BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

RAFFY

Discours prononcé par M. Cayley devant les membres de l'association britannique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 30-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_30_1>

DISCOURS PRONONCÉ PAR M. CAYLEY DEVANT LES MEMBRES DE L'ASSOCIATION BRITANNIQUE.

Traduit par M. RAFFY, Docteur ès sciences.

Les Mathématiques se rattachent, d'une part, à la vie commune et aux sciences physiques, d'autre part, à la Philosophie par les notions d'espace et de temps et les questions qui touchent à l'universalité et à la nécessité des vérités mathématiques, ainsi qu'au fondement de la connaissance que nous en avons. Remarquons en passant que le lien de l'Arithmétique et de l'Algèbre avec la notion de temps est beaucoup moins visible, si même il existe, que celui de la Géométrie avec la notion d'espace.

Je n'ai pas à faire devant vous un plaidoyer pour les Mathématiques, et, si j'avais à le faire, je voudrais que ce fût comme Socrate,

(1) Éd. Hultsch, p. 678, l. 28-680, 2. Commandin, au lieu de οὐδέ τινα, avait lu οὐδὲ τὴν πρώτην καὶ, « pas même celle qui est la première ».

sommé dans la République de Platon de défendre la justice sans invoquer les avantages pratiques de la vertu et de l'équité, et montrant qu'absolument et en elle-même la justice est un bien; et je ne vous parlerais pas de l'utilité des Mathématiques dans les usages de la vie ou les problèmes de la Physique. Je m'en garderais d'autant plus que mes auditeurs prennent ou sont portés à prendre plus d'intérêt aux Mathématiques cultivées pour elles-mêmes. Je montrerais que les théories mathématiques doivent leur origine à ces besoins de la vie et à ces problèmes de la Physique, bien qu'aujourd'hui elles se développent dans un autre domaine de la pensée (comme la Géométrie issue de l'arpentage, la Théorie des nombres née de l'Arithmétique), de même qu'une rivière à son embouchure s'est éloignée de sa source.

Philosophiquement, l'opinion la plus répandue est que nous arrivons sans doute par l'expérience aux vérités mathématiques, mais que l'expérience ne suffit pas à nous les donner : l'esprit y contribue pour sa part. C'est au fond la théorie platonicienne de la réminiscence : en voyant deux objets, arbres, pierres ou autres, qui nous semblent plus ou moins égaux, nous arrivons à l'idée d'égalité; mais il faut bien que nous ayons l'idée d'égalité au moment où, voyant les deux objets, nous sommes conduits à les regarder comme réalisant plus ou moins complètement cette idée d'égalité. Il en est de même pour l'idée du beau, et bien d'autres.

La même idée est exprimée par ce correctif, *nisi intellectus ipse,* que Leibnitz ajouta à l'aphorisme scolastique *nihil in intellectu quod non prius in sensu,* c'est-à-dire il n'y a rien dans l'esprit qui n'ait été auparavant dans les sens, excepté, dit Leibnitz, l'esprit lui-même. C'est aussi l'avis de Kant, dans la *Critique de la raison pure :* suivant lui, toutes nos connaissances commencent par l'expérience, mais nous avons en possession des idées *a priori* indépendantes non de telle ou telle expérience, mais de toute expérience absolument, en particulier les axiomes mathématiques. Kant ajoute que l'espace n'est pas une conception acquise par l'expérience externe, mais que, pour rapporter nos sensations à quelque chose d'extérieur, il faut déjà que nous ayons l'idée d'espace, et que l'expérience externe n'est elle-même possible que grâce à cette idée. De même le temps n'est pas non plus une conception empirique, mais une idée qui est la condition nécessaire de toute intuition.

De son côté, Sir W.-R. Hamilton dit, dans une première Leçon d'Astronomie (1836) : « L'Algèbre et la Géométrie, ces sciences exclusivement mathématiques, sont des sciences de pure raison : elles n'empruntent à l'expérience ni secours ni autorité ; elles sont ou du moins peuvent être entièrement isolées des phénomènes contingents du monde extérieur. Nous ne dirons pas que l'idée d'ordre et les idées dérivées de nombre et de figure soient des idées innées, si l'on entend par là que tous les hommes les possèdent avec la même clarté et la même plénitude ; malgré cela, ce sont des idées qui semblent tellement être nées avec nous que la possession que nous en avons, à quelque degré que ce soit, n'est que le développement de nos puissances originelles, l'évolution de notre intelligence humaine. »

La question générale des idées d'espace et de temps, les axiomes et définitions de la Géométrie et de l'Arithmétique, ainsi que le raisonnement mathématique, ont été soumis à une discussion complète et approfondie par Whewell, dans sa *Philosophie des sciences inductives* (1840), ouvrage qu'on peut considérer comme contenant toute l'exposition de cette théorie.

Mais John Stuart Mill a soutenu que les vérités mathématiques et spécialement les vérités géométriques reposent sur l'expérience, et le mathématicien Riemann a soutenu la même thèse à l'égard de la Géométrie, en l'appuyant sur des raisons toutes différentes.

