BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

RAFFY

Discours prononcé par M. Cayley devant les membres de l'association britannique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 54-80

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_54_1>

MÉLANGES.

DISCOURS PRONONCÉ PAR M. CAYLEY DEVANT LES MEMBRES DE L'ASSOCIATION BRITANNIQUE;

Traduit par M. RAFFY, Docteur ès sciences ([1]).

J'ai signalé en commençant le lien qui rattache les Mathématiques aux notions d'espace et de temps, mais je n'ai encore presque rien dit du temps. On admet, je crois, généralement que la notion de nombre dérive de celle de temps. Ainsi Whewell, dans l'Ouvrage déjà cité, dit (p. 20) que le nombre est une modification de l'idée de répétition, qui elle-même se rattache à l'idée de temps. Je ne puis me rallier à cet avis : il me semble que nous avons (indépendamment, dirai-je, des idées de temps et d'espace et dans des circonstances où le temps n'intervient pas plus que l'espace) la notion de pluralité. Représentons-nous des lettres $a, b, c, \ldots$. Si elles forment une suite limitée, par exemple la suite a, b, c, d, e, nous arrivons à l'idée de nombre. Faisons correspondre ces lettres une à une avec les objets d'une autre suite ou, si l'on veut, avec les mots *premier, second,* etc.; nous trouvons que la dernière lettre répond au mot *cinquième* et nous disons que le nombre des lettres est égal à cinq. Ainsi la notion de nombre cardinal semble dériver de celle de nombre ordinal.

Les questions de combinaisons et d'arrangements se présentent d'elles-mêmes, et il serait possible, avec la seule notion de pluralité, de développer une science mathématique; mais cette science n'aurait, comme on le voit, qu'une extension très limitée, et il est difficile de n'y pas introduire la notion de nombre ; en effet, en présence d'une suite limitée d'objets, on ne peut éviter cette question : combien y en a-t-il? En se restreignant ainsi, on a encore

([1]) Suite, *voir* p. 30.

un sujet d'une certaine étendue, qui comprend la partition des nombres et que Sylvester appelle *tactique*.

De la notion ainsi acquise de nombre entier on arrive à celle de nombre fractionnaire, et l'on reconnaît qu'elle permet d'exprimer le rapport de deux grandeurs de même espèce, sinon avec une exactitude absolue, du moins avec une exactitude aussi grande que l'on veut. Soit, par exemple, à mesurer une longueur : elle contient tant de pieds, de dixièmes de pied, de centièmes, de millièmes, etc. Employez des unités aussi petites que vous voudrez, il n'est pas prouvé que vous puissiez exprimer exactement cette longueur; il existe effectivement des grandeurs incommensurables. J'aurai à vous parler du rôle qu'elles jouent dans la théorie des nombres. Pour le moment je me borne à les mentionner, en tant que prouvant l'impossibilité où nous sommes de passer de la notion de nombre à une notion indispensable à l'Analyse, celle d'une grandeur abstraite (réelle et positive) susceptible de variation continue. On surmonte cette difficulté en recourant à un postulat. On conçoit une grandeur abstraite, réelle et positive, et l'on imagine qu'elle varie d'une manière continue sans s'occuper aucunement de la représenter dans ses différents états, soit par un nombre fractionnaire, soit autrement.

On doit à Sir W.-R. Hamilton un travail intéressant intitulé : *Theory of conjugate Functions, or algebrical Couples, with a preliminary and elementary Essay on Algebra as the Science of pure Time,* 1833-35 (*Trans. R. I. Acad.*, t. XVII). L'auteur se propose, comme l'indique son titre, de prouver que l'Algèbre n'est que la science du temps; il établit dans ses remarques générales préliminaires les conclusions suivantes : premièrement, la notion du temps est en relation avec notre Algèbre usuelle; deuxièmement, la notion du temps peut à elle seule donner lieu à une science indépendante; troisièmement, cette science pure du temps a le même objet que l'Algèbre et lui est identique, en tant que l'Algèbre est elle-même une science. Pour soutenir sa première conclusion, il fait observer que « dans l'histoire de l'Algèbre les découvertes les plus importantes ont été dues soit à la considération exclusive du temps, soit a l'idée de continuité qui est étroitement liée et coïncide presque avec l'idée de temps. C'est », dit-il, « l'esprit même de l'Algèbre de considérer les grandeurs à l'état *fluent,* comme l'esprit de la Géométrie est de considérer les objets à l'état *fixé*, et la révolution que Newton opéra dans les parties les plus élevées de l'Algèbre pure comme de l'Algèbre appliquée, il la fit en s'appuyant principalement sur l'idée de *fluxion*, qui implique la notion du *temps*. » Hamilton prend le mot *Algèbre* dans un sens très large, mais avec toute l'extension qu'il lui donne il lui fait comprendre tout ce qui ne rentre pas dans le Calcul différentiel. Restreignant le mot à ce sens, je ne puis concéder que l'Algèbre soit en relation avec l'idée de temps. J'accorde que la notion de continuité s'impose et qu'elle a une grande importance, mais je ne puis absolument voir en elle l'idée mère de la Science. Et je partage encore moins les vues d'Hamilton, quand il prétend rattacher à la notion du temps son couple algébrique ou symbole imaginaire $a + bi$.

Je vais plus loin : la notion de continuité est une notion fondamentale; elle sert de base à tout le calcul des fluxions (et à presque tout le Calcul différentiel); elle intervient directement ou indirectement dans toute la science mathématique; néanmoins, il me semble que les variations qu'on étudie en Mathématiques sont pour la plupart considérées indépendamment du temps.

Il me paraît que nous n'avons pas en Mathématiques besoin de cette notion tant que nous ne l'invoquons pas formellement, et que même dans la Cinématique, qui est la science du mouvement, elle joue un rôle très effacé : on ne considère que des mouvements fictifs, et, si le système est regardé comme actuellement en mouvement, la vitesse du mouvement n'est pas spécifiée et n'intervient pas. Les lois des mouvements relatifs des divers points du système ne sont autre chose que des relations entre des grandeurs purement géométriques, savoir les éléments de trajectoire qui sont ou pourraient être parcourus simultanément par ces différents points. Mais, que la notion de temps s'introduise plus ou moins tôt dans les Mathématiques pures, elle se présente de toute façon en Mécanique, concurremment avec certaines autres notions nouvelles.

Si l'on divise la Mécanique en Statique et Dynamique, on rencontre en Dynamique la notion de temps et la notion de vitesse qui s'y rattache; en Statique et en Dynamique, la notion de force et aussi une notion qui est la notion de matière prise dans sa plus grande généralité : j'entends par là les conceptions de point matériel, de fil et de surface inextensibles, de solide invariable en Mécanique rationnelle, de fluide parfait et incompressible en Hydrostatique et en Hydrodynamique, d'éther dans les théories ondulatoires, et en général de tous les autres corps possibles : par exemple, une figure remarquable qui intervient dans tous les Traités généraux de Mécanique est la développable ou surface réglée ayant ses génératrices absolument rigides, mais pouvant être pliée suivant chacune de ces droites, de façon que l'élément de surface compris entre deux génératrices successives tourne tout d'une pièce autour de l'une d'elles. Enfin il y a encore une autre notion qui est indispensable à la Dynamique : c'est celle de masse ou d'inertie.

Je quitte maintenant, semble-t-il, le domaine des Mathématiques pour passer dans celui de la Physique. Mais il est difficile de tracer une ligne de démarcation entre ces deux domaines. On ne peut pas dire que certains passages considérables des *Principes* et de la *Mécanique céleste,* ainsi que la *Mécanique analytique* tout entière, n'appartiennent pas aux Mathématiques pures ; car on peut soutenir qu'on n'entre dans la Physique que quand on cherche à découvrir le mode d'existence des corps de la nature. Mais je vais laisser de côté certaines théories physiques qu'on ne peut rattacher à la conception précédente de la Mécanique.

