Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Paul Tannery

Questions héroniennes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 359-376

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_359_1>

MÉLANGES.

QUESTIONS HÉRONIENNES

PAR M. PAUL TANNERY.

III.

Je reviens maintenant à la question de l'extraction des racines incommensurables chez les anciens, pour présenter quelques remarques qui m'ont été suggérées par la lecture des travaux récemment publiés sur cette question.

Dans mon essai *Sur la mesure du cercle d'Archimède* (1), j'ai proposé la restitution de la méthode d'invention qui m'a paru la plus naturelle et la plus conforme à l'ordre d'idées historiquement établi pour la solution de l'équation de Pell. Mais je tiens à bien constater que, abstraction faite des Hindous, il n'y a aucune preuve positive que cette solution ait été connue avant Fermat.

Le seul indice grave que nous possédions pour une découverte antérieure de cette solution consiste, en effet, dans le fameux *problème des bœufs* attribué à Archimède, et dont l'authenticité reste sujette à caution; si l'on écarte ce problème, le choix de certaines valeurs approximatives de $\sqrt{3}$ fait par Archimède dans sa *Mesure du cercle*, est entièrement insuffisant pour attribuer au géomètre de Syracuse la connaissance de la solution de l'équation de Pell.

On peut de même rencontrer, bien avant Fermat, d'autres valeurs approximatives de racines incommensurables correspondant à des solutions particulières d'équations de Pell, mais il ne peut être permis d'en conclure la connaissance d'une solution théorique, car ces solutions particulières peuvent avoir été obtenues par tel ou tel procédé d'approximation dans l'extraction de la racine.

Le procédé qui me paraît devoir être essayé de préférence est celui que M. Günther (2) a développé comme lui ayant été proposé par M. Radicke, dans une correspondance particulière. J'avais d'ailleurs déjà posé, dans l'essai que je viens de rappeler, le principe de ce procédé que je désignerai par R, par opposition au principe que j'indiquerai par la lettre T, et qui est celui que j'ai proposé comme représentant le mode de calcul employé dans l'École héronienne.

Pour bien faire comprendre en quoi diffèrent ces deux procédés, je ferai tout d'abord remarquer qu'ils peuvent être considérés comme exclusivement arithmétiques et uniquement fondés tous deux en principe, comme notre méthode vulgaire, sur l'ap-

---

(1) *Mémoire de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV_2, p. 313-337.

(2) *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* dans les *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, IV.

proximation

$$\sqrt{A} \backsim a + \frac{r}{2a},$$

si l'on a

$$A = a^2 + r\ (^1).$$

Les deux procédés supposent également la détermination successive de *quantièmes* dans une suite que je représenterai par

$$\frac{x_n}{y_n} = E + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \ldots + \frac{1}{d_n},$$

les lettres étant supposées représenter des nombres entiers et x_n et y_n étant premiers entre eux.

En particulier, dans cette notation :

$$x_0 = E, \qquad y_0 = 1,$$
$$x_1 = E d_1 + 1, \quad y_1 = d_1.$$

J'ai sans doute à peine besoin de faire remarquer que la réduction au même dénominateur, que je suppose par la notation $\frac{x_n}{y_n}$, devait être chez les anciens évitée généralement comme essentiellement contraire au principe même du mode de représentation suivi pour les fractions; mais, dans la suite des temps, lorsque ce mode a été abandonné, cette réduction est, au contraire, devenue de règle.

Si l'on suppose déterminés successivement n dénominateurs, il s'agit d'obtenir le suivant, d_{n+1}.

Soit posé $\frac{x_n}{y_n} = a$, le reste r de l'extraction de la racine sera nécessairement de la forme $\frac{R_n}{y_n^2}$, et le terme complémentaire de l'approximation est

$$\frac{r}{2a} = \frac{R_n}{2x_n y_n}.$$

Au lieu de déterminer d_{n+1}, les héroniens pouvaient d'ailleurs :

1° Soit développer le terme complémentaire en une suite de *quantièmes* suivant les procédés propres à ce genre de développement, et pour l'étude desquels j'ai réuni plus haut l'ensemble des matériaux fournis par la collection héronienne;

---

(1) Je représente, avec MM. Cantor et Gunther, l'égalité approximative par le signe $\backsim$.

2° Soit limiter ce développement (en forçant ou non son dernier terme) de manière à négliger les fractions à dénominateur trop élevé, dépassant 100 par exemple.

