BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 81-89
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_81_0>

© Gauthier-Villars, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FRENET (F.), Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon. — RECUEIL D'EXERCICES SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL. 4ᵉ édit., 1 vol. in-8°, XIV-458 p. Paris, Gauthier-Villars; 1882.

Il y a quelque temps qu'a été publiée la quatrième édition de ce Recueil qui, depuis bientôt trente ans, rend de si importants services à l'enseignement de l'Analyse infinitésimale en France et même à l'étranger, où il a pris rang parmi les Ouvrages classiques. Cependant les Ouvrages de cette nature, si rares chez nous, sont extrêmement nombreux en Angleterre et en Allemagne; mais aucun ne présente, comme celui-ci, une suite complète, continue et graduée d'applications, depuis les exercices de pur calcul, différentiation et intégration des fonctions explicites, intégration des équations différentielles, jusqu'aux applications les plus délicates de l'Analyse à la Géométrie. L'étude des courbes dans l'espace a particulièrement suggéré à l'auteur des applications intéressantes et nombreuses des formules si élégantes et si simples qu'il a depuis longtemps découvertes sur la double courbure des lignes.

Quant aux sujets des exercices de Géométrie plane, beaucoup sont empruntés à la plupart des courbes célèbres; et, pour plusieurs, la réunion, facilitée par des renvois et une Table analytique, des articles où sont établies les diverses propriétés de chacune, en constitue une étude parfois très complète.

Enfin les renseignements historiques et les compléments théoriques qui s'y trouvent intercalés font de ce Recueil un Ouvrage considérable et unique.

Chacune de ses éditions successives lui a d'ailleurs apporté quelque perfectionnement. Celle-ci se distingue surtout de la troisième par un notable accroissement du nombre des exercices. Signalons particulièrement toute une série nouvelle relative à l'intégration des équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. D'ailleurs les anciennes questions ont été soigneusement revues, et plusieurs ont reçu des développements utiles ou d'heureuses modifications. Enfin l'Ouvrage est complété par la Table analytique déjà mentionnée, dont le but est de favoriser les recherches et de permettre le rapprochement des divers passages qui se rattachent à un même sujet. En la parcourant, les personnes qui ont fait usage de la troisième édition apprécieront la variété et l'intérêt des questions nouvelles dont le Recueil se trouve enrichi.

Cette édition est donc nettement supérieure à la précédente, mais ce n'est pas la dernière, et nous pensons que la prochaine devra encore être augmentée.

Lors de la première apparition de ce Recueil, en 1856, il renfermait des applications de théories non contenues dans les programmes d'alors. Mais le temps a marché, les programmes se sont étendus, et ces théories, avec d'autres encore, sont devenues obligatoires. A leur tour, elles exigent de nouveaux exercices sur les propriétés des fonctions d'une variable imaginaire et leurs développements, sur l'intégration entre des limites imaginaires, sur la réduction aux intégrales elliptiques, sur les fonctions elliptiques et les fonctions θ, etc., etc., toutes choses qui font maintenant partie de l'enseignement classique.

C'est donc un perfectionnement tout indiqué pour une prochaine édition. J. Collet.

CESÁRO (E.). — Sur diverses questions d'Arithmétique. 1 vol. in-8, 352 p. Bruxelles; 1883.

Le Volume publié par M. Cesáro contient vingt Notes se rapportant à des sujets analogues que l'auteur traite par des méthodes uniformes, des extraits de Lettres adressées à M. Catalan, à M. Hermite, et quelques Notes supplémentaires dont les unes permettent d'éclaircir ou d'étendre quelques propositions antérieurement démontrées, dont les autres se rapportent à divers points d'analyse. C'est surtout des vingt premières Notes que nous nous occuperons.

Elles sont toutes d'un caractère très élémentaire, bien que quelques-unes touchent aux parties les plus élevées de l'Arithmétique; l'auteur y établit un certain nombre d'identités, habituellement faciles à démontrer, et montre, par des applications nombreuses, la fécondité de ces identités; il rencontre ainsi un nombre considérable de formules : les unes sont nouvelles, les autres déjà connues; parmi ces dernières, plusieurs avaient été données par M. Liouville, le plus souvent sans démonstration. M. Cesáro applique ensuite ses formules et ses méthodes à la détermination des fonctions asymptotiques de diverses fonctions numériques.

Nous signalons dans ce qui suit un certain nombre des identités que considère M. Cesáro.