Revenons à la théorie des nombres. L'idée mère de cette théorie est l'idée de nombre entier : d'abord le nombre entier est essentiellement positif, mais cette notion peut s'étendre de manière à comprendre des entiers négatifs et zéro. Nous avons la notion du produit et celle du nombre premier qui n'est pas un produit d'autres nombres, et nous concevons par là le nombre comme un produit de certains facteurs premiers. Ce sont là les éléments d'une théorie analogue à plusieurs titres à celle des équations. Pour résoudre une équation, il faut trouver (s'il y en a) les valeurs entières qui la vérifient, et ainsi du reste. La notion de congruence, bien que capitale, ne change pas le caractère de la théorie.

Mais il y a aussi les incommensurables, dont nous avons déjà fait mention, et qui ont donné lieu à toute une théorie nouvelle. On peut faire acception de nombres irrationnels, tels que $\sqrt{2}$, et considérer des symboles de la forme $a+b\sqrt{2}$ (a et b étant des entiers positifs ou négatifs, sans exclure zéro). On les appellera nombres entiers et l'on aura à étudier, relativement à ces nouveaux entiers, toutes les questions qui se présentent à propos des nombres entiers ordinaires. Il faudra seulement modifier toutes les définitions d'une manière convenable : car un entier ordinaire, premier au sens habituel, peut fort bien être le produit de deux entiers de la forme $a + b\sqrt{2}$: d'où la nécessité de modifier la définition de nombre premier. De même que les incommensurables, et avant même les incommensurables, on a introduit dans la théorie des nombres l'imaginaire i de l'Algèbre. On peut en effet considérer des nombres de la forme $a + bi$ (a et b étant des entiers ordinaires positifs ou négatifs, sans exclure zéro), leur donner le nom d'*entiers* et établir une théorie de ces nombres tout à fait analogue à la théorie ordinaire des nombres entiers réels. Ce que je veux signaler, c'est que l'imaginaire i ne joue pas dans la théorie des nombres entiers un rôle unique, comme dans l'Algèbre et la Géométrie. Ce symbole n'est ici qu'un des termes d'une série illimitée de nombres irrationnels.

J'ai dit que je vous parlerais, non des services que les Mathématiques rendent parfois dans la vie commune et dans les recherches de Physique, mais plutôt de ce que les Mathématiques doivent à la vie commune et à la Physique. Ceci m'amène à faire en quelque sorte l'historique du développement des différentes branches des Mathématiques, dans leurs relations avec les deux plus anciennes sciences physiques, l'Astronomie et la Mécanique. Les théories de Mathématiques ont dû leur origine à des questions qui s'offraient soit dans la vie pratique, soit dans les Sciences physiques : on les a poursuivies et développées sans plus avoir égard à leur origine; après des siècles elles se sont rencontrées de nouveau avec ce qui les avait fait naître, ou ont abordé des problèmes tout différents. La Géométrie et l'Algèbre me semblent devoir être considérées comme ayant procédé des problèmes et des objets de la vie pratique. La Géométrie est issue sans doute de l'arpentage; mais, malgré son nom, elle doit plutôt encore son origine à la considération de certaines figures, telles qu'une barre, un rond, une boule, une toupie (ou un pain de sucre). Les Grecs ont appliqué aux deux figures géométriques suggérées par la forme de ces derniers corps les noms de *sphère* et de *cône*, qui leur sont restés; et ils ont étendu la signification du mot *cône* pour lui faire désigner les deux nappes formées par le prolongement dans les deux sens des génératrices de la surface. L'Algèbre semblerait être sortie de faciles jeux de patience relatifs aux nombres, que jadis le Bija-Ganita proposait, dans ses formes imagées, sur les jeunes filles aux beaux cheveux ou sur les essaims d'abeilles voltigeant parmi les plantes odorantes et la reine abeille bourdonnant autour de la fleur du lotus; et qu'aujourd'hui le commençant retrouve dans ses livres de classe sous la forme plus prosaïque d'un énoncé qui le conduit à une équation simple.

On peut faire commencer la Géométrie grecque avec Platon (430-347 av. J.-C.). On lui attribue les notions d'analyse géométrique et de lieux, ainsi que la découverte des sections coniques. Il y a en effet dans ses dialogues mainte allusion curieuse à des questions mathématiques. Ainsi, dans un passage du *Théétète,* Platon affirme l'incommensurabilité de certaines racines carrées. Mais les plus anciens écrits techniques sont ceux d'Euclide (285 av. J.-C.). Il n'y a peut-être rien de plus beau dans toute la Science mathématique que son merveilleux Livre V. Dans les Livres VII, VIII, IX et X, Euclide a complètement approfondi et développé les premiers principes de la théorie des nombres, avec celle des incommensurables. Ensuite viennent deux géomètres de génie, Apollonius (vers 247) et Archimède (287-212 av. J.-C.). Archimède a fondé la Statique (en y comprenant l'Hydrostatique); tout le monde connaît son mot sur le levier, son εὕρηκα, et sa défense de Syracuse. Après ces créateurs, la Géométrie conserve toute une série de noms, où figurent ceux des astronomes Hipparque (150 av. J.-C.) et Ptolémée (125 ap. J.-C.), et qui s'arrête à Pappus (400 ap. J.-C.). Mais les maîtres grecs furent continués par leurs commentateurs arabes, puis par les géomètres italiens et autres du XVI[e] siècle et des temps modernes.

L'arithmétique des Grecs manquait d'une notation commode, ce qui la rendait singulièrement compliquée et difficile. Elle fut remplacée, dans l'usage des astronomes, par la numération sexagésimale, qu'on attribue à Ptolémée, mais qui était probablement connue avant lui. L'usage des caractères que nous appelons *chiffres arabes* devint général dans les Traités d'Arithmétique et d'Astronomie des Arabes dès le milieu du X[e] siècle, mais ne fut introduit en

Europe qu'environ deux cents ans plus tard. Chez les Grecs, l'Algèbre n'est guère représentée que par le Traité de Diophante (150 av. J.-C.); et encore n'est-ce là qu'une théorie des nombres, contenant quelques questions résolues sur les carrés et les cubes parfaits, ainsi que d'autres propriétés des nombres. Mais ces essais n'ont aucun lien historique avec l'Algèbre moderne, qui fut apportée d'Orient en Italie par Leonardo Bonacci de Pise (1202-1208), et qui fut cultivée avec succès au XV^e et au XVI^e siècle par Lucas Paciolus ou de Burgo, par Tartaglia, Cardan et Ferrari. Plus tard vinrent Viète (1540-1603), Harriot déjà cité, Wallis et beaucoup d'autres.

L'Astronomie a un lien visible avec la Géométrie. Les résultats les plus simples de l'observation des corps célestes ne peuvent être fixés que par le langage de la Géométrie; telles sont ces lois, que les étoiles décrivent des cercles autour de l'étoile polaire, ou que les positions que le Soleil occupe successivement parmi les étoiles fixes dans le cours d'une année forment un cercle. Les calculs astronomiques exigeaient qu'on sût calculer un arc de cercle connaissant sa corde. Ce problème remonte à Hipparque, qui composa, dit-on, un Ouvrage en douze Livres sur les arcs et les cordes du cercle. L'*Almageste* de Ptolémée (125 ap. J.-C.) est le premier Ouvrage contenant une Table d'arcs et de cordes, avec la manière de la construire; on y trouve, entre autres, la proposition relative au produit des diagonales du quadrilatère inscrit, qui fut plus tard intercalée dans le Traité d'Euclide (Livre VI, proposition D). Les Arabes firent cette innovation de considérer, au lieu de la corde d'un arc, le sinus, ou demi-corde de l'arc double. Ils donnèrent ainsi à cette théorie la forme que conserve la Trigonométrie moderne. Le théorème de Ptolémée qui vient d'être rappelé, ou plutôt un cas particulier de ce théorème, exprimé au moyen du symbole sinus, donne le sinus de la somme de deux arcs, et se trouve être ainsi le théorème fondamental de la Trigonométrie. Au XV^e et au XVI^e siècle, il y eut toute une légion de mathématiciens qui calculèrent avec une ardeur et une persévérance admirables des Tables de fonctions circulaires : Purbach, Müller (Regiomontanus), Copernic, Reinhold, Maurolycus, Viète et bien d'autres. Les Tables de tangentes et de sécantes sont dues respectivement à Reinhold et à Maurolycus.

