2] On peut même prendre, comme point de départ, le nombre qui annule la dérivée $F^{(m-1)}(x)$.

diminue, jusqu'à ce qu'il en soit ainsi. On examine ensuite si le nombre, ayant satisfait à cette épreuve, rend négatif $F^{m-3}(x)$; s'il n'en est pas ainsi, on le remplace par un autre plus petit, remplissant cette dernière condition, et l'on continue à procéder ainsi de proche en proche, sans qu'il y ait à revenir sur les essais déjà faits. On arrive ainsi finalement à un nombre inférieur aux racines de $F(x) = 0$ et en même temps aux racines des équations dérivées successives $F'(x) = 0$, $F''(x) = 0, \ldots, F^{(m-1)}_{(x)} = 0$.

Cette méthode offre deux particularités, qui la distinguent, au même titre que la règle de Newton : 1° elle fournit un nombre aussi peu inférieur qu'on le veut à la plus petite des racines des équations $F(x) = 0$, $F'(x) = 0, \ldots, F^{m-1}(x) = 0$; 2° elle permet d'obtenir, dans le cas d'une équation ayant toutes ses racines réelles, un nombre aussi peu inférieur qu'on le veut à la plus petite racine de cette équation.

---

## SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1892.

### PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

*Communications :*

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable, donné sur une carte par des recoupements non convergents.*

M. Laisant fait connaître une autre solution du problème précédent.

M. Félix Lucas présente une remarque sur le même sujet.

M. Humbert : *Sur une propriété de la surface de Kummer.*

M. Kœnigs : *Sur les lignes asymptotiques des surfaces.*

M. Laisant fait la Communication suivante :

### *Transformation d'un polynôme entier.*

Soit un polynôme entier de degré $n$

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \tag{1}$$

que nous nous proposons de mettre identiquement sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + \ldots \\ \quad + b_p x(x-1)\ldots(x-p+1) + \ldots + b_n x(x-1)\ldots(x-n+1). \end{array}\right. \tag{2}$$

Si nous posons

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi_p(x) = b_p + b_{p+1}(x-p) + b_{p+2}(x-p)(x-p-1) + \ldots \\ \quad + b_n(x-p)\ldots(x-n+1) \qquad (p=1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

nous avons évidemment

$$(4)\quad \begin{cases} b_0 = \varphi(0), & b_1 = \varphi_1(1), & b_2 = \varphi_2(2), & \ldots, \\ b_p = \varphi_p(p), & \ldots\ldots\ldots, & b_n = \varphi_n(n); \end{cases}$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont en outre liées par les relations

$$(5)\qquad \varphi_{p+1} = \frac{\varphi_p(x) - \varphi_p(p)}{x-p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Le polynôme $\varphi(x)$ étant donné sous la forme (1), on pourrait donc, au moyen de ces relations, déterminer successivement les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et, par conséquent, obtenir ainsi les divers coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$ par les formules (4).

Il est possible d'arriver à une solution plus directe, et peut-être plus élégante, en ne faisant figurer que les fonctions $\varphi$ dans les diverses expressions de $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Si, en effet, nous calculons les premiers de ces coefficients, nous trouvons très facilement

$$\begin{aligned} b_0 &= \varphi(0), \\ b_1 &= \varphi_1(1) = \varphi(1) - \varphi(0), \\ b_2 &= \varphi_2(2) = \frac{\varphi(2) - 2\varphi(1) + \varphi(0)}{2!}, \end{aligned}$$

valeurs qui peuvent s'écrire symboliquement

$$b_0 = [\varphi - 1]^0, \qquad b_1 = [\varphi - 1]^1, \qquad b_2 = \frac{1}{2!}[\varphi - 1]^2, \qquad \ldots,$$

avec cette convention que toute puissance de $\varphi$, telle que $\varphi^m$, sera remplacée par $\varphi(m)$ dans les résultats développés, et que l'unité sera remplacée par $\varphi(0)$.

On peut arriver à démontrer que la loi, qu'on prévoit par induction, est complètement générale, c'est-à-dire qu'on a symboliquement

$$(6)\qquad b_p = \varphi_p(p) = \frac{1}{p!}[\varphi - 1]^p$$

pour toutes les valeurs entières de $p$ jusqu'à $n$ inclusivement.