Il peut d'ailleurs se faire, exceptionnellement, que $2x_n y_n$ soit divisible par R_n ; dans ce cas, on a naturellement

$$d_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{R_n};$$

dans ce cas singulier, R_{n+1} et les numérateurs suivants des restes soit nécessairement égaux à -1, et dès lors x_{n+1}, y_{n+1}, comme les couples suivants, forment des solutions particulières de l'équation de Pell

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

Mais, dans le cas général, si l'on veut déterminer d_{n+1}, deux systèmes différents peuvent être adoptés.

Procédé T. — On peut prendre pour d_{n+1} la partie entière du quotient $\frac{2x_n y_n}{R_n}$ ou cette partie entière augmentée d'une unité, suivant que l'on veut obtenir l'approximation par excès ou par défaut. C'est évidemment le procédé le plus naturel et aussi le plus simple, si l'on ne calcule que deux ou trois termes successifs de la suite.

Procédé R. — Dès que l'on veut poursuivre l'approximation plus loin, la nécessité des réductions au même dénominateur s'impose, et il y a lieu de chercher à simplifier les calculs ; on a un moyen très simple en faisant entrer y_n comme facteur dans le nouveau dénominateur à déterminer.

Soit donc z_n une valeur entière approchée (en plus ou en moins) de $\frac{2x_n}{R_n}$, on posera

$$d_{n+1} = y_n z_n = y_{n+1},$$

d'où

$$x_{n+1} = x_n z_n + 1,$$

et

$$R_{n+1} = (R_n z_n - 2x_n) z_n - 1.$$

Il faut d'ailleurs remarquer que, comme

$$x_n^2 = Ay_n^2 + R_n,$$

si A est entier, comme x_n, y_n sont supposés premiers entre eux, R_n et y_n le seront également; il conviendra d'ailleurs de supprimer, le cas échéant, les facteurs communs à x_{n+1} et y_{n+1}, déterminés comme ci-dessus, ce qui permettra de diviser R_{n+1} par le carré de ces facteurs communs.

Il est clair d'ailleurs que, si l'application du procédé T est limitée au calcul de deux termes, il donnera les mêmes résultats que le procédé R. Il peut donc être difficile d'établir en fait lequel de ces deux procédés a été suivi dans ce cas, et c'est celui des approximations que l'on retrouve dans les collections héroniennes.

Je ne me suis donc déterminé, pour le premier de ces deux procédés, que par des conditions *a priori;* théoriquement, en effet, il est plus simple; d'autre part, le second repose sur l'hypothèse que, dans les suites héroniennes de *quantièmes*, chaque dénominateur doit être un multiple du précédent; or ce principe n'a jamais été suivi, ni par les Égyptiens, ni par l'École héronienne.

Mais il me semble au moins très probable que le procédé R a été adopté plus tard par certains calculateurs pour obtenir des approximations poussées assez loin et, en particulier, pour arriver par tâtonnement à des solutions d'équations de Pell.

Je l'ai notamment appliqué avec succès aux douze solutions signalées par M. Perott [1], dans l'édition de 1534, du *Tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria* du dominicain Juan de Ortega. Toutes s'obtiennent, grâce au procédé R, poussé du premier au quatrième degré d'approximation, comme l'indique le Tableau suivant :

$$(1)\qquad \sqrt{128} \backsim 11\frac{16}{51} = 11 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.17},$$

$$(2)\qquad \sqrt{80} \backsim 8\frac{17}{18} = 9 - \frac{1}{18},$$

$$(3)\qquad \sqrt{297} \backsim 17\frac{659}{2820} = 17 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4.15} + \frac{1}{4.15.47},$$

$$(4)\qquad \sqrt{300} \backsim 17\frac{25}{78} = 17 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.26},$$

$$(5)\qquad \sqrt{375} \backsim 19\frac{285}{781} = 19 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.11} + \frac{1}{11.71},$$

[1] *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze mathematiche e fisiche,* avril 1882.