Les logarithmes furent inventés, non pas seulement en vue du calcul des Tables trigonométriques, mais pour faciliter tous les calculs numériques en général. Leur invention est due à John Napier (Neper), de Merchiston, qui mourut en 1618, à l'âge de soixante-sept ans. Sa conception dérive d'un raisonnement mathématique fort subtil, fait en vue de comparer les espaces que parcourent deux points, l'un se mouvant d'un mouvement uniforme, l'autre animé d'une vitesse variable suivant une loi donnée. Il est à remarquer que les logarithmes de Neper sont approximativement, mais non exactement, ceux qu'on appelle aujourd'hui *logarithmes népériens,* ou plus souvent *logarithmes hyperboliques,* et qui ont pour base e. Le passage à la base 10, qui est le plus grand perfectionnement apporté à l'usage des logarithmes, fut indiqué par Neper lui-même, mais réalisé par Henry Briggs, qui fut plus tard professeur à Oxford et mourut en 1630. Mais c'est le logarithme hyperbolique qui est seul important en théorie. La fonction directe, l'exponentielle e^x, dont le logarithme hyperbolique est l'inverse, ne se présenta pas aussi naturellement. On calcula des Tables donnant les logarithmes des nombres et ceux des fonctions trigonométriques.

Les fonctions circulaires et logarithmiques furent ainsi inventées en vue d'objets pratiques, séparément et sans qu'on aperçût aucun lien entre elles. Elles furent reliées par la théorie des imaginaires et forment aujourd'hui un groupe qui joue le rôle le plus important dans toutes les parties des Mathématiques. L'Analyse ne doit qu'à elle-même le rapprochement établi entre ces fonctions, mais elle ne peut revendiquer leur découverte.

L'architecture grecque présente des spirales, et ces courbes ont été étudiées mathématiquement par Archimède. Les géomètres grecs inventèrent encore certaines autres courbes, plus ou moins intéressantes, mais dont l'origine nous échappe. Une courbe qui aurait pu se présenter d'elle-même, celle que décrit un point de la circonférence d'une roue de voiture, fut signalée pour la première fois par Mersenne en 1615. C'est cette courbe que Roberval, Pascal et d'autres géomètres étudièrent ensuite sous le nom de *roulette* ou de *cycloïde*. Pascal (1623-1662) donna à dix-sept ans ses *Essais pour les coniques,* soit sept pages pleines de vues nouvelles, et où se trouve, dans un paragraphe de huit lignes, le théorème de l'hexagone inscrit.

Kepler (1571-1630), en trouvant par l'observation les lois du mouvement des planètes, fit intervenir dans l'Astronomie l'une des sections coniques, l'ellipse, et établit les bases de la théorie de la gravitation. Galilée (1564-1642), qui fut le contemporain de Kepler, fonda la Dynamique : immédiatement après Galilée, vint Isaac Newton (1643-1727); son Ouvrage intitulé *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, et connu sous le nom de *Principes*, parut en 1687.

Les questions de Physique, de Statique et de Dynamique qui s'étaient présentées avant la publication des *Principes* n'offraient aucune difficulté mathématique sérieuse. Il n'en fut plus ainsi des problèmes nombreux et importants que fit surgir la théorie de la gravitation, et qui, devenus un objet d'étude pour les géomètres, ont puissamment contribué au progrès des Mathématiques. Il y eut le problème des deux corps, ou, ce qui revient au même, le problème du mouvement d'un point sollicité par une force centrale variant suivant une loi quelconque. Il y eut aussi le problème (très intéressant au point de vue mathématique) du mouvement d'un corps attiré par deux ou plusieurs centres fixes. Enfin un problème qui touche de près à celui du système solaire, le problème des trois corps, a toujours excédé et excède encore de beaucoup les ressources de l'Analyse. Dans la théorie de la Lune et des planètes, on le remplace par un autre, très différent en théorie, et qui consiste à chercher le mouvement d'un corps soumis à la double action d'une force principale, émanant d'un centre fixe, et d'une force perturbatrice; un autre mode de solution conduit au problème du mouvement elliptique troublé. Remarquons à ce propos qu'un fait d'observation astronomique, la variation lente de l'orbite des planètes, a suggéré aux mathématiciens une méthode nouvelle, applicable à d'autres problèmes de Dynamique, et qui a été le principe de recherches très étendues faites de notre temps sur les systèmes d'équations différentielles. Un autre problème qui procède immédiatement de la théorie de la gravitation est celui qui consiste à déterminer l'attraction d'un solide donné sur un point matériel; Newton le résolut dans le cas d'une sphère homogène. Mais la question se complique beaucoup pour l'ellipsoïde de révolution et l'ellipsoïde à trois axes inégaux. Maclaurin traita complètement le cas de l'ellipsoïde de révolution. Quant à l'attraction de l'ellipsoïde scalène sur un point intérieur ou extérieur à sa surface, il n'y a pas de question qui ait été traitée par autant de méthodes diverses et qui ait donné lieu à des recherches aussi intéressantes.

C'est un problème de Dynamique, celui des cordes vibrantes, qui conduisit Lagrange à la représentation des fonctions par les séries trigonométriques; il faut en rapprocher les développements suivant les fonctions P_n que Legendre obtint dans des recherches relatives à l'attraction d'un ellipsoïde. Les travaux ultérieurs de Laplace sur l'attraction des corps infiniment peu différents de la sphère donnèrent les fonctions de deux variables appelées *fonctions de Laplace*. J'ai parlé des ellipsoïdes; mais la théorie générale de l'attraction est devenue une branche très considérable de la science moderne : elle rappelle les noms de Gauss, de Lejeune-Dirichlet et de Green. Il convient de faire remarquer que cette théorie est maintenant étendue à l'espace à n dimensions. Un autre problème de Mécanique céleste, celui du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, ramené au cas le plus simple, celui d'un corps sur lequel n'agit aucune forme, présente aussi un très grand intérêt mathématique.

Je puis signaler encore quelques questions de pratique ou de Physique liées au développement de la science mathématique. J'ai parlé des deux systèmes de projection employés pour les cartes : la projection stéréographique qui remonte à Ptolémée, et la projection de Mercator, inventée par Eduard Wright vers l'an 1600 : ces deux procédés se rattachent, comme cas particuliers de la projection orthomorphique, à la représentation Géométrique d'une variable imaginaire. J'ai aussi parlé de la perspective et du mode de représentation employé par Monge dans sa Géométrie descriptive. Monge est, comme chacun sait, l'auteur de la théorie géométrique de la courbure des surfaces et des lignes de courbure. Il fut conduit à cette théorie par un problème de terrassements : d'une aire donnée, recouverte partout d'une même épaisseur de terre, charrier la terre et l'étendre sur une autre aire égale, avec les moindres frais de transport. Pour résoudre le problème analogue dans la Géométrie de l'espace, il fut conduit à étudier les normales à une surface qui se rencontrent mutuellement, et arriva ainsi aux lignes de courbure. [Voir son *Mémoire sur les déblais et les rem-*

blais, Mém. de l'Ac. des Sc. (1781)]. Les normales à une surface sont en outre un exemple de droites en nombre doublement infini, et se rattachent ainsi aux théories modernes des congruences et des complexes.

La théorie ondulatoire de la lumière conduisit Fresnel à la surface de l'onde, surface qui est du quatrième ordre, et de beaucoup la plus intéressante des surfaces connues. La propriété géométrique de cette surface, d'admettre des plans tangents qui la touchent tout le long d'un cercle, fournit à Sir W.-R. Hamilton la théorie de la réfraction conique. Les géomètres regardent aujourd'hui la surface de l'onde comme un cas particulier de la surface de Kummer, qui est une surface du quatrième ordre, présentant seize points coniques et admettant seize plans tangents singuliers.