Il est moins facile qu'on ne le croirait au premier abord de montrer combien les vues adoptées par Mill dans son *Système de logique déductive et inductive* (9e édition, 1879) sont en opposition avec celles que nous venons de rapporter. Exposons-les d'abord. Mill procède le plus souvent par affirmations catégoriques qu'il justifie ensuite, par exemple (p. 263) : « Il reste à rechercher quelles sont les raisons de notre foi aux axiomes, et quelle sorte d'évidence leur sert de fondement. Je répondrai que les axiomes sont des vérités empiriques, des résultats d'expérience généralisés. Cette proposition, *deux droites ne peuvent enclore un espace*, en d'autres termes, deux droites qui se coupent en un point ne se rejoignent nulle autre part, est une induction fondée sur l'évidence de nos sensations. » Mais je ne puis m'empêcher de trouver qu'un argument donné par Mill quelques pages auparavant (p. 259) modifie profondément le caractère absolu de cette contradiction. En effet, Mill se demande « pourquoi la plupart des philosophes attribuent aux Mathématiques une évidence propre, indépendante de l'expérience et de l'observation, et les caractérisent comme un ensemble de vérités nécessaires »; puis il écrit ce passage, que nous citerons en entier : « Je répondrai que le caractère de nécessité et même (sauf quelques réserves à venir) la certitude particulière qu'on attribue aux vérités mathématiques ne sont qu'une illusion, et que, pour accréditer cette illusion, il est nécessaire de supposer que ces vérités ne concernent et ne font connaître que des objets purement fictifs. On sait que les conclusions de la Géométrie résultent en partie au moins des définitions, et que ces définitions sont considérées comme représentant aussi exactement que possible les objets dont s'occupe la Géométrie. Mais nous avons établi qu'une définition ne donne rien, sinon des propositions concernant ce qu'on fait signifier aux mots, et que les conclusions effectives qui semblent résulter d'une définition dérivent en réalité de l'hypothèse sous-entendue qu'il existe un objet réel conforme à cette définition. Cette hypothèse n'est pas rigoureusement vraie dans le cas des définitions géométriques : car il n'existe aucun objet réel entièrement conforme à ces définitions. Il n'existe pas de point sans dimension, pas de ligne sans épaisseur et parfaitement droite, pas de cercle ayant tous ses rayons absolument égaux, pas de carré ayant ses angles rigoureusement droits. On me dira qu'on suppose non l'existence effective, mais seulement la possibilité de tels objets. Je répondrai que, suivant tout ce que nous savons des possibilités, ces objets ne sont pas même possibles. Autant qu'on puisse affirmer quoi que ce soit, leur existence serait incompatible avec la constitution physique de notre planète tout au moins, sinon de l'univers (*sic*). Pour s'affranchir de cette difficulté, et du même coup sauver le crédit des prétendues vérités nécessaires, on a l'habitude de dire que les points, droites, cercles et carrés, qui font l'objet de la Géométrie, existent d'une manière absolue dans nos conceptions et font partie de notre esprit; et que l'esprit, employant ses propres matériaux, construit une science *a priori*, dont l'évidence est purement intellectuelle et n'a rien à voir avec l'expérience externe. Malgré toutes les autorités dont cette théorie se recommande, je la trouve psychologiquement incorrecte. Les points, les droites et les carrés que chacun a dans l'esprit ne sont, suivant moi, que les copies des points, droites et carrés que l'expérience lui a fait connaître. Notre idée du point me paraît être tout simplement l'idée du *minimum visibile* ou de la plus petite portion de surface que nous pouvons voir. On peut raisonner sur une ligne comme si elle n'avait pas d'épaisseur, parce que nous avons la faculté, mise en jeu quand une perception occupe nos sens ou une conception notre esprit, de ne *faire attention* qu'à un seul des éléments de la perception ou de la conception au lieu de les embrasser tous. Mais nous ne pouvons pas *concevoir* une ligne sans épaisseur : nous ne pouvons former dans notre esprit l'image d'une telle ligne ; toutes celles que nous avons dans l'esprit sont douées d'épaisseur. Si quelqu'un en pouvait douter, nous le renverrions à son expérience personnelle. Je doute fort qu'il existe quelqu'un s'imaginant pouvoir se faire l'idée d'une ligne mathématique, rien que par l'évidence de son sens intime. Mais je le soupçonnerais plutôt de se figurer que, si cette perception n'était pas possible, les Mathématiques n'existeraient pas en tant que science : or c'est là une supposition dont nous montrerons sans peine le peu de fondement. »

J'estime qu'on peut accorder tout de suite que les vérités géométriques sont des vérités, précisément parce qu'elles concernent et font connaître ce que Mill appelle des *objets purement fictifs;* que ces objets n'existent pas au sens de Mill, c'est-à-dire qu'ils ne se rencontrent pas dans la nature ; qu'ils ne soient *pas même possibles,* si cela veut dire impossibles dans l'univers qui existe, cela peut encore se concéder. Mais que nous ne puissions *concevoir* de tels objets, cela dépend de ce que l'on entend par le mot *concevoir.* J'ose dire que les *objets purement fictifs* sont les seuls réels, ὄντως ὄντα ; que les objets matériels qui les rappellent ne sont auprès d'eux que les fantômes de la caverne de Platon, et que c'est grâce à eux seulement que nous sommes en mesure d'affirmer que leurs pareils n'existent pas dans la nature : si nous n'avions pas la notion de la ligne droite, nous ne pourrions point affirmer qu'il n'existe aucune ligne parfaitement droite.