(6) $\sqrt{135} \backsim 11\frac{13}{21} = 12 - \frac{1}{3} - \frac{1}{21}$ (racine héronienne),

(7) $\sqrt{75} \backsim 8\frac{103}{156} = 9 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3.52}$,

(8) $\sqrt{756} \backsim 27\frac{109}{220} = 27 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.110}$,

(9) $\sqrt{611} \backsim 24\frac{6886}{9585} = 25 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.6} - \frac{1}{3.6.15} - \frac{1}{3.3.15.71}$,

(10) $\sqrt{231} \backsim 15\frac{151}{760} = 15 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5.152}$,

(11) $\sqrt{800} \backsim 28\frac{197}{693} = 28 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.7} - \frac{1}{3.7.33}$,

(12) $\sqrt{4100} \backsim 64\frac{1}{32} = 64 + \frac{1}{32}$.

Cette application suffit pour montrer la valeur du procédé R.

On pourra remarquer que, pour les racines (7), (8), (10), une solution de l'équation de Pell a déjà été obtenue au précédent degré d'approximation, de même que pour (2) la partie entière fournit déjà une solution semblable.

M. Perott a encore signalé l'approximation

$$\sqrt{2000} \backsim 44\frac{2079}{2582},$$

qu'il considère comme la réduite $44\frac{1719}{2383}$, à des fautes d'impression près.

Il est très probable, en effet, que les nombres imprimés sont fautifs, mais leur correction ne peut être qu'aventureuse.

Je me contenterai donc des remarques suivantes : si le dénominateur 2582 est exact, la valeur la plus approchée par le numérateur est 1863 qui est égal à 207×9, en sorte que l'erreur a pu provenir de ce que, dans ce dernier produit, le signe de la multiplication a été omis.

D'autre part, $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$, et pour $\sqrt{5}$ la série de Fibonacci avait pu conduire facilement à l'approximation

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \backsim \frac{1597}{2584},$$

d'où

$$\sqrt{5} \backsim \frac{5778}{2584} \quad \text{et} \quad 20\sqrt{5} \backsim 44\frac{1864}{2584}.$$

Or $1864 = 207 \times 9 + 1$. De même 2584 a 1 pour résidu par rapport à 9. Il semble donc qu'un calculateur ait voulu simplifier la fraction $\frac{1864}{2584}$ en diminuant les deux termes d'une unité et en divisant haut et bas par 9, mais qu'ensuite son opération n'ait pas été comprise ou qu'il l'ait lui-même abandonnée après avoir reconnu que $\frac{1863}{2582}$ est de fait plus approchée que $\frac{1863}{2583} = \frac{207}{287}$.

IV.

Depuis l'important travail que j'ai signalé plus haut de M. Siegmund Günther, sur l'extraction approximative des racines carrées, je dois particulièrement appeler l'attention sur deux récents essais dus à M. Hundrath ([1]), parce qu'ils ont suffisamment approfondi la question telle que je l'avais posée, pour me conduire à préciser davantage mon point de vue particulier.

Je fais abstraction des considérations propres à M. Hundrath, dans lesquelles il cherche à restituer l'ordre d'idées suivi par les Grecs, en admettant, par exemple, qu'ils se sont aidés de raisonnements sur des figures géométriques; cette opinion a une grande probabilité historique sinon pour l'invention, au moins pour la démonstration qui a dû suivre l'invention presque immédiatement; mais je crois pouvoir me borner au point de vue spécialement arithmétique.

La restitution de la méthode héronienne, telle que je l'ai essayée, comportait deux éléments distincts :

1° La constatation du fait que les suites de quantièmes dans les approximations héroniennes ont été partiellement calculées au moyen du développement d'un terme complémentaire $\frac{r}{2a}$.

2° La détermination des règles de calcul suivies dans le choix des approximations successives donnant naissance à ces termes complémentaires.

([1]) *Ueber das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern*, Hadersleben, Schutze et Festersen, 1883. *Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche*, Kiel, Lipsius et Tischer, 1884.

Sur le premier point, M. Hundrath est, comme M. Günther, parfaitement d'accord avec moi, et il me semble qu'en fait il n'y a plus aujourd'hui matière à aucun doute; sur le second point, au contraire, la discussion peut rester ouverte.

Ainsi j'ai déjà indiqué le doute qui peut subsister sur le choix théorique entre les deux procédés que j'ai désignés par les lettres T ou R. D'autre part, les règles de calcul que j'avais admises pour le procédé T ont été présentées par moi comme laissant une certaine latitude à l'habileté du calculateur; on peut se demander si cette latitude n'allait pas encore plus loin.