L'insuffisance de mes connaissances, tant en Mathématiques qu'en Physique, m'interdit de vous parler de l'appoint qu'ont apporté à la théorie des équations aux différences partielles la théorie des mouvements tourbillonnaires en Hydrodynamique, ainsi que les grandes théories physiques de la chaleur, de l'électricité, du magnétisme et de l'énergie.

Il est difficile de donner une idée de la vaste étendue de la science mathématique actuelle. Le mot *étendue* ne dit pas assez. J'ai en vue une étendue diversifiée par de riches détails, non pas l'étendue monotone d'une plaine vide, mais un beau paysage, à voir d'abord de loin, mais qu'on a plaisir ensuite à parcourir et à étudier dans chaque détail, montagne et vallée, fleuve, rochers, arbres et fleurs. Mais, comme toute autre beauté, la beauté d'une théorie mathématique se sent, elle ne se démontre pas. Pour ce qui est de l'étendue de la science, je ne puis la faire mieux ressortir qu'en vous rappelant quelques-unes des dates où de grands progrès ont été accomplis dans ses diverses branches.

En ce qui concerne la Géométrie, j'ai déjà parlé de l'invention des coordonnées cartésiennes (1637). Elle donna aux géomètres la série entière des courbes algébriques de degré plus élevé que les coniques : courbes du troisième ordre ou cubiques, du quatrième ordre ou quartiques, et ainsi de suite. Les premières applications qui en furent faites furent l'*Énumération des courbes du troisième ordre* de Newton, et les très intéressantes recherches de Maclaurin sur les points correspondants des cubiques. Ces travaux montrèrent du coup la beauté de la théorie des cubiques et son extension bien plus grande que celle de la théorie des coniques. Rappelons le Mémoire d'Euler *Sur une contradiction apparente dans la théorie des courbes planes* (*Mém. de l'Acad. de Berlin,* 1748), où est signalé ce fait, qu'étant donnés huit des points d'intersection de deux cubiques, le neuvième est entièrement déterminé. Par cette remarque, Euler fit plus que découvrir une propriété fondamentale des cubiques (donnant comme cas particulier celle de l'hexagone de Pascal) : il introduisit dans la Géométrie une notion nouvelle, celle des systèmes de points, ou des systèmes de points communs à deux courbes.

La théorie des polaires réciproques, qui dérive de celle des coniques, conduisit à ce principe général que dans le plan la droite et le point sont deux figures corrélatives : c'est le principe de dualité. C'est sur ce principe que Plücker fonda son grand Ouvrage intitulé *Théorie des courbes algébriques* (Bonn, 1839), dans lequel il établit les relations qui existent entre l'ordre et la classe d'une courbe et le nombre de ses points singuliers et de ses tangentes singulières (les six équations de Plücker). On apprit de lui que la véritable division des courbes repose non sur l'ordre seul, mais conjointement sur l'ordre et la classe, et que les courbes d'un certain ordre et d'une certaine classe se divisent encore en familles d'après leurs singularités. Et ce n'est pas là une subdivision arbitraire; car c'est bien ainsi que se partage effectivement le champ des recherches. Chacune de ces familles de courbes forme un tout, comme l'ensemble des courbes d'un même ordre avait d'abord paru le faire.

La *famille* se compose des courbes du même *genre* (*Geschlecht*, *deficiency*). A raison de ce que j'aurai à dire des fonctions abéliennes, je dois préciser cette notion de genre, qui a été introduite dans la Science par Riemann [*Mémoire sur la théorie des fonctions abéliennes*, 1857 (*Journal de Crelle,* t. LIV)]. Le genre d'une courbe d'ordre n est égal à l'excès du nombre maximum $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ de points doubles que peut avoir une courbe de cet ordre, sur le nombre des points doubles que présente la courbe considérée (les points de rebroussement sont comptés comme points doubles). Ainsi une conique quelconque, une cubique ayant un point double, une quartique ayant trois points doubles sont des courbes du genre zéro. La cubique générale est une courbe du genre 1, et la plus simple du genre; la quartique générale est une courbe du genre 3, et ainsi de suite. On représente ordinairement le genre par la lettre p. Riemann étudia le problème général de la transformation générale d'une courbe plane : l'équation de la courbe étant rendue homogène, on remplace les trois coordonnées respectivement par trois polynômes entiers quelconques homogènes et du même degré par rapport à trois nouvelles coordonnées. La courbe transformée est en général d'un autre ordre que la proposée; elle a son système propre de points doubles; mais son genre reste le même que celui de la proposée. C'est pour cela que Riemann rapproche comme formant un seul groupe toutes les courbes d'un même genre p. Il ne faudrait pas croire que toutes les courbes d'un même groupe puissent ainsi se transformer les unes dans les autres; car on a démontré qu'une courbe quelconque d'un tel groupe dépend, si c'est une cubique, d'un seul paramètre, et, si son genre p est supérieur à l'unité, de $3p - 3$ paramètres.

La géométrie de l'espace est un sujet beaucoup plus vaste que la géométrie du plan. Les théories y sont plus nombreuses et plus étendues. Cette différence ne tient pas au nombre des dimensions des espaces considérés, ou, ce qui revient au même, au nombre des figures élémentaires (dans le plan, le point et la droite; dans l'espace, le point, la droite et le plan). Elle procède d'une raison beaucoup plus élevée. Ce serait mal poser la question que de dire : la géométrie du plan a les courbes, la géométrie de l'espace a les courbes et les surfaces. Pour établir la comparaison, il faut faire une énumération plus complète. Dans la géométrie du plan, nous avons les courbes qu'on peut regarder comme des systèmes simplement infinis de points, et aussi comme des systèmes simplement infinis de droites. Dans la géométrie de l'espace, nous avons d'abord ce qui à un point de vue est une courbe, et à un autre point de vue une surface développable; c'est là ce qu'on peut considérer comme un système simplement infini de points, de droites et de plans. Nous avons ensuite la surface, qu'on peut regarder comme un système doublement infini de points, de droites ou de plans, et aussi comme un certain système triplement infini de droites (en effet, les droites tangentes à une surface forment un complexe spécial); comme cas particulier des systèmes simplement infinis, il y a les courbes planes et les cônes; comme cas particulier des surfaces, les surfaces réglées, qui sont des systèmes simplement infinis de droites. Enfin, nous avons encore la congruence ou système doublement infini de droites, et le complexe ou système simplement infini de droites. Mais, même en ne considérant dans la géométrie de l'espace que les courbes et les surfaces, il y a une quantité de théories qui ont à peine leurs analogues dans la géométrie du plan. Les relations d'une courbe avec les diverses surfaces qui peuvent passer par cette courbe ou d'une surface avec les diverses courbes qu'on peut y tracer, diffèrent quant à la nature de celles qui leur correspondent le plus exactement dans le plan, savoir la relation d'un système de points avec les courbes qui peuvent passer par ces points, ou la relation d'une courbe avec ses points. En particulier, la géométrie du plan n'offre rien qui corresponde aux lignes de courbure d'une surface. A cet unique théorème que la ligne droite est la plus courte distance entre deux points, correspondent dans la géométrie de l'espace deux théories importantes et difficiles, celle des lignes géodésiques et celle des surfaces d'aire minima dans un périmètre donné. Autre exemple : dans la géométrie de l'espace se présente cette question intéressante et délicate : représenter une courbe gauche par deux équations. Une courbe gauche quelconque ne peut pas en général être représentée entièrement et exclusivement par deux équations homogènes à quatre variables : il faut pour cela que cette courbe forme à elle seule l'intersection complète de deux surfaces. Sur cette question, qui revient à la classification des courbes de l'espace, nous mentionnerons trois Mémoires très récents de Nöther, Halphen et Valentiner.