Pour y parvenir, nous supposerons la formule (6) vérifiée jusqu'à la valeur $p - 1$, et nous remarquerons en outre que, d'après la définition même de la fonction $\varphi_p(x)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + \dots \\ + b_{p-1} x(x-1)\dots(x-p+2) + x(x-1)\dots(x-p+1)\varphi_p(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après nos hypothèses,

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}[\varphi - 1] + \frac{x(x-1)}{2!}[\varphi - 1]^2 + \dots \\ + \frac{x(x-1)\dots(x-p+2)}{(p-1)!}[\varphi - 1]^{p-1} + x(x-1)\dots(x-p+1)\varphi_p(x).\end{aligned}$$

Si nous remplaçons dans cette formule $x$ par $p$, elle donne

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(p) = \varphi(0) + \frac{p}{1}[\varphi - 1] + \frac{p(p-1)}{2!}[\varphi - 1]^2 + \dots + p[\varphi - 1]^{p-1} \\ + p!\,\varphi_p(p).\end{aligned}\right.$$

Ajoutons à la première ligne et retranchons à la seconde le terme $[\varphi - 1]^p$. La première ligne pourra alors s'écrire symboliquement $[1 + \varphi - 1]^p$; et, comme les calculs de réduction des coefficients, une fois les développements effectués, sont identiquement les mêmes que pour des calculs de puissances, il s'ensuit que ce développement symbolique $[1 + \varphi - 1]^p$ se ramènera bien réellement à $[\varphi]^p$, ou $\varphi(p)$ en vertu des conventions faites. La relation (7) devient donc

$$\varphi(p) = \varphi(p) - [\varphi - 1]^p + p!\,\varphi_p(p)$$

ou

$$(8)\qquad \varphi_p(p) = b_p = \frac{1}{p!}[\varphi - 1]^p,$$

ce qui établit bien la généralité de la loi vérifiée.

Il est évident que $b_0 = a_0 = \varphi(0)$. On a aussi $b_m = a_m$, à cause de l'identité des deux formules (1) et (2).

Enfin, pour une valeur de $p$ supérieure à $m$, le coefficient $b_p$ correspondant est nul. Par conséquent, la formule symbolique

$$\frac{1}{p!}[\varphi - 1]^p$$

donne les coefficients $b_p$ de la formule (2) pour $p < m$. Elle donne $a_m$ pour $p = m$ et, enfin, pour $p > m$, on a $[\varphi - 1]^p = 0$.

La formule (2) peut s'écrire, d'après ce que nous venons de voir,

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi(0) + x[\varphi-1]^1 + \dfrac{x(x-1)}{2!}[\varphi-1]^2 + \ldots \\ \qquad + \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}[\varphi-1]^n. \end{cases}$$

Si l'on y remplace $x$ par $-x$, elle devient

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi(-x) = \varphi(0) - x[\varphi-1]^1 + \dfrac{x(x+1)}{2!}[\varphi-1]^2 - \ldots \\ \qquad + (-1)^n \dfrac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!}[\varphi-1]^n. \end{cases}$$

Par suite nous avons, pour toutes les fonctions paires, une nouvelle forme de la fonction $\varphi(x)$ au moyen de cette relation (10); et, en changeant tous les signes du second membre, nous avons un développement s'appliquant aux fonctions impaires.

La soustraction des relations (9) et (10) dans le premier cas, l'addition dans le second, nous donnent donc les deux propositions suivantes :

*$\varphi(x)$ étant un polynôme entier ne contenant que des puissances paires de $x$, le développement symbolique*

$$2[\varphi-1]^1 x + \frac{[\varphi-1]^2}{2!}[x(x-1) - x(x+1)]$$
$$+ \frac{[\varphi-1]^3}{3!}[x(x-1)(x-2) + x(x+1)(x+2)] + \ldots$$

*est identiquement nul.*

*$\varphi(x)$ étant un polynôme entier ne contenant que des puissances impaires de $x$, le développement symbolique*

$$2\varphi(0) + \frac{[\varphi-1]^2}{2!}[x(x-1) + x(x+1)]$$
$$+ \frac{[\varphi-1]^3}{3!}[x(x-1)(x-2) - x(x+1)(x+2)] + \ldots$$

*est identiquement nul.*

NOTE. — Le problème qui fait l'objet de cette Communication a déjà été résolu par M. Maurice d'Ocagne, en suivant une voie différente (*American Journal of Mathematics*, vol. XIII, n° 2).