Ainsi j'avais admis en principe que, pour éviter des réductions subséquentes, les premières approximations devaient être faites régulièrement par défaut. Mais, si l'on n'admet que deux degrés d'approximation au plus, si l'on remarque d'autre part, qu'en fait dans les exemples héroniens, pour le second degré d'approximation, la première fraction, en valeur absolue, est toujours $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$, le motif mis en avant n'est guère valable, puisque, avec ces fractions, les réductions peuvent se faire immédiatement; il est même clair qu'il est plus facile de calculer le reste pour $(a+1)-\frac{1}{3}$ que pour $a+\frac{2}{3}$.

M. Hundrath a systématiquement essayé les approximations par excès et il est ainsi arrivé à des simplifications incontestables et à des réductions dans le degré d'approximation supposé; à la vérité, dans son premier travail il a admis, contrairement à mon opinion, que le calcul pouvait être poussé jusqu'au quatrième degré. Mais, dans son second essai, il est revenu sur cette conjecture et s'est borné au deuxième degré, tandis que j'avais été jusqu'au troisième. Je pense que sa dernière conclusion, à laquelle j'étais déjà arrivé de mon côté à la suite de son premier travail, est de beaucoup plus probable et qu'en thèse générale on doit admettre les premières approximations par excès toutes les fois qu'elles conduisent plus simplement au résultat. On doit avoir d'autant moins de scrupule à cet égard que l'emploi d'un terme négatif se rencontre déjà effectivement dans la collection héronienne; que l'usage alternatif de termes positifs et négatifs semble avoir été chez les Hindous l'objet d'une certaine préférence; qu'enfin l'heureuse application que nous avons vue plus haut du système R, suppose également l'emploi de termes négatifs.

Voici donc comment je classerais aujourd'hui les racines héroniennes que je considère comme calculées directement. Les numéros qui les marquent sont ceux de mon premier travail. Je les subdiviserai en trois groupes pour chacun des deux degrés d'approximation, et je ferai remarquer que les procédés de calcul supposés ne présentent plus que des différences insignifiantes avec ceux admis en dernier lieu par M. Hundrath.

Premier degré.

1° *Solution immédiate de l'équation de Pell.*

(1) $\sqrt{63} \backsim 8 - \frac{1}{16},$

(4) $\sqrt{50} \backsim 7 + \frac{1}{14},$

(18) $\sqrt{720} \backsim 27 - \frac{9}{54} = 27 - \frac{1}{6} = 26 \frac{1}{2} \frac{1}{3}$ (Hundrath).

2° *Premier quotient complet développé.*

(2) $\sqrt{1125} \backsim 33 + \frac{36}{66} = 33 \frac{1}{2} \frac{1}{22},$

(3) $\sqrt{1081} \backsim 32 + \frac{57}{64} = 32 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{64},$

(5) $\sqrt{75} \backsim 8 + \frac{11}{16} = 8 \frac{1}{2} \frac{1}{8} \frac{1}{16},$

(23) $\sqrt{108} \backsim 10 + \frac{8}{20} = 10 \frac{1}{3} \frac{1}{15}.$

On remarquera que la décomposition de $\frac{8}{20}$ ou $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{3} \frac{1}{15}$ est celle du papyrus d'Eisenlohr et qu'elle est d'ailleurs authentiquement héronienne.

3° *Premier quotient approché.*

(Les fractions entre crochets représentent les termes négligés par Héron)

A. Par excès.

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{58\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{16}} \backsim 8 - \frac{5\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}}{16} \\ &= 8 - \frac{1}{3} + \frac{1}{48} - \frac{1}{32} - \frac{1}{256} = 7\,\frac{2}{3} - \left[\frac{1}{96} + \frac{1}{256}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \sqrt{44\,\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{9}} \backsim 21 + \frac{3\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}}{42} = 21 + \frac{3\,\frac{1}{2}}{42} - \frac{1}{18.42} = 21\,\frac{1}{12} - \left[\frac{1}{756}\right],$$

$$(8)\quad \sqrt{3400} \backsim 58 + \frac{36}{116} = 58 + \frac{1}{3} - \frac{2}{87} = 58\,\frac{1}{3} - \left[\frac{1}{58} + \frac{1}{174}\right],$$

$$(16)\quad \sqrt{356} \backsim 19 - \frac{5}{38} = 19 - \frac{1}{8} - \frac{1}{152} = 18\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8} - \left[\frac{1}{152}\right],$$

$$(17)\quad \sqrt{5000} \backsim 70 + \frac{100}{140} = 70 + \frac{1}{2} + \frac{3}{14} = 70\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{28}\right],$$

$$(21)\quad \sqrt{8\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{16}} \backsim 3 - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}}{6} = 3 - \frac{1}{12} - \frac{1}{96} = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{96}\right].$$