Dans la géométrie de l'espace à n dimensions, on n'a étudié encore que des questions isolées : c'est que le champ est trop vaste. La comparaison des deux géométries du plan et de l'espace montre de reste ce que chaque dimension ajoutée à l'espace qu'on étudie ajoute de complication et de difficulté à la théorie.

Dans l'analyse transcendante ou théorie des fonctions, nous avons tout ce qui a été fait dans ce siècle sur la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire par Gauss, Cauchy, Puiseux, Briot, Bouquet, Liouville, Fuchs, Weierstrass et d'autres encore. C'est à Gauss qu'est due l'idée fondamentale de représenter géométriquement la variable imaginaire $x + iy$ par le point qui a pour coordonnées x et y. J'ai déjà donné quelques détails sur ce sujet. Le même principe a été appliqué aux équations différentielles. Dans les idées modernes, ce qu'on se propose quand une équation différentielle est donnée, c'est moins de la ramener aux quadratures que d'en déduire la marche des intégrales pour toutes les positions du point figuratif de la variable indépendante. En particulier, l'équation différentielle du second ordre qui conduit à la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ a été étudiée de la sorte et a donné des résultats du plus haut intérêt : la fonction, ainsi déterminée pour toutes les valeurs des paramètres α, β, γ, devient alors une fonction connue. Je signalerai encore ici une nouvelle notion qui a été introduite par M. Weierstrass dans cette partie de l'Analyse : c'est la notion de la fonction uniforme et entière ; une telle fonction est définie par une série convergente dans tout le plan et procédant suivant les puissances croissantes soit de la variable x, soit de $\frac{1}{x-c}$; elle admet comme unique point singulier essentiel soit le point $x = \infty$, soit le point $x = c$. Le Mémoire de M. Weierstrass a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, en 1876 (¹).

Mais, outre la théorie générale, j'ai à vous parler des diverses fonctions particulières auxquelles la théorie a été appliquée, en un mot des diverses fonctions actuellement connues.

Pendant longtemps les seules fonctions transcendantes connues ont été les fonctions circulaires sinus, cosinus, etc., les logarithmes hyperboliques ou de base e, seuls usités dans l'Analyse, et la fonction exponentielle e^x qui en dépend. Pour être plus complet, je dirai qu'on avait les fonctions circulaires directes et inverses, la fonction exponentielle et son inverse, la fonction logarithmique.

Je laisserai de côté l'importante intégrale eulérienne de seconde espèce ou fonction gamma, qui a donné lieu tout récemment à de très intéressants travaux, et je ne parlerai pas non plus des autres fonctions particulières dont l'importance est moindre. J'arrive à

(¹) Il a été traduit par M. Picard, dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*; 1879.

un groupe considérable formé par les fonctions elliptiques et la fonction Θ à une seule variable (1811-1829). Je choisis ainsi mes dates, pour qu'elles comprennent les deux Ouvrages dogmatiques de Legendre, les *Exercices de Calcul intégral* (1811-1816) et la *Théorie des fonctions elliptiques* (1825-1828), ainsi que les *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* de Jacobi (1829). N'oublions pas que beaucoup des résultats de Jacobi ont été obtenus en même temps par Abel. Legendre, il faut le remarquer, prenait pour point de départ les intégrales dépendant d'un radical $\sqrt{X}$, portant sur un polynôme du quatrième degré en x; il substituait à $\sqrt{X}$ un radical $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$ et il arrivait à ses trois espèces d'intégrales elliptiques, $F(\varphi)$, $E(\varphi)$, $\Pi(\varphi)$: les deux premières intégrales dépendent de φ, qui est l'argument ou l'amplitude, et du module k; la troisième dépend en outre d'un paramètre n. Mais la fonction $F(\varphi)$ est à proprement parler une fonction inverse : au lieu de cette fonction, Abel et Jacobi considérèrent chacun de leur côté les fonctions directes, correspondant au sinus et cosinus de la Trigonométrie : Abel les appelait φ, f, F et Jacobi les représentait par les symboles sinam, cosam, Δam, ou, comme on écrit souvent aussi, sn, cn, dn. En outre, Jacobi, en développant sa théorie de la transformation, obtint une multitude de formules où figure la fonction q (fonction transcendante du module k définie par l'équation $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$), et il fut ainsi conduit à considérer les deux nouvelles fonctions H et Θ. Ce sont ces deux fonctions qui, prises chacune séparément avec deux arguments distincts, donnent lieu aux quatre fonctions que Jacobi désigne aussi par Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, et qu'on appelle les *fonctions thêta*, ou, pour éviter toute confusion, les *fonctions thêta d'une variable*. Enfin Jacobi, grâce à la transformation $\sin\varphi = \operatorname{sinam} u$, exprima les fonctions de deuxième et de troisième espèce de Legendre au moyen de deux intégrales Z et Π qui dépendent de la nouvelle variable u, et il les rattacha à ses fonctions H et Θ; quant aux fonctions elliptiques sn, cn, dn, elles s'expriment aussi au moyen des fonctions de Jacobi : ce sont les rapports des trois fonctions Θ_1, Θ_2, Θ_3 à la fonction Θ_4.

Il convient de mentionner ici des recherches publiées par M. Hermite en 1858. Introduisant à la place de q la nouvelle variable ω définie par l'équation $q = e^{i\pi\omega}$, en sorte que l'on a $\omega = i\frac{K'}{K}$, M. Hermite fut conduit à considérer les trois fonctions $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$, qui représentent les valeurs de $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ et $\sqrt[12]{kk'}$, considérées comme fonctions de ω. Dans un remarquable travail, interrompu par la mort, le professeur Smith traite la fonction thêta pour l'argument zéro comme une fonction de ω : c'est ce qu'il appelle *fonction oméga,* et les trois fonctions $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ sont ses *fonctions modulaires.*

Les fonctions elliptiques proprement dites sn, cn, dn forment un système analogue aux fonctions circulaires sinus et cosinus (à vrai dire sn est un sinus, cn et dn sont deux sortes de cosinus) : elles ont leur théorème d'addition qui consiste en ce que sn $(x+y)$, cn $(x+y)$, dn $(x+y)$ s'expriment rationnellement en fonction de sn$x$, cn$x$, dn$x$ et de sn$y$, cn$y$, dn$y$. En fait, les fonctions elliptiques se réduisent aux fonctions circulaires dans le cas particulier de $k = 0$. Mais il y a une différence importante de forme entre les deux théorèmes d'addition. Les fonctions elliptiques de l'argument $x+y$ sont des fractions, et ces fractions ont même dénominateur. C'est là une raison pour regarder les trois fonctions elliptiques comme les quotients de quatre fonctions A, B, C, D, dont les valeurs elles-mêmes sont et restent indéterminées (de fait, les fonctions sn, cn, dn sont les quotients des trois fonctions Θ_1, Θ_2, Θ_3 par Θ_4 ; mais c'est là un résultat subséquent qu'on ne peut nullement déduire du théorème d'addition, et sur lequel nous ne pouvons insister en ce moment : notre remarque est faite en vue de ce qui va suivre, relativement aux fonctions abéliennes). En outre, les fonctions sn, cn, dn donnent lieu, ce que ne font pas les fonctions circulaires, à toute une théorie de transformations, dont l'ordre est un entier quelconque premier ou composé : cette théorie comprend celle des équations modulaires et des équations aux multiplicateurs, et elle se développe dans diverses directions pour se rattacher à la Géométrie, à la théorie des équations et à la théorie des nombres. Abstraction faite des fonctions Θ la théorie des fonctions sn, cn, dn forme encore un ensemble très considérable.