La solution de M. d'Ocagne repose sur l'emploi des nombres remarquables $K_m^p$, qu'il a imaginés et étudiés dans de très intéressants Mémoires. La formule à laquelle il arrive, les notations étant les mêmes que dans la présente Communication, est la suivante :

$$b_p = K_p^p a_p + K_{p+1}^p a_{p+1} + \ldots + K_n^p a_n.$$

En remplaçant les nombres $K_m^p$ par leurs valeurs explicites en fonctions de $m$ et de $p$, valeurs données par M. d'Ocagne dans son Mémoire *Sur une classe de nombres remarquables* (*American Journal,* 1887, p. 357), on retrouve précisément la formule symbolique (6) établie ci-dessus.

Cette dernière offre donc, par une marche inverse, un nouveau moyen d'obtenir, en fonction de $m$ et de $p$, l'expression explicite des nombres $K_m^p$.

---

## SÉANCE DU 17 FÉVRIER 1892.

### PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

*Élections :* M. Demoulin, présenté par MM. d'Ocagne et Raffy; M. Hermann, présenté par MM. Désiré André et Kœnigs, sont élus à l'unanimité.

*Communications :*

M. d'Ocagne : *Nouvelle construction du point le plus probable déterminé sur une carte par des recoupements non convergents.*

M. Lemoine développe certaines considérations, tendant à constituer une sorte d'*art des constructions géométriques,* au point de vue de la simplicité et de l'exactitude du tracé.

M. Félix Lucas communique la Note suivante :

### *Note relative aux points centraux.*

Soit

$$(1) \qquad f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p) = 0$$

l'équation d'un système plan de $p$ points quelconques. Je regarde ces points comme matériels et ayant l'unité de masse.

En égalant à zéro les dérivées successives de $f(z)$, nous obtiendrons les *points centraux* d'ordres successifs du système de points considérés.

Soit $S_1$ la somme des racines $z_1, z_2, \ldots, z_p$; le point central d'ordre $(p-1)$, qui se détermine en annulant la $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée de $f(z)$, a pour coordonnée affixe $\frac{S_1}{p}$; c'est le centre de gravité G du système proposé.

Soit $S_2$ la somme des produits deux à deux des racines $z_1$, $z_2, \ldots, z_p$; les deux points centraux d'ordre $(p-2)$, dont l'équation s'obtient en annulant la $(p-2)^{\text{ième}}$ dérivée de $f(z)$, ont pour coordonnées affixes les deux racines de l'équation

$$\frac{p(p-1)}{2}z^2-(p-1)S_1z+S_2=0; \tag{2}$$

le milieu de ces deux points coïncide avec G, en sorte que la droite qui les joint passe par le centre de gravité du système proposé; il s'agit de caractériser la direction de cette droite.

A cet effet, supposons que le point G ait été pris pour origine des coordonnées et que l'axe des $x$ ait été dirigé suivant la droite considérée; dans cette hypothèse, $S_1$ sera nul, et $S_2$ devra, d'après l'équation (2), être réel et positif. Or on a

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum z_m z_n = \sum (x_m + y_m\sqrt{-1})(x_n + y_n\sqrt{-1}) \\ &= \sum (x_m x_n - y_m y_n) + \sqrt{-1}\sum (x_m y_n + x_n y_m); \end{aligned}$$

on doit donc avoir

$$0 = \sum (x_m y_n + x_n y_m),$$

ou, ce qui revient au même, puisque la somme $S_1$ est nulle,

$$\sum x_m y_m = 0;$$

il en résulte que l'axe des $x$ se trouve en coïncidence avec un des axes principaux d'inertie du système de points proposés. Par conséquent, *la droite qui joint les deux points centraux d'ordre* $(p-2)$ *d'un système plan de* $p$ *points est dirigée suivant un des axes principaux d'inertie de ce système.*

On en déduit ce théorème :

*Un système plan de points et les systèmes de ses points centraux successifs admettent les mêmes directions principales d'inertie.*