Mais les objets de la Géométrie sont bien, en quelque mesure, les objets purement fictifs de Mill; et les vérités géométriques ne sont vraies, et *a fortiori* nécessaires, qu'en tant qu'elles concernent ces objets purement fictifs; et ces objets, points, droites, cercles, entendus comme des figures mathématiques, ont des analogues, et sont représentés plus ou moins imparfaitement (mais il n'importe pour le géomètre) par les points, les droites et les cercles matériels. J'aurai à revenir sur la Géométrie et je parlerai alors de Riemann, mais je vais auparavant discuter un autre passage de Mill.

Parlant des vérités arithmétiques, Mill dit (p. 297) qu'elles contiennent toujours un élément hypothétique : « Dans toutes les propositions sur les nombres est impliquée une condition sans laquelle aucune d'elles ne serait vraie, et cette condition est une hypothèse qui pourrait être fausse : c'est la condition que $1 = 1$, ou que tous les nombres sont formés des mêmes unités égales entre elles. » Ici au moins l'hypothèse peut être absolument vraie : un shilling égale un shilling quant à la valeur vénale, même s'ils n'ont pas tous deux absolument le même poids et le même titre, mais cela est fort peu nécessaire. Une pièce plus une pièce égalent deux pièces, même si l'une est un shilling et l'autre une demi-couronne. En fait, quelques difficultés qu'on puisse élever à propos de la Géométrie, il me semble qu'il n'y en a point d'analogues en Arithmétique : chacun de nous, qu'il soit ou qu'il ne soit pas mathématicien, possède, dans sa forme la plus abstraite, l'idée de nombre. Chacun peut apprécier la justesse d'une proposition relative aux nombres; et nous sommes bien forcés de voir qu'une vérité relative aux nombres diffère par sa nature d'une vérité empirique, généralisation de l'expérience. Comparons, par exemple, cette proposition que le soleil, s'étant déjà levé tant de fois, se lèvera demain, et le jour d'après et ainsi de suite, et cette proposition que les nombres pairs et les nombres impairs se succèdent indéfiniment les uns aux autres : cette dernière semble présenter les caractères de l'universalité et de la nécessité. Autre exemple : soit une proposition qui se vérifie sur une longue suite de nombres, sur mille, deux mille nombres si l'on veut : non seulement cela ne prouve pas, mais il n'est nullement évident que la proposition subsiste pour tous les nombres. Il y a, dans la théorie des nombres, des exemples très remarquables de propositions qui se vérifient sur une longue suite de nombres et qui néanmoins sont fausses.

Je passe en revue quelques théories mathématiques.

En Arithmétique et en Algèbre ou, comme on dit, en Analyse, nous trouvons d'abord les nombres et les quantités ordinaires, c'est-à-dire positifs. Nous rencontrons aussi en Analyse et en Géométrie analytique les quantités *négatives*. Celles-ci ont fourni ample matière aux discussions philosophiques, et je pourrais renvoyer à l'opuscule de Kant, *Ueber die negativen Grössen in die Weltweisheit* (1763); mais la notion de quantité négative est devenue tout à fait usuelle, et elle est entrée dans le langage ordinaire. Je me contenterai de signaler qu'on en a fait une application fort ingénieuse à la tenue des livres en partie double.

Il en est tout autrement d'une idée essentielle dont on ne peut assez affirmer l'importance : cette idée, qui embrasse et pénètre toute l'Analyse et toute la Géométrie modernes, est l'idée de quantité imaginaire en Analyse et d'espace imaginaire (lieu de points et de figures imaginaires) en Géométrie : l'imaginaire comprend ici le réel. Cette notion n'a été, que je sache, l'objet d'aucune étude ou discussion philosophique. En ce qui concerne les métaphysiciens d'autrefois, il me suffira de dire qu'ils ne la soupçonnaient pas et n'étaient pas tenus de la soupçonner. Mais aujourd'hui qu'on voit quel rôle capital cette idée joue dans la Science, il ne faut pas venir nous dire qu'elle n'intéresse que les Mathématiques et qu'elle rentre dans la catégorie de ces chimères qui ne sont pas un objet de science; je trouve qu'une pareille ignorance n'est pas permise, et qu'on devrait au moins donner les raisons de ce parti pris.

En bonne logique, je devrais peut-être parler maintenant de l'idée qui nous occupe; mais il convient de dire d'abord un mot de certaines conceptions à côté de la Géométrie, savoir l'espace à plusieurs dimensions, l'espace non euclidien à deux et à trois dimensions et enfin la notion généralisée de distance. Ce sont ces idées qui amenèrent Riemann à tenir pour empirique notre conception de l'espace ou, pour mieux dire, à penser que l'expérience seule nous révèle l'identité de notre espace avec l'espace euclidien.

On sait que le onzième axiome d'Euclide, même sous la forme que lui a donnée Playfair, a été considéré comme ayant besoin de démonstration, et qu'on doit à Lobatchefsky une théorie parfaitement coordonnée, où l'auteur suppose que cet axiome n'est pas vrai; c'est un système non euclidien de Géométrie du plan. Il existe un système non euclidien correspondant de Géométrie de l'espace. A mon avis, le onzième axiome d'Euclide, sous la forme que lui a donnée Playfair, n'a pas besoin de démonstration : il est impliqué dans notre conception de l'espace, de cet espace réel sur lequel porte notre expérience, dont nous prenons connaissance par l'expérience, mais dont l'idée est à la base de toute expérience externe. On peut exprimer la pensée de Riemann en disant que nous avons dans l'esprit l'idée d'un espace plus général que l'espace réel, c'est-à-dire l'idée d'un espace non euclidien; et l'expérience nous apprend que l'espace réel diffère à peine de l'espace euclidien, si même il ne lui est pas identique.