B. Par défaut.

$$(9)\quad \sqrt{54} \backsim 7 + \frac{5}{14} = 7 + \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{42}\right],$$

$$(15)\quad \sqrt{356\,\tfrac{1}{18}} \backsim 7 - 19 - \frac{5 - \frac{1}{19}}{38} = 19 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \left[\frac{1}{114}\right] \backsim 18\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{9}.$$

Second degré.

1° *Solutions médiates de l'équation de Pell.*

$$(10)\quad \sqrt{135} \backsim 12 - \frac{1}{3} - \frac{1 + \frac{1}{9}}{24 - \frac{2}{3}} = 11\,\frac{2}{3} - \frac{10}{3.70} = 11\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{21},$$

$$(13)\quad \sqrt{1575} \backsim 40 - \frac{1}{3} + \frac{1\,\frac{2}{3} - \frac{1}{9}}{80 - \frac{2}{3}} = 39\,\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{14}{238} = 39\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{51} \quad \text{(Hundrath)},$$

$$(14)\quad \sqrt{216} \backsim 15 - \frac{1}{3} + \frac{1 - \frac{1}{9}}{30 - \frac{2}{3}} = 14\,\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{8}{88} = 14\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{33} \quad \text{(Hundrath)},$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{886} - \frac{1}{16} \backsim 30 - \frac{1}{4} + \frac{1 - \frac{1}{8}}{60 - \frac{1}{2}} \\ &= 29\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{7}{119} = 29\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{68} \quad \text{(Hundrath)}. \end{aligned}\right.$$

2° *Second quotient complet développé.*

(11) $\sqrt{43\frac{1}{2}\frac{1}{4}} \backsim 6+\frac{1}{2}+\frac{1\frac{1}{2}}{13} = 6\frac{1}{2}\frac{1}{13}\frac{1}{26}$,

(12) $$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{6300} \backsim 79+\frac{1}{3}+\frac{6\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{158+\frac{2}{3}} \\ &\quad = 79\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{56}{476} = 79\frac{1}{3}+\frac{2}{51} = 79\frac{2}{3}\frac{1}{34}\frac{1}{102}. \end{aligned}\right.$$

3° *Second quotient approché (par défaut).*

(19) $\sqrt{208} \backsim 14+\frac{1}{3}+\frac{2\frac{2}{3}-\frac{1}{9}}{28\frac{2}{3}} = 14\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{23}{86} = 14\frac{1}{3}\frac{1}{12}+\left[\frac{1}{172}\right]$,

(20) $\sqrt{43\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9}} \backsim 6+\frac{1}{2}+\frac{1\frac{1}{2}\frac{1}{9}}{13} = 6\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\frac{13\frac{1}{2}}{13} = 6\frac{1}{2}\frac{1}{9}+\left[\frac{1}{234}\right]$.

Quant aux deux racines

(24) $\sqrt{2460\frac{15}{16}} \backsim 49\frac{1}{2}\frac{1}{17}\frac{1}{34}\frac{1}{51}$,

(25) $\sqrt{615\frac{15}{64}} \backsim 24\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{51}\frac{1}{51}\frac{1}{68}$,

il me paraît de plus en plus certain qu'elles n'ont pas été obtenues directement, quoiqu'il n'y ait pas de difficulté réelle à les obtenir en faisant subir aux règles de calcul des dérogations plus ou moins importantes.

En résumé, sur *vingt-trois* racines qu'il faut faire entrer en ligne de compte, *treize* sont fournies exactement par le procédé supposé, *dix* le sont seulement en supposant négligés un ou deux termes du développement complet, dans des conditions où cette hypothèse a un haut degré de vraisemblance.