Pour que l'ellipse d'inertie du système de points considéré devienne un cercle, il faut et il suffit que les deux points centraux d'ordre $(p-2)$ coïncident. On a alors, en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité, et quels que soient les axes rectangulaires des coordonnées,

$$S_2 = \sum z_m z_n = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$S z_m^2 = 0.$$

De là ce théorème :

*Pour que l'ellipse d'inertie d'un système plan de points soit une circonférence, il faut et il suffit que la somme des carrés de leurs coordonnées affixes, relativement à deux axes rectangulaires quelconques passant par leur centre de gravité, soit identiquement nulle. Dans ce cas, tous les systèmes de points centraux des divers ordres admettent des circonférences pour ellipses d'inertie.*

M. Laisant communique la Note suivante :

*Note relative au symbole $i^i$, et en général à l'opération $p^q$.*

Sous le titre de *Théorie des acceptions*, il a paru, en 1891, un Volume de M. Évrard, ingénieur des Ponts et Chaussées en retraite, et qui contient surtout l'exposé des travaux de feu M. l'abbé George sur les imaginaires. Ce Livre renferme des choses intéressantes, et montre, notamment, que M. l'abbé George avait reconstitué presque intégralement, sans la connaître en aucune façon, la doctrine due aux travaux d'Argand, de Mourey, de Cauchy et de Bellavitis.

Mais, à côté de déductions rigoureuses, l'auteur a commis, à notre avis, une erreur fondamentale en voulant donner au symbole $i^i$ (ou $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$) une signification géométrique arbitraire, et en essayant de créer ainsi une Algèbre des faits de l'espace, fondée sur les opérations auxquelles il soumet ce symbole. Comme beaucoup d'auteurs qui se sont livrés à des tentatives analogues, il arrive à des résultats géométriques exacts; mais ce succès, qu'on peut atteindre de bien des manières, n'est obtenu qu'au prix d'une affirmation qui renverserait toute l'analyse, lui enlèverait sa généralité, et rendrait impossible le calcul des imaginaires, au moins dès qu'il s'agit de fonctions exponentielles ou logarithmiques.

En particulier, et l'on peut dire que toute la théorie des acceptions repose là-dessus, l'auteur conteste avec grande énergie l'identité bien connue $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Peut-être n'est-il pas inutile de revenir encore une fois sur ce sujet, pour essayer d'éclaircir certains points qu'en général on ne précise pas assez. Au fond, comme on va le voir, la question est cependant bien simple.

Si l'on veut que le calcul analytique soit possible, il faut admettre, par définition ou par convention, les identités

$$A^B A^C = A^{B+C}, \qquad (A^B)^C = A^{BC}, \qquad (AB)^C = A^C B^C.$$

Ceci posé, cherchons la signification de $p^q$, $p$ et $q$ étant deux quantités imaginaires.

Appelons respectivement $a$ et $b$ les modules de $p$ et de $q$ ; puis $\alpha$ et $\beta$ les arguments des mêmes quantités. Il faut bien remarquer qu'une quantité imaginaire quelconque a, non pas un argument unique tel que $\alpha$, mais une infinité d'arguments compris dans la formule $2k\pi + \alpha$. Dans nos résultats, il faudra donc, si l'on a donné les quantités sans préciser leurs arguments, remplacer $\alpha$ et $\beta$ par $2k\pi + \alpha$ et $2k'\pi + \beta$, $k$ et $k'$ étant deux nombres entiers, positifs ou négatifs, indéterminés.

Nous avons

$$p = ae^{i\alpha}, \qquad q = b(\cos\beta + i\sin\beta)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} p^q &= (ae^{i\alpha})^{b\cos\beta + ib\sin\beta} \\ &= a^{b\cos\beta}\, a^{ib\sin\beta}\, e^{i\alpha b\cos\beta}\, e^{-\alpha b\sin\beta}\,; \end{aligned}$$

$a$ est un nombre positif qui peut s'écrire $e^{la}$. Alors,

$$\begin{aligned} p^q &= e^{bla\cos\beta + ibla\sin\beta + i\alpha b\cos\beta - \alpha b\sin\beta} \\ &= e^{b(la\cos\beta - \alpha\sin\beta)}\, e^{ib(la\sin\beta + \alpha\cos\beta)}. \end{aligned}$$