Soit n un entier positif, et soit $q_p = \left[\frac{n}{p}\right]$ le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{p}$, p étant aussi un entier positif; $f(x)$ étant une fonction quelconque de l'entier positif x, soit

$$F(x) = f(1) + f(2) + \ldots + f(x),$$

on aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(q_1) + F(q_2) + \ldots + F(q_n) \\ &\quad = q_1 f(1) + q_2 f(2) + \ldots + q_n f(n). \end{aligned}\right.$$

Soient a', b', c', ... les diviseurs de l'entier x et $f(x)$, $g(x)$ des fonctions quelconques de x; si l'on pose

$$\begin{aligned} F(x) &= f(a') + f(b') + f(c') + \ldots, \\ G(x) &= g(a') + g(b') + g(c') + \ldots, \end{aligned}$$

on aura

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &G(a) f\left(\frac{n}{a}\right) + G(b) f\left(\frac{n}{b}\right) + G(c) f\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots \\ &\quad = F(a) g\left(\frac{n}{a}\right) + F(b) g\left(\frac{n}{b}\right) + G(c) f\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

a, b, c, ... étant les diviseurs de l'entier n. M. Cesáro donne de nombreuses applications de cette identité, en mettant à la place des fonctions f et g diverses fonctions numériques, la fonction $\varphi(x)$ qui indique le nombre de nombres premiers à x et non supérieurs, la fonction $\theta(x)$ qui indique le nombre des diviseurs de x, la fonction $\int x$ qui exprime la somme des diviseurs de x, la fonction $\lambda(x)$ égale à $+1$ ou à -1, suivant que le nombre de facteurs premiers qui entrent dans x est pair ou impair, la fonction $\tau(x)$ qui indique le nombre des diviseurs premiers de x, la fonction $\omega(x)$ qui exprime le nombre de manières dont on peut décomposer x en un produit de deux facteurs premiers entre eux, la fonction $\mu(x)$ considérée par M. Mertens et qui est égale à o si x admet des diviseurs carrés autres que 1, à $+1$ ou à -1 suivant que x est composé d'un nombre pair ou impair de facteurs premiers inégaux, la fonction $\pi(x)$ qui représente le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans x, affectés du signe —.

Remarquons encore que l'identité (2) subsiste si l'on prend pour $F(x)$ et $G(x)$ deux fonctions plus générales que celles qui ont été considérées, savoir

$$F(x) = \psi(a')f\left(\frac{x}{a'}\right) + \psi(b')f\left(\frac{x}{b'}\right) + \ldots,$$
$$G(x) = \psi(a')g\left(\frac{x}{a'}\right) + \psi(b')g\left(\frac{x}{b'}\right) + \ldots,$$

les quantités x, a', b', c', ... conservant le même sens que précédemment.

En conservant aux quantités $F(x)$ et $G(x)$ la signification plus particulière qui a été d'abord expliquée, l'identité (2) conduit à l'égalité

$$(3) \qquad \sum \frac{g(n)}{n^m} \sum \frac{F(n)}{n^m} = \sum \frac{G(n)}{n^m} \sum \frac{f(n)}{n^m},$$

les sommations étant relatives à la lettre n et s'étendant depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$.

Les séries, bien entendu, sont supposées convergentes.

Chacun des deux membres de l'identité (3) est égal à

$$\sum \frac{H(n)}{n^m},$$

en faisant

$$H(n) = f(a)\,G\left(\frac{n}{a}\right) + f(b)\,G\left(\frac{n}{b}\right) + \ldots,$$

où a, b, ... sont tous les diviseurs de n. Cette identité contient une proposition due à Liouville, et qui s'exprime par l'égalité

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^m} = \frac{S_{m-1}}{S_m},$$

où

$$S_m = \frac{1}{1^m} = \frac{1}{2^m} + \ldots.$$

M. Cesáro montre de même que l'on a

$$\sum \frac{fn}{n^m} + S_m\,S_{m-1},$$

et donne un très grand nombre de formules analogues, où figurent, entre autres, les diverses fonctions numériques que l'on a énumérées un peu plus haut; signalons celle-ci, en particulier,

$$\sum \frac{1}{p^m} = \frac{1}{S_m} \sum \frac{\tau(n)}{n^m},$$

où, dans le premier membre, on doit mettre à la place de p les divers nombres premiers.