Je fais dater les fonctions abéliennes de la période comprise entre 1826 et 1832. Abel a donné au théorème qui porte son nom diverses formes dont la plus générale est celle qu'on trouve dans son *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* (1826), qui avait été présenté à l'Académie des Sciences de Paris, et qui fut couronné un an après la mort de l'auteur. C'est une proposition de Calcul intégral, relative aux intégrales qui dépendent de la fonction y de x définie par une équation algébrique quelconque $F(x,y)=0$. D'après ce théorème, la somme d'un nombre quelconque d'intégrales de cette nature peut s'exprimer par la somme d'un nombre déterminé p d'intégrales de même nature, et le nombre p dépend de la forme de l'équation $F(x,y)=0$, qui définit l'irrationnelle y comme fonction de x (pour préciser, ce nombre p n'est autre chose que le genre de la courbe représentée par cette équation, mais nous avons déjà dit que la notion de genre date seulement de 1857). En appliquant ce théorème au cas où y est la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, on retrouve le théorème de Legendre sur les intégrales elliptiques $F(\varphi)+F(\psi)$ exprimées au moyen d'une seule intégrale $F(\mu)$, théorème qui est sans relation avec les fonctions elliptiques sn, cn, dn. Pour plus de clarté, je rappellerai que les intégrales abéliennes, relatives au cas particulier où y est la racine carrée d'un polynôme entier en x de degré supérieur à 4, sont appelées *intégrales hyperelliptiques*; si le polynôme soumis au radical est du cinquième ou du sixième degré, on a une intégrale du second genre ($p=2$); s'il est du septième ou du huitième degré, l'intégrale est du troisième genre ($p=3$), et ainsi de suite. L'intégrale abélienne la plus générale du genre 2 est une intégrale hyperelliptique : mais, si le genre est égal ou supérieur à 3, les intégrales hyperelliptiques ne sont plus qu'un cas particulier des intégrales abéliennes du même genre. Après Abel, le premier pas fut fait par Jacobi dans un Mémoire court, mais très important, intitulé *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis* (*Journal de Crelle,* t. 9, 1832). Jacobi se borne aux intégrales hyperelliptiques de genre quelconque p, mais son résultat est général : il consiste en ce que les fonctions hyperelliptiques directes que concerne le théorème d'Abel ne sont plus des fonctions d'une seule variable comme les fonctions elliptiques sn, cn, dn, mais des fonctions de p variables. Ainsi, dans le cas de $p=2$ spécialement considéré par Jacobi, le théorème d'Abel concerne deux fonctions de deux variables chacune $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$ et donne effectivement l'addition de ces fonctions en fournissant l'expression algébrique de $\lambda(u+u', v+v')$ et de $\lambda_1(u+u', v+v')$ au moyen de $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, $\lambda(u', v')$, et $\lambda_1(u', v')$.

Il importe de remarquer que le théorème d'Abel ne donne pas directement (et Jacobi ne l'affirme pas non plus) le théorème d'addition sous sa forme définitive. Considérons le cas de $p=1$: il résulte du théorème d'Abel que la fonction $\lambda(u)$ est telle que $\lambda(u+v)$ s'exprime algébriquement en fonction de $\lambda(u)$ et de $\lambda(v)$. On est donc parfaitement en droit de dire que $\operatorname{sn}(u+v)$, $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{sn} v$ sont liés par une équation algébrique; mais cette équation contient les quatre radicaux $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}$, $\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}$, $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 v}$, $\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v}$. Le théorème ne donne donc pas les trois fonctions sn, cn, dn de l'argument $u+v$ en fonction rationnelle de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, et même ne prouve aucunement que ces fonctions puissent s'exprimer de la sorte. Dans le cas de $p=1$, le vrai nombre des fonctions abéliennes d'une seule variable chacune est trois; mais les trois fonctions sn, cn, dn doivent être considérées comme les rapports de quatre fonctions. Ainsi, en général, le vrai nombre des fonctions abéliennes de p variables chacune est 4^p-1, et elles peuvent être considérées comme les rapports de 4^p fonctions. Malgré la remarque faite, on peut dire que la notion de fonctions abéliennes à p variables a été fournie, ainsi que le théorème d'addition de ces fonctions, par les Mémoires que nous venons de rappeler (Abel, 1826; Jacobi, 1832).

Nous avons encore à citer, relativement au cas de $p=2$ (fonctions hyperelliptiques), deux Mémoires extrêmement remarquables : l'un, de Göpel, intitulé *Theoriæ transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis* (*Journal de Crelle,* t. XXXV, 1847); l'autre, de Rosenhain (1846), est le *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe,* Paris, 1851 (*Mém. des sav. étrangers*, t. XI). Les deux auteurs, généralisant la fonction thêta d'une variable, considèrent des fonctions analogues à deux variables et y rattachent la théorie des fonctions abéliennes de deux variables. On peut remarquer que les fonctions thêta sont certainement plus simples que les fonctions abéliennes.

Nous laisserons de côté quelques Mémoires de M. Weierstrass relatifs à la théorie générale des intégrales hyperelliptiques de genre quelconque, pour arriver à Riemann, qui mourut en 1866, à l'âge de quarante ans : ses œuvres complètes ont été publiées à Leipzig en 1876. Nous avons déjà mentionné incidemment son grand Mémoire sur les fonctions abéliennes et les fonctions thêta [*Theorie der Abel'schen Functionen* (*J. de Crelle*, t. LIV, 1857)]. A ce travail se rattache étroitement la dissertation inaugurale de Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen Complexen-Grosse* (Göttingue, 1851). La méthode que Riemann applique aux fonctions abéliennes et sa théorie préliminaire des fonctions thêta de plusieurs variables sont fondées sur les principes généraux de la théorie des fonctions de la variable complexe $x + iy$; et c'est ce qui me décide à vous dire quelques mots de la marche qu'il a suivie.

Riemann part des intégrales abéliennes les plus générales, et, considérant les fonctions inverses de ces intégrales, c'est-à-dire les fonctions abéliennes de p variables, il définit la fonction thêta de p variables comme la somme d'une série p fois infinie d'exponentielles et dont le terme général dépend de p variables; puis il montre que les fonctions abéliennes sont liées algébriquement aux fonctions thêta des mêmes arguments. La théorie est présentée de la façon la plus sommaire. Ainsi, à l'égard des fonctions thêta, Riemann ne mentionne même pas les 4^p fonctions qui s'en déduisent, et il ne donne aucune indication sur la forme des relations algébriques entre les fonctions thêta et les fonctions abéliennes.

Le commencement du siècle fait époque dans la théorie des équations. Le XVIII^e siècle allait finir quand Lagrange publia son *Traité des équations numériques*, dont la première édition est de 1798 : les notes de ce Traité contiennent tout ce qu'on savait alors sur les équations. Notre siècle commençait à peine quand parurent les *Disquisitiones arithmeticæ* (1801) : dans ce grand Ouvrage, Gauss expose sa théorie des équations binômes $x^n - 1 = 0$, de degré premier. Supprimant le facteur $x - 1$, on obtient une équation du degré $n - 1$, décomposable en plusieurs autres dont les degrés sont les facteurs premiers de $n - 1$. Gauss fut conduit, entre autres résultats remarquables, à cette proposition de Géométrie que les polygones réguliers de 17 et de 257 côtés se construisent rien qu'avec la règle et le compas.

Après Gauss vint Abel, dont les travaux parurent entre 1826 et 1829. On lui doit la preuve de l'impossibilité de résoudre l'équation du cinquième degré au moyen de radicaux; plus, de très importantes recherches sur le problème général de la résolution algébrique des équations, enfin la théorie de toute une classse d'équations auxquelles on a donné son nom. Abel appliqua ses méthodes à deux questions bien distinctes : diviser l'argument et diviser les périodes des fonctions elliptiques, ainsi qu'au problème particulièrement intéressant de la lemniscate. Mais c'est Galois (né en 1811, tué en duel en 1832) qui établit la théorie la plus complète de la résolution algébrique des équations. Pour son objet, il inventa les groupes de substitution. C'est encore à Galois que sont dus les résultats les plus remarquables touchant une classe d'équations, les équations modulaires. qui se présentent aussi dans la théorie des fonctions elliptiques. En 1835, Jerrard donna sa transformation de l'équation générale du cinquième degré. En 1870 a paru un Ouvrage approfondi de M. Jordan, le *Traité des substitutions et des équations algébriques;* il suffit de jeter un coup d'œil sur la table des matières de ce Traité pour reconnaître l'immense extension prise, comme je vous le disais, par cette branche des Mathématiques.