Ainsi $p^q$ est une quantité imaginaire dont le module et l'argument se présentent sous les formes

$$e^{b(la\cos\beta - \alpha\sin\beta)} \quad \text{et} \quad b(la\sin\beta + \alpha\cos\beta).$$

Mais, si l'on s'est contenté de donner les quantités $p$ et $q$, sans préciser leurs arguments, il reste, comme nous l'avons dit plus haut, une indétermination, si bien qu'il faut remplacer $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs plus générales $2k\pi + \alpha$, $2k'\pi + \beta$. En ce qui concerne $\beta$, cela ne changera rien, les lignes $\sin\beta$ et $\cos\beta$ figurant seules. Pour $\alpha$, au contraire, la modification sera réelle, et il faut constater que le module de $p^q$ sera le nombre (positif) ayant pour logarithme

$$b[la\cos\beta - (2k\pi + \alpha)\sin\beta],$$

et que l'argument sera

$$b[la\sin\beta + (2k\pi + \alpha)\cos\beta].$$

Alors $p^q$ représente non pas *une* quantité imaginaire, mais *une infinité* de quantités, dont les modules différents forment une progression par quotient, et les arguments une progression par différence. De même, par exemple, dans l'Algèbre élémentaire, on voit le symbole $\sqrt{1}$ représenter *deux* quantités différentes, $+1$ et $-1$.

Si, en particulier, on suppose $a = b = 1$ et $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $p = i$, $q = i$, on a

$$i^i = e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

Ce symbole $i^i$ représente donc une infinité de quantités *toutes réelles,* formant une progression par quotient dont la raison est $e^{2\pi}$.

L'une seulement de ces quantités est $e^{-\frac{\pi}{2}}$, et c'est un tort, en effet, d'écrire sans autre explication

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}207875\ldots.$$

Si l'on représente par $\gamma$ ce nombre $e^{-\frac{\pi}{2}}$, $i^i$ représente *l'un quelconque* des termes de la progression

$$\ldots,\ \frac{1}{\gamma^{4k-1}},\ \ldots,\ \frac{1}{\gamma^7},\ \frac{1}{\gamma^3},\ \gamma,\ \gamma^5,\ \gamma^9,\ \ldots,\ \gamma^{4k+1},\ \ldots.$$

Il est possible, par un tel symbole exponentiel, de représenter aussi une progression géométrique quelconque à termes positifs.

Soient, en effet, $f$ l'un des termes et $g$ la raison. Posons, comme plus haut, $a = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$; et, en outre, $\alpha = 2\pi\frac{lf}{lg}$, $b = -\frac{1}{2\pi}lg$, ce qui donnera toujours, pour $b$, un résultat positif, $g$ pouvant être pris plus petit que l'unité. La formule

$$p^q \quad \text{ou} \quad (e^{\alpha i})^{bi}$$

représentera l'un *quelconque* des termes de la progression donnée

$$\ldots,\ \frac{f}{g^2},\ \frac{f}{g},\ f,\ fg,\ fg^2,\ \ldots.$$

On vérifie, en effet, qu'en laissant à $\alpha$ son indétermination, l'expression $p^q$, d'après les valeurs ci-dessus, se réduit à

$$e^{lf+klg} = fg^k.$$

M. Lucien Lévy fait la Communication suivante :

*Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux.*

Soient

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\mathrm{A} = (1+q^2)s - pqt, \qquad \mathrm{C} = pqr - (1+p^2)s,$$
$$\mathrm{B} = (1+p^2)t - (1+q^2)r.$$

Toute solution de l'équation de M. Maurice Lévy

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial y^2} = 0$$

donnera, d'après une remarque de M. Darboux, une surface qui, par une translation parallèle à $Oz$, engendre une famille de Lamé, c'est-à-dire une famille de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.

J'ai fait connaître, au mois de juin, une solution contenant deux fonctions arbitraires : ce sont les surfaces à lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à $Oz$. Quelques jours plus tard, M. Petot, par une très ingénieuse transformation géométrique, trouvait un certain nombre de solutions nouvelles, et signalait aussi celle que je viens de rappeler.

Je veux, aujourd'hui, faire connaître toutes les surfaces enveloppes de sphères qui jouissent de la même propriété. Dans les solutions que je vais indiquer, il subsiste une fonction arbitraire.