Mais, si l'on veut comparer ce procédé à tout autre que l'on supposera avoir été connu des Grecs, la question change. Comme, en effet, tout procédé doit, comme premier degré d'approximation, donner $\sqrt{a^2+r} \backsim a+\frac{r}{2a}$, les quinze solutions du premier degré ne doivent pas entrer en ligne de compte, sauf le cas, très improbable *a priori*, où le procédé supposé donnerait rigoureusement, pour une transformation intermédiaire, avant de passer au second degré, quelques-unes des solutions seulement approchées du premier degré. Il ne reste donc à considérer que huit racines, sur lesquelles notre procédé en donne six exactement contre deux seulement d'une façon approchée ; il convient seulement de remarquer que, si l'on admet contre toute vraisemblance que les Grecs ont connu des moyens spéciaux pour obtenir la solution de l'équation de Pell, quatre des racines du deuxième degré doivent encore être écartées, et l'on ne se trouve plus posséder un nombre d'éléments suffisant pour asseoir une probabilité.

V.

Il est clair que la restitution d'un procédé pour l'évaluation approximative des racines carrées chez les Grecs ne doit pas entraîner la conviction que ce procédé ait été le seul connu, et ne doit pas arrêter, par suite, les tentatives pour établir l'existence de tel ou tel autre.

Historiquement, d'ailleurs on trouve vers le commencement du XIV^e siècle, chez les Byzantins (Barlaam, Nicolas Rhabdas), un procédé dont M. Günther a fait remarquer l'existence chez les Latins du XV^e siècle (Lucas Pacioli) et qui a été réinventé plus tard.

De la première approximation de $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r}$,

$$X_0 = a + \frac{r}{2a},$$

laquelle est par excès ; on en déduit une autre du même degré par défaut,

$$x_0 = \frac{A}{X_0},$$

puis une du second degré par excès,

$$X_1 = \frac{X_0 + x_0}{2}.$$

Le procédé peut être indéfiniment poursuivi.

Il est facile de reconnaître, en tout cas, qu'il n'a pas été em-

---

(1) *Voir* mon étude sur *Emmanuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas* dans le *Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronomiques*, 1884.

ployé pour le calcul des approximations héroniennes, en écartant, comme on doit le faire, le premier degré.

Je ne m'arrête pas aux propriétés de ce procédé, si bien étudiées en particulier par M. Günther; je m'occuperai spécialement d'un autre proposé par M. Heilermann et défendu par M. Weissenborn, comme susceptible d'expliquer les approximations d'Archiméde et de Héron.

Dans son plus récent travail (*Zeitschrift für Math. u. naturw. Unterricht,* t. XV, p. 81, suiv.), M. Heilermann borne la question qu'il pose à chercher si une approximation donnée X de $\sqrt{A}$ n'a pas été obtenue par une relation telle que

$$X = a + \frac{r}{2a} \quad \text{(premier degré d'approximation)}$$

ou encore

$$X = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a}} \quad \text{(deuxième degré),}$$

en supposant d'ailleurs toujours $A = a^2 + r$, toutefois en admettant que a et r ne représentent plus nécessairement des nombres entiers, mais seulement rationnels.

Considérons d'abord le premier degré; on tire des conditions

$$a = X \pm \sqrt{X^2 - A}, \quad r = A - a^2;$$

Il faut donc que $X^2 - A$ soit un carré parfait; or ce cas se présente si X correspond à une solution de l'équation de Pell, ce qui a lieu pour quatre de nos approximations du second degré; elles se présentent alors comme approximation du premier degré en admettant pour a des valeurs rationnelles qui sont doubles. Ainsi, pour la racine (10) $\sqrt{135}$, a peut être soit $11\frac{2}{3}$, soit $11\frac{4}{7}$.

Il est certain que toute la question revient à savoir comment les Grecs ont pu arriver à choisir la valeur de a; en réalité, du moment où elle n'est pas entière, ce ne peut être que par une première approximation; il faudrait donc pouvoir répéter l'opération sur les valeurs trouvées par a, ou bien on ne peut expliquer leur choix que par un autre procédé, et l'on retombe alors inévitablement sur celui que nous avons supposé. Il est clair, en effet, que, eu égard aux conditions posées, a est absolument arbitraire; si on lui attribue une valeur m, par exemple, on retrouvera seulement comme seconde racine de l'équation en a la valeur $\frac{A}{m}$.