Mais supposez que l'espace réel ne soit qu'approximativement euclidien : qu'en résultera-t-il? Il en résultera, non pas que les propositions de la Géométrie sont vraies approximativement, mais qu'elles restent vraies absolument par rapport à cet espace euclidien que nous regardions comme identique à l'espace réel.

Il est intéressant de poursuivre deux ordres de considérations, qui, sans rien changer à notre idée d'espace, nous conduiront par deux voies différentes à un système de Géométrie non euclidienne à deux dimensions : par là nous jetterons, je l'espère, quelque clarté sur notre objet.

Supposons d'abord que la Terre soit une sphère parfaite. Nous appellerons *plan* la surface de la Terre, *droite* la ligne en apparence droite, mais en réalité formée par un arc de grand cercle, qu'on peut tracer sur la surface; les premières données de l'expérience seraient d'accord avec la Géométrie euclidienne : deux droites qui se coupent, prolongées seulement pendant quelques milles, sembleraient aller en divergeant; il y aurait des lignes parallèles en apparence qui n'accuseraient aucune tendance à se rapprocher l'une de l'autre; et les hommes pourraient très bien réputer établi par l'expérience cet axiome que deux droites ne peuvent enclore un espace, ainsi que l'axiome des lignes parallèles. Une expérience plus étendue et des mesures plus précises leur apprendraient que l'un de ces axiomes est faux, et que deux droites quelconques, suffisamment prolongées dans les deux sens, ont deux points d'intersection; ils s'élèveraient ainsi à une Géométrie sphérique, qui représenterait exactement les propriétés de l'espace à deux dimensions, soumis à leur expérience. Mais la Géométrie euclidienne, qu'ils pratiquaient à l'origine, n'en serait pas moins vraie; seulement elle s'appliquerait à un espace idéal, différent de l'espace soumis à leur expérience.

Considérons en second lieu un plan ordinaire, indéfiniment prolongé dans tous les sens, et modifions seulement la notion de distance. Nous mesurerons les distances au moyen du yard ou du pied ou de toute autre unité assez petite pour que les fractions en soient négligeables (en langage mathématique, une unité infiniment petite). Imaginons alors que la règle employée varie constamment de longueur, comme elle pourrait le faire sous l'influence d'une température variable, mais de telle façon que sa longueur actuelle dépende uniquement de sa position et de sa direction dans le plan : j'entends par là que si, pour une position et une direction données, la règle a une certaine longueur, elle reprendra la même longueur chaque fois qu'elle reprendra la même position et la même direction. Le segment de droite ou l'arc de courbe compris entre deux points pourrait se mesurer de la manière habituelle au moyen de cette règle : il aurait une longueur parfaitement déterminée; la mesure, recommencée autant de fois qu'on le voudrait, donnerait toujours le même résultat; mais la distance ainsi obtenue ne serait plus du tout ce que nous appelons une distance. Autre exemple : supposons qu'un mobile parte d'un point donné, dans une direction donnée : si sa vitesse dépend uniquement de la configuration du terrain, et si la distance de deux points, estimée suivant une trajectoire donnée, se mesure par la durée du parcours, cette distance aura une valeur bien déterminée, mais ce ne sera plus ce que nous appelons une distance. A cette nouvelle conception de la distance correspondra un nouveau système géométrique, une Géométrie non euclidienne à deux dimensions : tous les théorèmes impliquant la notion de distance devront être modifiés.

Nous pouvons aller plus loin : à mesure que la règle s'éloigne de l'origine fixe choisie dans le plan, supposons qu'elle devienne de plus en plus courte; si le raccourcissement s'opère suffisamment vite, il peut arriver qu'une distance, finie au sens ordinaire du mot, devienne infinie. On aura beau ajouter à elle-même la règle toujours plus courte, on ne viendra jamais à bout de la distance en question. Autour de l'origine s'étendra une zone finie dont le contour sera (dans la nouvelle acception du mot *distance*) à une distance infinie de l'origine : nous ne pourrons jamais atteindre avec notre règle les points situés en dehors de cette zone; leur ensemble constitue une *terra incognita* ou mieux une terre impossible à connaître, au point de vue mathématique un espace imaginaire ou impossible; et l'analogue de l'espace plan sera celui de la zone considérée : il sera fini au lieu d'être infini.

En particularisant la loi de raccourcissement, nous retrouvons la Géométrie non euclidienne de Lobatchefsky. Mais ce mode de génération du système ne met pas en évidence ses rapports avec la Géométrie sphérique : la Géométrie sphérique, celle d'Euclide et celle de Lobatchefsky doivent être considérées comme les trois Chapitres d'une même doctrine, savoir la théorie d'un espace de courbure constante, positive, nulle ou négative; en d'autres termes, ce sont les géométries planes correspondant à trois conceptions différentes de la distance; d'où les trois géométries elliptique, parabolique et hyperbolique de Klein.