En désignant par (x, y) le plus grand commun diviseur de x et y, par $\psi(m)$ une fonction quelconque de l'entier m, posons

$$F(a) = \psi\left(\frac{n\alpha}{a}\right) + \psi\left(\frac{n\beta}{a}\right) + \ldots,$$

où a est un diviseur quelconque de n et où α, β, ... sont les nombres premiers à a et non supérieurs à a; appelons $a, b, c, \ldots$ tous les diviseurs de n; on aura

$$(4) \quad \begin{cases} \psi(1)f(n, 1) + \psi(2)f(n, 2) + \ldots + \psi(n)f(n, n) \\ \quad = F(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + F(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + F(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots. \end{cases}$$

En désignant par α, β, γ, ... les $\varphi(n)$ nombres premiers à n et non supérieurs à n, et en posant

$$\begin{aligned} F(x) &= f(a) + f(b) + f(c) + \ldots, \\ G(p) &= g(p\alpha) + g(p\beta)) + g(p\gamma) + \ldots, \end{aligned}$$

où l'on suppose, pour la première égalité, que a, b, c, ... sont tous les diviseurs de x et, pour la seconde, que p est un des nombres α, β, γ, ..., on aura

$$(5) \quad \begin{cases} g(\alpha)F(\alpha) + g(\beta)F(\beta) + g(\gamma)F(\gamma) + \ldots \\ \quad = G(\alpha)f(\alpha) + G(\beta)f(\beta) + G(\gamma)f(\gamma) + \ldots. \end{cases}$$

L'identité (4), par exemple, fournit les suivantes :

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2} + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2} + \ldots = \frac{1}{n},$$

$$a^m \varphi_m\left(\frac{n}{a}\right) + b^m \varphi_m\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots = 1^m + 2^m + \ldots + n^m.$$

Dans ces deux égalités, a, b, c, ... sont les diviseurs de n, $\pi(x)$ est une fonction définie ci-dessus, $\varphi_m(x)$ est la somme des $m^{\text{ièmes}}$

puissances des nombres premiers à x et non supérieurs à x. La seconde de ces identités est due à M. Liouville.

L'identité (1) est susceptible d'une importante généralisation : laissons les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ arbitraires et soient toujours

$$G(x)=\sum_1^x g(x),\quad F(x)=\sum_1^x f(x);$$

supposons que de l'inégalité $y \gtreqless \psi(x)$ on puisse tirer $x \gtreqless \psi'(y)$ et désignons, pour abréger, par q_p et q'_q les plus grands entiers contenus dans $\psi(p)$ et $\psi'(p)$; on aura

$$(6)\qquad \begin{cases} g(1)F(q_1)+g(2)F(q_2)+g(3)F(q_3)+\ldots \\ \quad =f(1)G(q_1)+f(2)G(q_2)+f(3)G(q_3)+\ldots. \end{cases}$$

Par exemple, si a, b, n sont trois entiers positifs quelconques, l'inégalité

$$y \gtreqless \frac{n-bx}{a}$$

entraîne

$$\lambda \gtreqless \frac{n-ay}{b},$$

et l'inégalité (6) donne, comme cas très particulier, l'élégante relation

$$\left[\frac{n-b}{a}\right]+\left[\frac{n-2b}{a}\right]+\left[\frac{n-3b}{a}\right]+\ldots$$
$$=\left[\frac{n-a}{b}\right]+\left[\frac{n-2a}{b}\right]+\left[\frac{n-3a}{b}\right]+\ldots,$$

signalée à M. Cesáro par M. Hermite.

Les huit dernières Notes sont consacrées, en général, à la recherche d'expressions asymptotiques de diverses fonctions numériques ou, suivant le langage de l'auteur, à la recherche de valeurs moyennes. Le point de départ de ces recherches a été l'étude d'un certain nombre de théorèmes contenus dans un Mémoire *Sur quelques applications de la fonction gamma à la théorie des nombres*, présenté par M. A. Berger à la Société des Sciences d'Upsal en avril 1880, et dont M. Catalan a publié quelques extraits dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, sous ce titre : *Théorèmes extraordinaires*. La marche suivie par M. Cesáro lui a permis de retrouver plusieurs des théorèmes de M. Berger et d'autres propositions beaucoup plus générales.

Si l'expression

$$\frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{n}$$

tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite finie, M. Cesáro appelle cette limite *valeur moyenne* de la fonction $\psi(\mathrm{N})$; plus généralement, si les deux fonctions

$$\frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{\psi(n)}, \quad \frac{\psi'(1)+\psi'(2)+\ldots+\psi'(n)}{\psi'(n)}$$

tendent vers une même limite finie, il dit que la fonction $\psi(\mathrm{N})$ est égale, en moyenne, à la fonction $\psi'(\mathrm{N})$.