1° Les surfaces-canal, enveloppées par une sphère dont le centre décrit une courbe plane arbitraire située dans un plan perpendiculaire à $Oz$. Cette solution était à peu près évidente.

2° Les périsphères symétriques par rapport à un plan passant par $Oz$. La directrice est encore quelconque; l'équation différentielle ordinaire, qui fait connaître la loi de variation du rayon de la sphère enveloppée, est susceptible d'une interprétation géométrique : les cylindres de révolution, qui ont pour bases les différentes lignes de courbure circulaires, interceptent sur l'axe $Oz$ une longueur constante.

3° Les enveloppes de sphères, dans lesquelles chaque sphère touche son enveloppe suivant une circonférence de rayon nul. Ces surfaces se réduisent à une courbe.

M. Raffy fait la Communication suivante :

*Sur certaines surfaces spirales.*

Comme on connaît les géodésiques des surfaces de révolution, on sait intégrer, quel que soit $m$, l'équation

$$(1)\qquad P^2 + P'^2 = \cos^{2m-2}\frac{u}{m},$$

dont dépendent les géodésiques des spirales applicables sur les surfaces de révolution. On sait, d'autre part (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXII, p. 1421), que la détermination des spirales d'élément linéaire

$$(2)\qquad ds^2 = e^{2v}U^2(du^2 + dv^2)$$

revient à l'intégration de l'équation

$$(3)\qquad k^2(z_0^2 + z_0'^2) = k^2U^2 - U'^2.$$

Supposons que l'on prenne

$$(4)\qquad U = \cos^{\frac{3}{2}}\frac{2u}{9}, \qquad k^2 = \frac{1}{27}.$$

L'équation (3) devient

$$(5)\qquad z_0^2 + z_0'^2 = \cos\frac{2u}{3}.$$

On voit qu'il suffit de faire $2m = 3$ pour identifier (1) et (5). On connaît donc une série simplement infinie de spirales admettant l'élément linéaire (2) dans l'hypothèse (4).

## SÉANCE DU 2 MARS 1892.

### PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

*Communications :*

M. Laisant : *Sur les points centraux des systèmes de points dans l'espace.*

M. Félix Lucas démontre la proposition suivante :

*Si la loi d'un mode de fonctionnement d'une machine dynamo peut s'exprimer au moyen d'une équation algébrique concrète à trois termes entre deux variables, on peut toujours, en remplaçant les variables concrètes par des variables arbitraires qui leur sont proportionnelles, transformer cette équation concrète en une équation purement numérique, absolument indépendante des éléments concrets de la machine considérée.*

---

## SÉANCE DU 16 MARS 1892.

### PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

*Communications :*

M. Carvallo : *Sur les lois abstraites du fonctionnement des machines.*

M. Fouret : *Sur la génération des congruences du premier ordre et de classe quelconque.*

M. Félix Lucas fait la Communication suivante :

### *Sur l'ellipse centrale d'inertie d'un système plan de points matériels de même masse.*

Étant donné un système plan de $p$ points matériels P, ayant tous l'unité de masse, j'ai démontré précédemment que *la droite de jonction des deux points centraux d'ordre* $(p-2)$ *coïncide avec l'un des axes de l'ellipse centrale d'inertie du système.* Si l'on désigne par M la somme des affixes $z_n$ des $p$ points pour un système quelconque d'axes rectangulaires, et par N la somme des carrés $z_n^2$ de ces affixes, on déterminera les deux points centraux dont il s'agit par l'équation

$$z^2 - \frac{2M}{p} z + \frac{M^2 - N}{p(p-1)} = 0. \tag{1}$$

Lorsque l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de gravité G des points P, le paramètre M est nul et l'équation ci-dessus se réduit à

$$z^2 = \frac{N}{p(p-1)}. \tag{2}$$

Supposons que l'axe des $x$ se trouve dirigé suivant la ligne de jonction de ces deux points ; $z$ deviendra égal à leur demi-distance R ; N deviendra égal à $p(B^2 - A^2)$, A et B désignant les rayons de giration principaux relatifs à GX et à GY ; nous aurons donc

$$(p-1)R^2 = B^2 - A^2. \tag{3}$$

Cette formule indique que *c'est toujours avec le grand axe de l'ellipse d'inertie que coïncide la droite de jonction des deux points centraux d'ordre* $(p-2)$. Elle montre en outre que *la différence des carrés des rayons de giration principaux est égale à* $(p-1)$ *fois le carré de la demi-distance des deux points centraux d'ordre* $(p-2)$.