Passons maintenant à la Géométrie de l'espace; nous pouvons, par une modification de l'idée de distance, analogue à celle qui nous a conduits au système de Lobatchefsky, passer de notre système actuel à un système non euclidien. L'autre mode de génération d'un système non euclidien nous obligerait à considérer notre espace comme un espace plan à trois dimensions, situé dans un espace à quatre dimensions, et qui serait à ce dernier ce que le plan est à l'espace ordinaire : il faudrait alors substituer à cet espace plan un espace courbe à trois dimensions, de courbure constante positive ou négative. En regardant l'espace réel sur lequel porte notre expérience comme pouvant être non euclidien, Riemann semble avoir eu en vue plutôt de modifier l'idée de distance que de traiter cet espace comme un lieu situé dans l'espace à quatre dimensions.

Je viens de prononcer le mot d'*espace à quatre dimensions*. Quelle signification donner à ce mot? Peut-il même en avoir une? On peut admettre d'emblée qu'il nous est impossible de concevoir une quatrième dimension de l'espace ; l'espace que nous concevons et l'espace réel sur lequel porte notre expérience n'ont l'un et l'autre que trois dimensions. Mais nous pouvons, ce me semble, concevoir un espace qui n'ait que deux dimensions ou même n'en ait qu'une. Imaginons des êtres raisonnables, vivant dans un espace a une dimension (une ligne) ou dans un espace à deux dimensions (une surface), et ayant de l'espace une idée appropriée à leur mode d'existence : pour eux l'espace à deux ou à trois dimensions serait aussi inconcevable que l'est pour nous un espace à quatre dimensions. Et ici se présente une question bien curieuse au point de vue théorique. Admettons que l'espace à une dimension soit une ligne droite, qui se transforme ensuite en ligne courbe : y aurait-il pour les habitants de cet espace un indice quelconque du changement survenu? ou, si la ligne était primitivement courbe, existerait-il quelque phénomène propre à leur suggérer l'idée de cette courbure? Il est probable que non, car c'est à peine s'il existe une géométrie à une dimension. Mais supposons qu'il s'agisse d'un espace à deux dimensions, que cet espace soit primitivement un plan, et que ce plan soit ensuite transformé en une surface courbe, ou bien que l'espace en question soit primitivement une surface courbe. Dans le premier cas, le changement opéré serait perceptible aux habitants, parce que la géométrie applicable à leur espace primitif (notre Géométrie euclidienne) cesserait de s'appliquer; mais ce changement ne serait pas conçu par eux comme une déformation du plan, car cette conception impliquerait l'idée d'un espace à trois dimensions. Dans le second cas, leur géométrie dériverait des propriétés de la surface courbe qui constituerait leur espace; ce serait leur Géométrie euclidienne. Mais arriveraient-ils jamais à notre système plus simple? Revenons au cas où l'espace à deux dimensions est un plan, et imaginons que les êtres qui vivent dans cet espace soient familiers avec notre Géométrie euclidienne du plan : quand même ils ne pourraient concevoir une troisième dimension, rien ne les empêcherait, s'ils étaient conduits à cette notion nouvelle par leur géométrie ou par une autre voie quelconque, de créer une science analogue à notre géométrie de l'espace.

Il est clair que toutes ces questions se posent à nous, à propos de l'espace à trois dimensions tel que nous le concevons et tel que l'expérience nous le fait connaître. Et j'ai à peine besoin de dire que toute la difficulté réside dans le premier pas à franchir, et que, si l'on admet quatre dimensions, on peut en supposer autant qu'on voudra. Mais, quelle que soit la réponse à ces questions, une branche spéciale des Mathématiques existe, qui est virtuellement, sinon réalisée en fait, une Géométrie analytique à n dimensions. J'aurai à revenir là-dessus.

Arrivons maintenant à la notion fondamentale dont nous avons déjà parlé, celle de quantité imaginaire en Algèbre et d'espace imaginaire en Géométrie. Je la rattacherai à deux grandes découvertes mathématiques, faites dans la première moitié du XVII^e siècle : d'une part, la représentation, due à Harriot (1560-1621), d'une équation de la forme $f(x) = 0$, et conséquemment la notion des racines d'une équation algébrique déduite de la décomposition de $f(x)$ en facteurs linéaires (l'*Algèbre* d'Harriot, publiée après sa mort, date de 1631); d'autre part, la méthode des coordonnées, due à Descartes et exposée dans sa *Géométrie* sous forme de supplément au *Discours de la Méthode* (Leyde, 1637).

Il résulte immédiatement de la forme donnée par Harriot à toute équation algébrique qu'une équation d'ordre n à coefficients réels doit avoir n racines. Mais ces n racines ne sont pas nécessairement réelles. En particulier, une équation du second degré peut n'avoir aucune racine réelle; mais, si l'on convient que l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet la racine i, elle admet aussi la racine $-i$, et l'on reconnaît aisément que toute équation du second degré à coefficients réels admet deux racines de la forme $a \pm bi$, a et b étant des quantités réelles. Nous sommes ainsi conduits à la conception d'une quantité imaginaire de la forme $a + bi$, a et b étant des quantités réelles, qui peuvent prendre toutes les valeurs, positives et négatives, sans exclure zéro. Dans le cas général où les coefficients sont eux-mêmes imaginaires, on a ce théorème : *Une équation d'ordre n a toujours n racines;* ce sont alors des imaginaires, et l'on voit que la forme $a + bi$ est la seule sous laquelle se présentent les quantités imaginaires. Si l'on ajoute, si l'on multiplie ou si l'on combine d'une manière quelconque des quantités imaginaires de cette forme, on obtient comme résultat une imaginaire de la même forme. Ce sont là les quantités que l'on considère en Analyse, et l'Analyse est précisément la science de ces quantités. Remarquons que le caractère principal d'une imaginaire $a + bi$ réside dans la réalité des deux coefficients a et b (le symbole se réduit, quand b est nul, à sa partie réelle a, et, quand a est nul, à sa partie purement imaginaire bi). L'idée maîtresse de l'Analyse est de substituer aux quantités réelles ces quantités imaginaires ou complexes de la forme $a + bi$.