Ces définitions admises, si, $f(x)$ étant une fonction quelconque de l'entier x dont les diviseurs sont $a, b, c, \ldots,$ on fait

$$\psi(x)=f(a)+f(b)+f(c)+\ldots,$$

M. Cesáro montre, en partant de l'égalité

$$\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)=q_1 f(1)+q_2 f(2)+\ldots+q_n f(n),$$

que, si la série

$$f(1)+\tfrac{1}{2}f(2)+\tfrac{1}{3}f(3)+\ldots$$

est convergente et si

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}[f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)]=0,$$

la fonction $\psi(\mathrm{N})$ est égale, en moyenne, à

$$f(1)+\tfrac{1}{2}f(2)+\tfrac{1}{3}f(3)+\ldots.$$

Par exemple, la somme des inverses des m^{iemes} puissances des diviseurs d'un nombre est égale, en moyenne, à la somme de la série

$$1+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}+\ldots.$$

Ce théorème, dans le cas de $m=2$, avait été signalé par M. Berger.

La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, au logarithme népérien de 2, ...

Par une voie un peu différente, l'auteur arrive à cette proposition :

La somme des $m^{ièmes}$ puissances des diviseurs d'un nombre N *est égale, en moyenne, à la $m^{ième}$ puissance de ce nombre, multipliée par la somme de la série*

$$1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \ldots.$$

En se servant toujours des mêmes identités, M. Cesáro parvient aux valeurs moyennes des fonctions $\omega(N)$, $\varphi(N)$, $\theta(N)$ que Dirichlet avait déjà données; il discute avec détail la solution, donnée dans le *Bulletin* par M. Perott, du problème relatif à la valeur moyenne de $\varphi(N)$, ainsi que celle qui est due à M. Mertens.

Signalons encore les résultats suivants :

$$\lim \frac{\varphi_m(1) + \varphi_m(2) + \ldots + \varphi_m(n)}{n} = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \frac{6}{\pi^2},$$

$$\lim \frac{\psi_m(1) + \psi_m(2) + \ldots + \psi_m(n)}{n} = \frac{1}{2m+1} \frac{1}{1.2\ldots m} \left(\frac{3}{\pi^2}\right)^m,$$

relatifs à la fonction $\varphi_m(x)$ antérieurement définie et à la fonction $\psi_m(x)$ qui représente la somme des produits m à m des nombres premiers à x et non supérieurs à x, la recherche de la valeur moyenne du nombre des restes obtenus en divisant n par les nombres 1, 2, ..., n qui sont inférieurs à la moitié du diviseur correspondant, la recherche de la valeur moyenne du nombre de solutions, entières et positives, de l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = n,$$

dans laquelle on suppose A, C positifs et $4AC - B^2 = \delta^2$, valeur moyenne que M. Cesáro trouve égale à

$$\frac{\pi}{2\delta} - \frac{B}{\delta^2} - \ldots.$$

La dernière Note est consacrée à l'analyse critique d'un Mémoire de M. Mertens : *Ueber Vertheilung der Primzahlen* (*Journal de Borchardt,* 1878). C'est d'ailleurs un sujet sur lequel M. Cesáro a l'intention de revenir dans un nouveau travail.

Les deux lettres à M. Catalan, qui suivent les Notes, s'analyseraient difficilement : écrites avec un abandon qui n'est pas sans agrément, elles contiennent beaucoup d'idées qui semblent ingénieuses et dont M. Cesáro saura sans doute tirer parti, mais qui ne sont pas encore arrivées à une forme définitive.

Dans la Lettre à M. Hermite, dont nous avons déjà dit quelques mots, M. Cesáro établit ce résultat:

L'équation $ax + by = n$, où a, b, n sont des nombres positifs dont les deux premiers sont premiers entre eux, admet un nombre de solutions entières et positives égales à $\left[\frac{n}{ab}\right] + 1$, ou à $\left[\frac{n}{ab}\right]$, suivant que le reste de la division de n par ab a, ou non, la forme $a\beta + b\alpha$, α et β étant des entiers positifs.

Diverses autres Notes sont consacrées à la démonstration et à la généralisation de plusieurs théorèmes dus à M. Catalan, à l'établissement de la formule de Thacker, à l'étude de quelques fonctions numériques. Enfin le volume de M. Cesáro contient encore une Note d'Analyse relative aux fonctions $\Gamma(x)$ et $\frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$, où l'on trouvera une démonstration élémentaire de la formule de Stirling, et se termine par un rapport élogieux de M. Catalan, lu à la Société royale des Sciences de Liège, dans la séance du 2 mai 1882. J. T.