Pour que l'ellipse principale d'inertie devienne une circonférence, il faut et il suffit que l'équation (1) ait ses racines égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$M^2 = pN. \tag{4}$$

Supposons que cette condition soit remplie et remplaçons le point $P_n$, dont l'affixe est $z_n$, par le point $P'_n$, dont l'affixe est $z_n + \zeta_n$. Les paramètres M et N seront respectivement remplacés par $(M + \zeta_n)$ et par $(N + 2z_n\zeta_n + \zeta_n^2)$ ; la condition nécessaire et suffisante pour que cette déformation du système de points n'empêche pas l'ellipse principale d'inertie d'être une circonférence sera

$$(p-1)\zeta_n + 2(pz_n - M) = 0. \tag{5}$$

Aucune hypothèse particulière n'ayant été faite sur le choix des axes, nous pouvons placer l'origine au centre de gravité G des points P, de manière à annuler M ; nous aurons alors

$$\zeta_n = -\frac{2p}{p-1} z_n. \tag{6}$$

On obtient par conséquent $P'_n$ en prolongeant la droite $P_n G$ de la longueur

$$GP'_n = \frac{p+1}{p-1} GP_n.$$

En faisant occuper par les points P les sommets d'un polygone régulier, on peut obtenir, par des déformations successives, diverses figures dont les ellipses centrales d'inertie sont des circonférences.

M. Guimaraës adresse la Note suivante :

*Sur trois normales spéciales à l'ellipse.*

1. Le point de *déviation maxima* étant défini par

$$x = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \qquad y = b\sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

la normale en ce point a pour équation

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = \frac{c^2}{\sqrt{a+b}},$$

et les segments ON et ON′ que cette normale intercepte sur les axes sont

$$\mathrm{ON} = \frac{c^2}{\sqrt{a(a+b)}}, \qquad \mathrm{ON'} = \frac{c^2}{\sqrt{b(a+b)}}, \qquad \mathrm{NN'} = \frac{c^2}{\sqrt{ab}}.$$

Le triangle ONN′ étant rectangle, on obtient, en vertu du théorème de Stewart (¹), D étant un point quelconque sur NN′,

$$\overline{\mathrm{ON'}}^2.\overline{\mathrm{DN}}^2 + \overline{\mathrm{ON}}^2.\overline{\mathrm{DN'}}^2 = \overline{\mathrm{NN'}}^2.\overline{\mathrm{OD}}^2. \tag{1}$$

Si le point D est au milieu de NN′, on a

$$\overline{\mathrm{ON}}^2 + \overline{\mathrm{ON'}}^2 = 4\overline{\mathrm{OD}}^2,$$

d'où

$$\mathrm{OD} = \frac{c^2}{2\sqrt{ab}}, \tag{2}$$

et

$$\sin\widehat{\mathrm{DOA}} = \frac{\mathrm{ON'}}{2\,\mathrm{OD}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \qquad \mathrm{tang}\,\widehat{\mathrm{DOA}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

(¹) Voir *El Progreso matematico*, t. I, p. 195.

Si OD est perpendiculaire à NN′, la formule (1) devient

$$\overline{\mathrm{ON}}^2 . \overline{\mathrm{ON}'}^2 = \overline{\mathrm{OD}}^2 . \overline{\mathrm{NN}'}^2,$$

d'où

$$\mathrm{OD} = \frac{c^2}{a+b}.$$

2. La normale au point défini par les coordonnées

$$x = y = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

qui est le point d'intersection de l'ellipse avec un vecteur faisant avec le grand axe un angle $\frac{\pi}{4}$, a pour équation

$$a^2x - b^2y = \frac{abc^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

d'où

$$\mathrm{ON} = \frac{bc^2}{a\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \mathrm{ON}' = \frac{ac^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \mathrm{NN}' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{\sqrt{a^4+b^4}}{ab}.$$