Dans la géométrie cartésienne, une ligne est représentée par une équation entre les coordonnées (x, y) d'un quelconque de ses points. Pour la ligne droite, cette équation est du premier degré; le cercle et plus généralement les coniques ont des équations du second degré; en général, lorsque l'équation est d'ordre n, la courbe qu'elle représente est dite d'ordre n. Étant données deux courbes, les équations qui leur correspondent sont vérifiées par les coordonnées (x, y) de leurs points d'intersection; on en déduit une équation d'un certain ordre par rapport à l'une ou l'autre des coordonnées d'un point d'intersection. Dans le cas d'une droite ou d'un cercle, cette équation est du second ordre; elle a deux racines réelles ou imaginaires, à chacune desquelles correspond une seule valeur de l'autre coordonnée : il y a par suite deux points d'intersection, c'est-à-dire qu'une droite et un cercle se coupent *toujours* en deux points, réels ou imaginaires. C'est ainsi que nous sommes conduits par l'Analyse à la notion géométrique de points imaginaires. Notre conclusion, relative à l'existence de deux points d'intersection, ne peut être contredite par l'expérience; vous n'avez qu'à prendre une feuille de papier, à y tracer une droite et un cercle, et à faire l'essai. Mais vous pourriez objecter ou du moins être fortement tentés d'objecter que cette conclusion n'a pas de sens. Alors se pose cette question : qu'est-ce qu'un point imaginaire? et cette autre question : comment peut-on arriver à cette notion par la Géométrie?

Il existe en Perspective une construction bien connue, pour faire passer une droite par l'intersection de deux autres qui ne se coupent pas dans les limites de l'épure. On peut vérifier que la troisième droite passe par le point d'intersection des deux premières; on n'a qu'à les prolonger toutes trois suffisamment; si, au lieu de deux droites, on donne deux arcs de cercle qui ne se coupent pas, on sait construire la corde commune aux deux cercles dont ces arcs font partie, si ces deux cercles se coupent; dans ce cas, en achevant les cercles, on vérifiera que la droite tracée passe par leurs points d'intersection: si les cercles ne se coupent pas, on verra qu'elle ne les coupe ni l'un ni l'autre. Mais la construction géométrique étant la même dans les deux cas, nous dirons que dans le second la droite passe encore par les deux points d'intersection des cercles considérés.

On peut donc répondre à l'objection que cette conclusion est parfaitement naturelle, pourvu qu'on admette l'existence de points imaginaires, tandis que, si l'on ne veut pas l'admettre, il est absurde de dire, quand les cercles ne se coupent pas, que la droite passe par leurs points d'intersection. La difficulté n'est pas levée par la méthode analytique, qui ne fait que la déplacer en provoquant cette question : existe-t-il dans un plan un point dont les coordonnées ont des valeurs imaginaires? Quoi qu'il en soit, on considère en géométrie analytique des points imaginaires qui s'introduisent dans la théorie par voie analytique ou par voie géométrique, ainsi que nous l'avons expliqué.

Les mêmes considérations s'étendent à la géométrie de l'espace, et nous amènent à la conception d'un espace imaginaire, lieu de points et de figures imaginaires.

J'ai employé le mot *imaginaire* de préférence au mot *complexe,* et je répète que, dans tout ce qui précède, l'imaginaire comprend le réel comme cas particulier. Mais, cela étant dit une fois pour toutes, l'emploi du mot *imaginaire* devient inutile dans un grand nombre de cas; il pourrait parfois même donner lieu à des malentendus. Quand on dit par exemple qu'un problème a n solutions, on entend parler de solutions imaginaires dans l'acception générale du mot; mais, si l'on disait que le problème a n solutions imaginaires, le mot *imaginaire* prendrait un sens opposé au mot *réel.* Je donne cette explication, parce qu'elle me paraît montrer mieux que toute autre quelle place tient dans la Science la notion d'imaginaire : elle est impliquée et présupposée (sauf quand on spécifie précisément le contraire) dans toutes les conclusions de l'Analyse et de la Géométrie modernes. C'est, comme je l'ai dit, la notion essentielle qui embrasse et pénètre toutes les parties de l'édifice mathématique.

Je parlerai plus loin de l'extension considérable que cette notion a fait prendre à la Géométrie; mais je veux pour le moment m'occuper de ses rapports avec la théorie des fonctions. Dans le principe, une fonction algébrique ou transcendante ($\sqrt{x}$, $\sin x$, $\log x$) était regardée comme entièrement connue lorsqu'on en connaissait la valeur pour toutes les valeurs réelles, positives ou négatives de la variable. Et, lorsque certaines de ces valeurs rendaient la fonction imaginaire, on se bornait à dire qu'à ces valeurs de la variable ne correspondait aucune valeur réelle de la fonction. Mais à présent on ne s'en tient plus là : une fonction n'est réputée connue que si l'on connaît sa valeur (généralement imaginaire et de la forme $X + iY$) pour toute valeur imaginaire $x + iy$ de la variable.