Quant à l'application du procédé de M. Heilermann aux racines héroniennes, en écartant dès lors les solutions médiates de l'équation de Pell et celles que nous avons appelées premier quotient complet développé, on est conduit à admettre pour première approximation (valeur de a la plus simple) dans les racines à premier quotient approché

$$\sqrt{58\frac{7}{16}} \backsim 8\frac{1}{4}, \quad \sqrt{444\frac{4}{9}} \backsim 21\frac{1}{3}, \quad \sqrt{3400} \backsim 60, \quad \sqrt{8\frac{7}{16}} \backsim 3\frac{3}{4},$$

et, dans les racines à second quotient complet développé,

$$\sqrt{43\frac{3}{4}} \backsim 6\frac{1}{2}.$$

Les autres sont réfractaires; or la dernière est donnée par notre procédé; des quatre premières, la troisième peut être seule considérée comme possible; elle reviendrait à considérer $\sqrt{3400}$ comme $10\sqrt{34}$, et à prendre pour $\sqrt{34}$ l'approximation $6 - \frac{2}{12}$, immédiatement donnée.

Abordons maintenant le procédé de M. Heilermann pour le second degré d'approximation.

Il conduit à l'équation en a,

$$a^3 - 3Xa^2 + 3Aa - AX = 0,$$

qui a deux racines imaginaires et une réelle.

Si cette équation a une racine rationnelle m et que d'ailleurs $m^2 - A$ soit un carré (cas qui se présente pour les solutions de l'équation de Pell), il se trouve que l'on obtient également une solution, en supposant que X soit une approximation du premier degré seulement; mais, en la regardant comme du deuxième degré, on aura, pour la première valeur choisie a, un nombre généralement acceptable.

Ainsi

$$\sqrt{135} \backsim 12 - \cfrac{9}{24 - \cfrac{9}{24}}, \quad \sqrt{216} \backsim 15 - \cfrac{9}{30 - \cfrac{9}{30}};$$

si l'on écarte ce cas particulier, on trouvera encore une racine rationnelle de l'équation en a pour

$$\sqrt{8\tfrac{7}{16}} \backsim 3\tfrac{3}{4} - \cfrac{5\tfrac{5}{8}}{7\tfrac{1}{2} + \cfrac{5\tfrac{5}{8}}{7\tfrac{1}{2}}},$$

$$\sqrt{54} \backsim 6 + \cfrac{18}{12 + \cfrac{18}{12}}, \quad \sqrt{6300} \backsim 80 - \cfrac{100}{160 - \cfrac{100}{160}}.$$

La dernière seule est admissible.

On peut dire, en résumé, que les procédés de M. Heilermann donnent pour les valeurs que le système T fournit rigoureusement une explication aussi satisfaisante que ce système ; mais, pour les autres, ces valeurs sont absolument réfractaires à ces procédés, ou bien elles sont en fait expliquées d'une façon beaucoup moins naturelle.

M. Heilermann avait, d'autre part, antérieurement proposé un autre procédé d'approximation dont M. Weissenborn (¹) s'est, pour ainsi dire, approprié l'application aux valeurs héroniennes, en même temps qu'à celles d'Archimède. J'écarterai ces dernières dont le degré d'approximation n'est pas tel qu'il permette d'obtenir des conclusions précises.

Le procédé en question, présenté comme une généralisation de celui qui donnait chez les anciens les nombres *côtés* et *diagonaux* (solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = \pm 1$), consiste à former deux séries récurrentes de nombres S et D, d'après la loi

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, \quad D_n = kS_{n-1} + D_{n-1}.$$

On obtient facilement la relation

$$D_n^2 - kS_n^2 = (1-k)(D_{n-1}^2 - kS_{n-1}^2) = (1-k)^n(D^2 - kS^2).$$

Il en résulte que si k est suffisamment voisin de 1, $\frac{D_n}{S_n}$ représentera $\sqrt{k}$ avec une approximation d'autant plus grande que n sera plus élevé.

(¹) *Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron*, von Dr Weissenborn, Berlin, Calvary, 1883.

Soit maintenant à extraire $\sqrt{A} = \sqrt{a^2+r} = a\sqrt{1+\frac{r}{a^2}}$; si l'on pose

$$1+\frac{r}{a^2}=k, \quad S_0=1, \quad D_0=1,$$

on a

$$S_1=2, \quad D_1=1+k,$$

et, comme approximation correspondante du premier degré,

$$\sqrt{A} \backsim a\frac{D_1}{S_1}=a+\frac{r}{2a};$$

puis

$$S_2=3+k, \quad D_2=1+3k,$$

et comme approximation corrrespondante du second degré,

$$\sqrt{A} \backsim a\frac{D_2}{S_2}=a+\cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a}};$$

On voit la liaison de ce procédé avec celui que nous avons précédemment exposé, et l'on peut en même temps en reconnaître la différence dans l'application.