La théorie des nombres a été représentée au commencement du siècle par l'Ouvrage de Legendre (*Théorie des nombres*, 1re édition, 1798), que suivirent de près les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss (1801). Les *Disquisitiones* contiennent une théorie des nombres réels. On y voit apparaître la notion de congruence ; on y trouve une démonstration de la loi de réciprocité des résidus quadratiques, ainsi que la théorie complète des formes quadratiques binaires à déterminant positif et à déterminant négatif, avec la première théorie de la composition de ces formes. Gauss donne aussi un commencement de théorie des formes quadratiques ternaires et une théorie à laquelle nous avons déjà fait allusion : je veux dire la résolution de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$. Il étudie les racines ou périodes de racines dont se composent les irrationnelles qui servent d'unités dans des théories difficiles, fort travaillées depuis. Ainsi l'imaginaire i de l'analyse élémentaire se présente comme une racine de l'équation $x^4 - 1 = 0$. C'est Gauss qui reconnut le premier la nécessité, pour étudier des quantités réelles (les résidus biquadratiques), de faire usage des nombres complexes mentionnés plus haut : leur forme générale est $a + bi$, a et b étant des entiers positifs ou négatifs, sans exclure zéro. Les propriétés de ces nombres complexes ont fait l'objet des recherches de Lejeune-Dirichlet, et il existe maintenant une théorie complète de ces nombres, qui correspond élément par élément à la théorie plus ancienne des nombres réels. Elle a ses nombres premiers, ses congruences, ses résidus, sa loi de réciprocité, ses formes quadratiques, etc. Mais elle présente plus de variété et de complication; les démonstrations y sont plus laborieuses. Au lieu de l'équation $x^4 - 1 = 0$, on peut considérer l'équation $x^3 - 1 = 0$, et étudier les nombres complexes $a + b\rho$ composés avec une racine cubique imaginaire de l'unité. C'est là encore une nouvelle théorie, spécialement étudiée par Eisenstein, et qui correspond à celle des nombres $a + bi$, sans se confondre avec elle. C'est Kummer qui a abordé le premier le cas général où l'exposant n est un nombre premier quelconque : ici interviennent, au lieu des racines elles-mêmes, les périodes de racines. Ainsi, $n - 1$ étant égal à ef, si l'on désigne par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_e$ les e périodes dont chacune est la somme de f racines de l'équation $x^n - 1 = 0$, on aura à considérer de nouveaux nombres complexes de la forme $a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_e\eta_e$ ($a_1, a_2, \ldots, a_e$ étant des entiers positifs ou négatifs sans exclure zéro). Comme cas particulier, on peut supposer $f = 1$, et la théorie des périodes contient celle des racines elles-mêmes. C'est là une nouvelle théorie très générale qui comprend les entiers complexes $a + bi$ et $a + b\rho$. Mais ici se présente une particularité remarquable. Les nombres premiers parmi les nombres complexes $a + bi$ et $a + b\rho$ jouissent des mêmes propriétés que les nombres premiers réels. Ainsi un nombre non premier n'est décomposable que d'une seule manière en un produit de facteurs premiers; les puissances d'un nombre premier n'admettent d'autres diviseurs que des puissances moindres de ce même nombre : par exemple, si p est premier, p^3 ne peut être égal à un produit de deux facteurs A et B (en excluant la décomposition évidente $p^3 = p.p^2$). Dans le cas général des nombres complexes de la forme $a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_e\eta_e$, il n'en est plus ainsi; mais l'exception ne se présente que pour des valeurs de n égales ou supérieures à 23. Parmi les nombres composés avec les racines vingt-troisièmes de l'unité, il existe des nombres premiers p pour lesquels on a $p^3 = AB$. Pour expliquer ce fait, il faut recourir à la notion des nombres idéaux : un nombre premier p ne peut, d'après sa définition, être le produit de deux nombres effectifs; mais, dans l'exemple ci-dessus, le nombre p est le produit de deux nombres idéaux ayant respectivement pour cubes les deux nombres effectifs A et B, et c'est ainsi qu'on a $p^3 = AB$. Telle est, ce me semble, la voie la plus facile à suivre pour acquérir la notion des nombres idéaux. Quant à la manière de traiter ces nombres, c'est chose beaucoup plus difficile. (*Voir* le grand Mémoire de Kummer inséré dans le *Journal de Crelle*, t. XXXV, 1847, et intitulé : *Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten Complexen-Zahlen in ihre Primfactoren.*) Un nombre idéal se révèle, sans jamais être isolé, dans les propriétés du nombre premier dont il est un facteur, et cela abstraction faite du théorème subséquent d'après lequel il y a toujours des puissances d'un nombre idéal qui sont des entiers actuels. Dans les derniers développements que la théorie des nombres a reçus de Dedekind ([1]), les irrationnelles prises pour unités sont les racines des équations irréductibles qui ont pour coefficients des entiers positifs ou négatifs, celui de la plus haute puissance de x étant l'unité. Alors se pose cette question : quels seront les analogues des nombres entiers? Dans le cas très simple de l'équation $x^2 + 3 = 0$, on prendra pour un entier l'expression $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ dont la forme semble fractionnaire et qui a pour cube l'unité : c'est le symbole ρ dans la théorie d'Eisenstein. Enfin il faut mentionner une théorie des nombres complexes qui est, à ce qu'il semble, entièrement distincte des théories précédentes : c'est la théorie des imaginaires de congruence établie par Galois. On appelle ainsi les nombres imaginaires qui vérifient une congruence sans solutions réelles. La congruence $x^2 - 2 \equiv 0 \pmod{5}$ par exemple n'a aucune racine réelle; mais prenons pour solution une imaginaire i, l'autre solution sera $-i$; et nous aurons à considérer le système des nombres complexes $a + bi \pmod{5}$, c'est-à-dire les 5^2 nombres obtenus en attribuant successivement à chacun des deux coefficients a et b les cinq valeurs $0, 1, 2, 3, 4$. De même et plus généralement, considérons la congruence $F(x) \equiv 0$ d'ordre n et de module p (p étant un nombre premier quelconque), et désignons par i une racine imaginaire de cette congruence. On en déduit le système des nombres complexes $a + bi + ci^2 + \ldots + ki^{n-1}$,

([1]) *Sur la théorie des nombres entiers algébriques* (*Bulletin*, 1re série, t. XI, et 2e série, t. II).

les coefficients $a, b, \ldots, k$ ayant l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

En ce qui concerne la théorie des formes réelles, nous signalerons, en dehors des formes quadratiques binaires et ternaires, qui ont été étudiées très complètement, les formes quadratiques à quatre et à plusieurs variables, auxquelles se rattache comme cas très particulier la décomposition d'un nombre en quatre carrés ou en n carrés. On a fait aussi des recherches sur les formes binaires, cubiques et biquadratiques, et sur les formes cubiques ternaires. Les formes quadratiques binaires ont été étudiées à propos des entiers complexes $a+bi$.

Un sujet qui semble isolé dans la théorie des nombres, le théorème de Fermat sur l'impossibilité de la relation $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ pour $\lambda > 3$, a donné lieu à des recherches du plus grand intérêt, mais de la plus grande difficulté.