Cette conception nouvelle conduit naturellement au problème de la représentation géométrique d'une variable imaginaire. On représente la variable imaginaire par un point du plan dont les coordonnées sont x et y. Cette idée, due à Gauss, date de l'année 1831 environ. Nous figurons ainsi la succession des valeurs de la variable imaginaire $x + iy$ par le mouvement du point représentatif qui décrira par exemple une courbe fermée. De même la valeur $X + iY$ de la fonction peut être représentée par un point (pris pour plus de clarté dans un autre plan) dont les coordonnées sont X et Y.

Nous pouvons envisager deux points se mouvant chacun dans son plan, de façon que les positions successives de l'un déterminent celles de l'autre : ces deux points seront, par exemple, la pointe et le crayon d'un pantographe. On peut faire décrire au premier point telle figure qu'on voudra, on obtiendra une figure correspondante décrite par le second : si le pantographe est bon, la copie sera semblable au modèle; avec un mauvais pantographe on aura une copie déformée; mais la seconde figure sera toujours une copie plus ou moins réussie de la première, telle qu'à tout point de l'une corresponde un point de l'autre.

Il existe une relation remarquable entre les deux figures qui représentent la marche de la variable imaginaire et celle de la fonction. C'est la relation propre à la projection orthomorphique, celle qui existe entre une portion de la surface de la terre et la représentation de cette surface sur une carte faite à l'aide de la projection stéréographique ou de la projection de Mercator : une aire infiniment petite, prise dans une figure, est représentée dans l'autre figure par une aire infiniment petite semblable à la première. Il pourra se présenter de grandes variations d'échelle entre les diverses parties de la figure, mais la similitude subsistera : si une aire a pour contour une circonférence, l'autre aire aura aussi pour contour une circonférence; si une aire est terminée par un triangle équilatéral, il en sera de même de l'autre.

J'ai supposé, pour simplifier, qu'à tout point d'une des figures correspondait dans l'autre figure un point et un seul. Mais, dans le cas général, à chaque point d'une des figures correspondent dans l'autre un certain nombre de points. De là de nouvelles relations très compliquées dont je dois dire un mot. Supposons qu'à chaque point de la première figure correspondent dans la seconde deux points, l'un marqué en rouge, si l'on veut, l'autre en bleu. La seconde figure se compose de deux images de la première, une image rouge et une image bleue, tracées toutes les deux sur la même feuille. La difficulté provient de ce que les deux images ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Considérons, par exemple, dans la première figure une courbe fermée quelconque — disons un ovale pour abréger — : cet ovale sera représenté dans la seconde figure tantôt par un ovale rouge et un ovale bleu, tantôt par un ovale ayant une moitié rouge et une moitié bleue. Autrement dit, si l'on considère un point qui se meuve d'une manière continue, mais quelconque dans la première figure pour revenir à son point de départ, et qu'on suive le mouvement des points correspondants de la seconde figure, il pourra très bien arriver qu'un point d'une certaine couleur change brusquement de position et fasse un saut d'un endroit à un autre; en sorte que, si l'on veut obtenir dans la seconde figure une trajectoire continue, on devra, par intervalles, quitter le point rouge pour suivre le bleu ou le bleu pour le rouge. C'est qu'alors la première figure présente certains points critiques, appelés *points de ramification* (*Verzweigungspunkte*) et qu'on y trace des lignes reliant ces points critiques : la nature de ces points et la forme de ces lignes déterminent la distribution et la succession des contours dans la seconde figure. Mais je ne puis m'engager plus avant dans cette théorie. Je n'ai parlé de couleur que pour simplifier le langage. J'ajoute qu'en ce qui concerne les deux figures j'ai suivi MM. Briot et Bouquet plutôt que Riemann, qui a indiqué pour les fonctions d'une variable imaginaire un autre mode de représentation.

Nous avons parlé d'une variable $x+iy$ et d'une fonction de cette variable $\varphi(x+iy)=X+iY$. Mais on peut aussi bien présenter cette théorie en faisant usage d'une courbe plane. En effet, $x+iy$ et $X+iY$ sont deux variables imaginaires liées par une équation : soient u et v leurs valeurs, $F(u,v)=0$ l'équation qui les lie. Si l'on regarde u et v comme les coordonnées d'un point du plan, ce point appartiendra à la courbe représentée par l'équation précédente. Cette courbe, en prenant le mot dans son sens le plus étendu, est formée par la série entière des points réels ou imaginaires dont les coordonnées satisfont à l'équation $F(u,v)=0$, et ces points sont fournis par les deux figures correspondantes, que nous considérions précédemment dans leurs deux plans. Mais, au sens habituel, une courbe est la suite des points réels dont les coordonnées u et v vérifient une équation.