Il est clair que M. Weissenborn devait immédiatement retrouver, comme premier degré d'approximation, les sept valeurs héroniennes à premier quotient complet (simple ou développé). Comme, d'autre part, si A est accompagné de fractions, il admet la réduction au même dénominateur carré, pour l'extraction approchée de la racine du numérateur ainsi formé; comme enfin il admet que a peut n'être pas la racine du carré entier le plus voisin de A, il obtint, comme données exactement par son procédé, quelques-unes des valeurs héroniennes qui ont paru réfractaires au nôtre.

Ainsi

$$(6) \quad \sqrt{58\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{935}=\frac{1}{4}\sqrt{33^2-154} \backsim \frac{1}{4}\left(33-\frac{154}{66}\right)=7\,\frac{2}{3},$$

$$(7) \quad \sqrt{444\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{4000}=\frac{1}{3}\sqrt{64^2-96} \backsim \frac{1}{3}\left(64-\frac{96}{128}\right)=21\,\frac{1}{12},$$

$$(8) \quad \sqrt{3400}=\sqrt{60^2-200} \backsim 60-\frac{200}{120}=58\,\frac{1}{3}.$$

Il est clair qu'en adoptant des modifications correspondantes pour l'application du procédé admis par nous

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} \backsim a + \frac{r}{2a},$$

ces mêmes racines peuvent être obtenues par ce dernier procédé; elles ne peuvent donc pas être regardées comme réellement favorables à l'opinion de M. Weissenborn sur l'existence chez les anciens de la méthode qu'il a étudiée.

De même le second degré d'approximation de cette méthode donne rigoureusement les approximations héroniennes à second quotient complet ([1]), et, en choisissant a convenablement, deux des racines approchées au premier degré, (21) et (9). A cet égard, les résultats qu'il obtient sont naturellement comparables à ceux de M. Heilermann.

Mais cinq racines se trouvent réfractaires à son procédé, qui lui donne

(16)	$18\frac{33}{38}$	au lieu de	$18\frac{7}{8}$,	(17)	$70\frac{5}{6}$	au lieu de	$70\frac{3}{4}$,
(15)	$18\frac{7}{8}$	au lieu de	$18\frac{31}{36}$,	(19)	$14\frac{26}{61}$	au lieu de	$14\frac{5}{12}$,
(20)	$6\frac{299}{480}$	au lieu de	$6\frac{11}{18}$.				

Or, tandis que, dans notre procédé, les simplifications des développements en quantièmes que donnerait l'application rigoureuse de la méthode s'expliquent tout naturellement, il est difficile de rendre compte des substitutions supposées par M. Weissenborn.

Celles qui se rapportent aux racines (17) et (15) me semblent notamment inadmissibles; d'autre part,

(19) $\qquad \frac{26}{61}$ est plutôt $\frac{1}{3} + \frac{1}{11}$ que $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$,

(20) $\qquad \frac{299}{480}$ est plutôt $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ que $\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$.

([1]) Sauf la racine (11) qui se trouve donnée pour le premier degré, à cause de la forme fractionnaire de A.

Malgré le talent dépensé par M. Weissenborn, il ne me semble donc pas avoir suffisamment établi sa thèse.

Le grave défaut des tentatives faites en partant du principe admis par M. Heilermann, surtout sous la forme que lui donne M. Weissenborn, me paraît être de conduire, pour le premier degré d'approximation, à une conception relativement complexe de la formule si simple et historiquement démontrée

$$\sqrt{a^2+r} \backsim a + \frac{r}{2a},$$

comme aussi de compliquer les calculs relatifs à cette formule.

Quand au second degré d'approximation

$$\sqrt{a^2+r} \backsim \frac{r}{2a+\frac{r}{2a}},$$

on peut sans doute simplifier suffisamment sa conception pour la présenter sous une forme qui puisse la faire regarder comme ayant pu être connue des Grecs; mais si, d'ailleurs, en présence des documents trop peu nombreux que nous possédons, elle semble aussi satisfaisante pour expliquer les valeurs héroniennes que la méthode que nous avons proposée, elle paraîtra sans doute beaucoup moins simple et, partant, moins probable.