En dehors de nos Mathématiques ordinaires, il existe quelques théories que je ne puis passer sous silence : ce sont des théories qui confinent à l'Algèbre, à la Géométrie, à la logique. Ici comme en maint autre endroit, il est difficile de tracer une ligne de démarcation. Dans les Mathématiques ordinaires, nous employons des symboles qui ne représentent pas des nombres, que nous combinons néanmoins par voie d'addition et de multiplication, et qui peuvent ne pas obéir à la loi de commutativité $ab = ba$: c'est ce qui a lieu ou peut avoir lieu en particulier pour les symboles d'opération. On ne peut pas dire que la théorie de tels symboles n'intéresse pas l'Algèbre ordinaire. Mais je place en dehors des Mathématiques ordinaires le système d'Algèbre multiple ou d'Algèbre associative linéaire, développé dans le remarquable Mémoire de feu Benjamin Peirce, intitulé *Algèbre associative linéaire* (1870), et réimprimé en 1881 dans l'*American Journal of Mathematics* (t. IV) avec des notes et additions de C.-S. Peirce fils. L'auteur considère des symboles A, B, ..., qui sont des fonctions linéaires d'un certain nombre de lettres ou unités $i, j, k, l, \ldots$, ayant pour coefficients des expressions algébriques ordinaires, réelles ou imaginaires, c'est-à-dire de la forme générale $x + y\sqrt{-1}$. Les lettres $i, j, \ldots$ sont telles que tout produit de deux d'entre elles $i^2, ij, ji, \ldots$ (ij n'étant pas généralement égal à ji) est égal à une fonction linéaire de ces lettres; mais elles obéissent à la loi d'associativité. Un produit de trois lettres est défini par l'égalité $ij.k = i.jk$ de sorte qu'il n'existe qu'un seul et unique produit de trois ou plusieurs lettres, ou ce qui revient au même, les lois de combinaison des unités i, j, k sont définies par une table de multiplication donnant les valeurs de $i^2, ij, ji, \ldots$. Les unités primitivement considérées peuvent être remplacées par des fonctions linéaires de ces unités, de manière à donner lieu, pour les unités définitivement adoptées, à une table de multiplication de la forme la plus simple. On remarquera combien de fois on y rencontre des symboles de nullité ou d'équivalence (*nil potent or idem potent*) $i^2 = 0$ ou $i^2 = i$ et des symboles i, j tels que $ij = ji = 0$, et quelle simplicité en résulte pour les tables de multiplication qui définissent les divers systèmes.

J'ai parlé de cette algèbre multiple avant de signaler diverses théories géométriques de date plus ancienne, parce que je considère l'algèbre de Peirce comme étant le vrai fondement, le principe analytique de ces théories. On ne peut chercher à réaliser directement les notions d'addition ou de multiplication des segments, des aires, des relations, des forces et autres grandeurs géométriques, cinématiques ou mécaniques. Il convient de formuler comme il suit leur théorie générale. On considère chacune de ces grandeurs comme déterminée par les paramètres a, b, c, qui la définissent (par exemple, s'il s'agit d'un segment de droite donné en grandeur et en position, ces paramètres seront la longueur du segment, les coordonnées de son origine et les cosinus de la direction qui va de son origine à son extrémité); on représente cette grandeur par une fonction linéaire $ai + bj + ck + \ldots$ forméeavec une série donnée d'unités i, j, k, ayant pour coefficients les paramètres a, b, c. Inversement une telle fonction linéaire représente une grandeur de l'espèce en question. Deux grandeurs données de même espèce sont représentées par deux fonctions linéaires : la somme des deux fonctions linéaires est une pareille fonction linéaire et représente une troisième grandeur de même espèce que les deux premières et que nous pouvons regarder comme leur somme; le produit de ces deux fonctions linéaires (effectué dans un ordre déterminé s'il n'est pas commutatif) représente une grandeur de même espèce qu'on peut regarder comme le produit (effectué dans le même ordre) des deux premières grandeurs. Ainsi est établie la notion de la somme de deux grandeurs et de leur produit effectué dans un ordre déterminé, s'il n'est pas commutatif. La valeur de la théorie relativement à chaque ordre de grandeur dépendra du système des unités qu'on choisira et des lois de leur combinaison, qu'on devra établir de telle manière que les sommes et les produits de ces grandeurs aient une signification géométrique, cinématique ou mécanique.

Parmi les théories géométriques qui nous occupent, il y a la théorie d'Argand, de Warren et de Peacock sur les imaginaires en Géométrie plane; la très remarquable et très importante théorie des quaternions de Sir W.-R. Hamilton; les théories développées dans l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann (1841 et 1862); la théorie des biquaternions de Clifford, et l'extension récente de la théorie de Grassmann à l'espace non euclidien, extension due à Homersham-Cox. Ces diverses théories ont naturellement été développées, non pas en partant du point de vue d'où je viens de les considérer, mais des points de vue spéciaux de leurs auteurs.

Les symboles littéraux $x, y, \ldots$ employés par Boole dans ses *Laws of thought* (1854) pour représenter les choses comme objets de nos conceptions, sont des symboles qui obéissent aux lois du calcul algébrique (lois de distributivité, de commutativité et d'associativité), mais de plus ils sont tels qu'on a pour l'un quelconque d'entre eux, x par exemple, $x - x^2 = 0$, cette équation n'impliquant pas, comme dans l'Algèbre ordinaire, que x soit nul ou égal à 1. Dans la dernière Partie de l'Ouvrage de Boole sur la théorie des probabilités, on voit difficilement la signification précise des symboles employés; et la théorie remarquable qui y est développée me semble avoir été laissée dans l'oubli, sans qu'on l'ait suffisamment discutée. Dans un autre essai intitulé *On Propositions numerically definite*, le même auteur se place encore sur les confins de la logique et des mathématiques. Je ne puis ici parler des autres systèmes de logique mathématique; mais je mentionnerai l'*Algebra of Logic* (*American Journal of Math.*, t. III), où M. C.-S. Peirce établit une notation pour les *termes relatifs* qui se rattachent aux systèmes d'unités de l'algèbre associative linéaire.

On peut aussi rattacher à la logique l'*Abzählende Geometrie* de Schubert (1878). Mais c'est une théorie essentiellement mathématique et de la plus grande importance. Elle traite ce problème général: combien y a-t-il de courbes ou de figures d'espèce donnée qui satisfassent à certaines conditions? Par exemple, combien y a-t-il de coniques tangentes à quatre coniques données? Ces sortes de questions, restreintes aux coniques, ont été étudiées d'abord par Chasles, à qui on doit la belle théorie des caractéristiques μ et ν des coniques satisfaisant à quatre conditions. MM. Maillard et Zeuthen se sont occupés des mêmes questions relativement aux cubiques ou aux quartiques. Enfin l'Ouvrage de Schubert présente un corps de doctrine très étendu. Il faut remarquer que les symboles de Schubert sont primitivement, non pas des nombres, mais des symboles purement logiques : par exemple, la lettre g exprime la condition qu'une ligne doit couper une ligne donnée ; g^2 exprime qu'elle doit couper deux lignes données, et ainsi du reste. Puis l'auteur combine ces symboles conformément aux lois du calcul algébrique; mais ils n'acquièrent un sens numérique que quand le nombre des conditions devient égal au nombre des paramètres qui déterminent la figure considérée.

Dans tout ce que je viens de dire des théories en dehors des Mathématiques ordinaires, je n'ai eu en vue que l'immense extension des Mathématiques actuelles. Pour conclure, je constate que les Mathématiques ont constamment progressé depuis les géomètres grecs. Rien ne s'est perdu, rien n'a périclité. Les chefs-d'œuvre d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius sont aussi admirables aujourd'hui qu'ils l'étaient du temps de leurs auteurs. La méthode des coordonnées de Descartes est une acquisition définitive. Mais jamais les Mathématiques n'ont été cultivées avec plus de zèle et d'ardeur, ni avec plus de succès que dans ce siècle et que dans sa seconde moitié, c'est-à-dire de nos jours. D'immenses progrès ont été réalisés ; devant nous s'ouvre un champ illimité, et l'avenir est plein de promesses. Nous pouvons en toute confiance appliquer à notre science les vers du poète :

> Yet I doubt not through the ages one increasing purpose runs,
> And the thoughts of men are widened with the process of the suns (1).

(1) Je ne doute pas qu'à travers les âges s'accomplisse un dessein de progrès,
Et que les pensées des hommes grandissent avec le cours des soleils.