En Géométrie, c'est la courbe qui nous occupe et que nous étudions, qu'elle soit définie par son équation ou qu'elle soit donnée de quelque autre manière. Mais on peut aussi se servir d'une courbe pour représenter son équation, c'est à-dire pour représenter la relation qui existe entre deux variables x et y prises pour les coordonnées d'un point de la courbe. Tout le monde sait qu'on emploie ainsi des courbes dans une foule de cas, pour les fluctuations du baromètre, pour les courses nautiques de Cambridge, pour les fonds publics. Pareillement, il est avantageux dans l'Analyse, pour représenter les relations entre trois variables quelconques x, y, z, de les considérer comme les coordonnées d'un point de l'espace. Par la même raison, il est au moins désirable de considérer quatre et en général n variables comme les coordonnées d'un point dans un espace à n dimensions. En partant de l'hypothèse d'un tel espace et de points déterminés dans cet espace par leurs coordonnées, on a pu établir un système de géométrie à n dimensions, analogue à tous les points de vue à notre géométrie à deux et à trois dimensions. C'est là une généralisation considérable, propre à représenter les relations entre plusieurs variables. Voici ce que je disais dans mon Mémoire *Sur la géométrie abstraite* (1869) : « Cette science se présente sous deux aspects : comme une extension légitime de la géométrie ordinaire à deux et à trois dimensions, et comme une nécessité manifeste de notre Géométrie et de l'Analyse générale. En effet, quand on a affaire à des quantités liées entre elles par des relations quelconques et pouvant d'ailleurs varier ou être déterminées, on rend souvent plus sensible la nature de leur liaison en regardant ces quantités, s'il n'y en a pas plus de trois, comme les coordonnées d'un point du plan ou de l'espace; s'il y a plus de trois variables, la complication augmente et rend par là-même plus grande la nécessité d'une représentation analogue. Mais on n'obtient cette représentation qu'en introduisant la notion d'un espace du nombre de dimensions voulu, et en instituant une géométrie correspondante La Géométrie plane a déjà fourni un exemple de cette nécessité, à propos du nombre des courbes d'espèce donnée qui satisfont à certaines conditions; pour mieux saisir ces relations, il a été avantageux de considérer les paramètres dont ces courbes dépendent comme les coordonnées d'un point situé dans un espace à plusieurs dimensions. »

Il faut avoir présent à l'esprit que l'espace, quel que soit le nombre de ses dimensions, doit toujours être considéré comme un espace imaginaire ou complexe, tel que l'espace à deux ou à trois dimensions de la Géométrie ordinaire : autrement, les avantages de cette représentation seraient complètement perdus.

J'ai parlé à plusieurs reprises des coordonnées cartésiennes : on leur substitue fréquemment en Géométrie plane les coordonnées trilinéaires qui peuvent être considérées comme absolument indéterminées quant à leur valeur même : ainsi, en les appelant x, y, z, ces variables ne sont pas égales, mais proportionnelles aux distances d'un point à trois droites fixes, et le point sera déterminé par les rapports de ses coordonnées (x, y, z). C'est ainsi que, dans la géométrie à une seule dimension, on peut déterminer un point par le rapport de ses deux coordonnées x et y, ces coordonnées étant proportionnelles aux distances du point considéré à deux points fixes. En général, dans la géométrie à n dimensions, un point sera déterminé par les rapports de $n+1$ coordonnées $(x, y, z, \ldots)$. Cela revient, au point de vue analytique, à remplacer les variables primitives par des fractions de même dénominateur; par suite, à la place de fonctions rationnelles et entières, mais non homogènes, des n variables primitives, s'introduisent des fonctions rationnelles et entières et de plus homogènes de $n+1$ variables, C'est ce qu'on appelle des *formes* (*quantics*). Ainsi les formes binaires correspondent à la géométrie à une dimension, les formes ternaires à la géométrie à deux dimensions, et ainsi de suite.

Je vais faire une digression, mais je tiens à vous parler de la représentation sur un plan des points et des figures de l'espace. En Perspective, on représente un point de l'espace par la trace sur le plan du tableau (supposé transparent) de la droite qui joint ce point à l'œil. En répétant cette construction pour chaque point d'un objet, on représente cet objet par une sorte de dessin. Mais une telle représentation est imparfaite, car elle ne détermine pas l'objet. On ne peut pas sur un seul dessin apprécier la forme d'un objet : en effet, le point qui correspond dans l'objet à un point du tableau n'est pas déterminé; il est n'importe où sur la droite qui joint l'œil au point du tableau. Pour déterminer les objets, il faut deux perspectives, par exemple un plan et une élévation, dont l'ensemble forme une épure dans le système de Géométrie descriptive de Monge. Mais il est théoriquement plus simple d'employer deux perspectives faites sur le même plan, en plaçant l'œil en deux points de vue différents. Alors un point de l'espace est représenté sur le plan de projection par l'ensemble de deux points : ces points sont tels que la droite qui les joint passe par un point fixe du plan (la trace sur le plan de projection de la droite qui joint les deux points de vue). Dans ce système, une figure de l'espace est représentée dans le plan par deux figures, telles que leurs points correspondants sont tous en ligne droite avec le point fixe. Réciproquement, deux figures de cette espèce remplacent complètement la figure de l'espace : elles permettent d'effectuer dans le plan toutes les constructions à faire dans les figures de l'espace, et servent à démontrer les propriétés de ces figures. Ces principes ont reçu récemment une extension curieuse. Le géomètre italien Véronèse a considéré deux figures de l'espace, telles que leurs points correspondants soient en ligne droite avec un point fixe, comme représentant une figure dans l'espace à quatre dimensions, et en a fait usage pour démontrer les propriétés de ces nouvelles figures.

(*A suivre.*)