Si OD est aussi perpendiculaire à NN′, on voit que la relation (1) devient

$$\overline{\mathrm{ON}}^2 . \overline{\mathrm{ON}'}^2 = \overline{\mathrm{OD}}^2 . \overline{\mathrm{NN}'}^2,$$

d'où

(3) $$\mathrm{OD} = \frac{abc^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^4+b^4}}.$$

et

$$\operatorname{tang} \widehat{\mathrm{DOA}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

3. La normale au point défini par les coordonnées

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

a pour équation

$$x - y = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

d'où

$$\mathrm{ON} = \mathrm{ON}' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \mathrm{NN}' = \mathrm{ON}.\sqrt{2} = \sqrt{2}\,\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

c'est-à-dire que le triangle rectangle ONN′ est isoscèle, et la formule (1) devient

$$\overline{\mathrm{DN}}^2 + \overline{\mathrm{DN}'}^2 = 2\overline{\mathrm{OD}}^2$$

Si D est au milieu de NN', on trouve

$$(4) \qquad OD = \frac{c^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}},$$

et le triangle ODN est rectangle en D et isoscèle, ce qui est évident, et par suite l'angle que OD fait avec le grand axe est $\frac{\pi}{4}$. On voit donc qu'il est toujours possible de mener une normale par un point D porté sur le plan d'une ellipse, si sa distance OD au centre O est exprimée par une des formules (2), (3), (4) et si OD fait avec le grand axe un angle dont la tangente soit $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{b^2}{a^2}$, 1 respectivement.

M. Appell adresse la Note suivante :

*Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique.*

Je me propose d'indiquer brièvement la démonstration d'un théorème qui se trouve énoncé, à la suite d'une remarque de M. Goursat, dans un article *Sur l'homographie en Mécanique*, que j'ai publié dans le tome XII de l'*American Journal*, et d'en déduire la notion d'invariants d'un système. M. Dautheville et moi avons donné des cas particuliers de ce théorème (*Annales de l'École Normale*, t. VII, 1890; *American Journal*, t. XIII).

Soit un système matériel dont la configuration est définie par $k$ paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Les équations du mouvement de ce système *sous l'action de forces arbitraires ne dépendant que de sa position* sont

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad q'_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt},$$

$Q_\alpha$ ne dépendant que de $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Pour un deuxième système dont la configuration est définie par $k$ paramètres $r_1, r_2, \ldots, r_k$, on aura de même en appelant $t_1$ le temps

$$(2) \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial S}{\partial r'_\alpha}\right) - \frac{\partial S}{\partial r_\alpha} = R_\alpha, \qquad r'_\alpha = \frac{dr_\alpha}{dt_1}.$$

On transformera l'un des mouvements dans l'autre, si l'on peut trouver des fonctions $\varphi_\alpha$ et $\lambda$ de $q_1, q_2, \ldots, q_k$ telles qu'en posant

$$r_\alpha = \varphi_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad dt_1 = \lambda\, dt,$$

les équations (1) se transforment en (2). On aura alors des identités de la forme

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \sum_{i=1}^{i=k} \mathrm{P}_i^{(\alpha)} \left[\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial r'_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial r_i}\right].$$

Les coefficients $\mathrm{P}_i^{(\alpha)}$ ne dépendent que de $r_1, r_2, \ldots, r_k$, et non de leurs dérivées, comme on le voit en identifiant les termes contenant les dérivées secondes. L'expression $\Phi_\alpha$ ne contient pas de dérivées secondes, mais chacun de ses termes contient des dérivées premières. Si la transformation est possible quelle que soit la loi des forces agissant sur l'un des systèmes, il faut qu'*elle annule* $\Phi_\alpha$, car autrement, d'après les équations (1) et (2), les $\mathrm{Q}_\alpha$ contiendraient des dérivées dans leurs expressions, ce qui est contraire à l'hypothèse. Alors, les $\Phi_\alpha$ étant nuls, les identités (3) montrent que la transformation transforme un mouvement du premier système, lorsque ce système n'est sollicité par aucune force (ce qu'on peut appeler un mouvement *géodésique* du premier système), en un mouvement analogue du second. Pour que cette transformation soit possible, il faut et il suffit que certains *invariants* soient égaux.

Nous donnerons prochainement les expressions de ces invariants, qui se rattachent aux recherches de M. Beltrami.