

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

## **Faculté de Paris, sujets de compositions donnés aux examens de licence ès Sciences mathématiques**

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2<sup>e</sup> série,*  
tome 8, n° 1 (1884), p. 298-312

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1884\\_2\\_8\\_1\\_298\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_298_1)

© Gauthier-Villars, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

FACULTÉ DE PARIS,  
SUJETS DE COMPOSITIONS DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE  
ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE 1881.

*Mécanique.* — 1° On considère la surface engendrée par une cycloïde ACB tournant autour de sa base AB. Un point matériel M non pesant est assujéti à rester, dans chacune de ses positions, sur cette surface que l'on suppose parfaitement polie; le point M est soumis à l'action d'une force perpendiculaire à AB dirigée vers AB et dont l'intensité est proportionnelle à la distance  $r$  du mobile AB. Déterminer le mouvement et discuter les différents cas qui peuvent se présenter; fixer les limites entre lesquelles  $r$  peut varier.

*Données :*  $a$ , diamètre du cercle générateur de la cycloïde;  $v_0$ , vi-

tesse initiale;  $r_0$ , valeur initiale de  $r$ ;  $\varepsilon$ , angle de  $v_0$  avec la tangente au parallèle du point de départ;  $k$ , intensité de la force d'attraction exercée sur l'unité de masse placée à la distance 1 de AB.

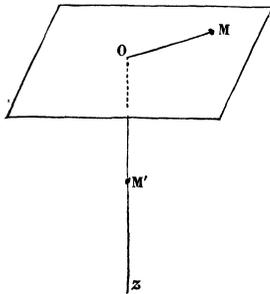
2° Un triangle isocèle rectangle AOB, de forme invariable et dans lequel le sommet O de l'angle droit est fixe, est animé d'un mouvement quelconque; soient, à un instant quelconque, AA', BB' les vitesses des points A et B. Démontrer que la projection de AA' sur OB est égale à la projection de BB' sur AO et que, des deux angles formés, l'un par les directions AA' et OB, l'autre par les directions BB' et OA, l'un est aigu et l'autre obtus.

SESSION DE NOVEMBRE 1881.

*Analyse* (4 heures). — Déterminer les fonctions  $u$ ,  $v$  de deux variables indépendantes  $x$ ,  $y$  dont les différentielles totales vérifient les relations

$$\begin{aligned} du &= (3u + 12v)dx + (2u + 12v)dy, \\ dv &= (u + 2v)dx + (u + v)dy. \end{aligned}$$

*Mécanique* (4 heures). — 1° On considère deux points matériels M, M', de masses  $m$  et  $m'$ , que l'on suppose non pesants.



L'un d'eux M est assujéti à demeurer sur un plan P; l'autre M' à demeurer sur une droite OZ perpendiculaire au plan P. De plus, ces deux points sont reliés par un fil tendu MOM', de longueur  $l$ , qui passe par une petite ouverture pratiquée en O dans le plan P. On demande de déterminer le mouvement de ces deux points, en supposant qu'ils se repoussent proportionnellement à la distance,

la répulsion mutuelle à la distance  $r$  étant égale à  $\mu$ . On négligera le frottement et l'on représentera par  $r_0$  la distance du point  $O$  à la position centrale  $M_0$  de  $M$ , par  $v_0$  la vitesse initiale de  $M$  qui sera supposée perpendiculaire à  $OM_0$ .

2° Un point  $M$  se meut d'un mouvement uniforme sur une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit; on demande de démontrer que, toutes les fois que le point  $M$  traverse un plan  $(P)$ , la normale à la trajectoire, située dans ce plan  $(P)$ , ira passer par un point fixe de ce plan.

On projette le point  $M$  sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre parallèlement à la tangente à l'hélice au point où elle coupe ce plan. Soit  $m$  la projection de  $M$ . On construit, à un instant quelconque, la grandeur géométrique  $mm'$  qui représente l'accélération du point  $m$ . On demande le lieu du point  $m'$ . Dans quel cas ce lieu se réduira-t-il à une droite? Quelle est la trajectoire du point  $m$ ?

*Astronomie* (2 heures). — Sachant que les coordonnées écliptiques d'un astre sont, à une certaine époque,

$$\begin{aligned}\lambda &= 2^\circ 51' 4'', 55 \quad (\text{latitude}), \\ L &= 9^\circ 33' 38'', 38.\end{aligned}$$

On propose de trouver les coordonnées équatoriales correspondantes. L'obliquité de l'écliptique est supposée égale à

$$23^\circ 27' 32'', 935.$$

SESSION DE JUILLET 1882.

*Mécanique* (4 heures). — 1° Deux points matériels  $M, M'$  de masses  $m, m'$  sont fixés aux extrémités d'un fil flexible et inextensible de longueur  $l$  qui passe sur une très petite poulie  $O$ . Le point  $M$  est assujéti à se mouvoir sans frottement sur une courbe plane donnée  $C$  dont le plan passe par  $O$ . Le point  $M'$  est soumis à une force répulsive émanant du point  $O$  inversement proportionnelle au carré de la distance  $OM'$  et dirigée constamment suivant la droite  $OM'$ . Étudier le mouvement des deux points  $M, M'$ .

On représentera par  $\frac{1}{2}m'\mu$  la force répulsive à l'unité de distance. On prendra l'équation de la courbe  $(C)$  en coordonnées polaires

sous la forme  $\theta = f(r)$ ,  $r$  désignant la distance OM. On suppose nulle la vitesse initiale du point M; celle de M' sera supposée dirigée dans le plan de la courbe (C) perpendiculairement au rayon vecteur initial et sa grandeur sera représentée par  $\sqrt{\frac{u}{k}}$ ,  $k$  étant donné.

On ramènera le problème aux quadratures. Trouver en particulier la trajectoire du point M' lorsque la courbe C est une spirale logarithmique ayant pour pôle le point O.

2° Une circonférence roule sans glisser sur une circonférence fixe de même rayon et l'on considère la courbe fermée décrite pendant un tour complet, par un point de la circonférence mobile.

Trouver le centre de gravité de cette courbe en supposant la densité en chaque point inversement proportionnelle au rayon de courbure de la courbe en ce point.

*Astronomie* (2 heures). — On donne la distance zénithale apparente de Vénus  $z' = 64^{\circ}43'$  et la parallaxe horizontale  $\varpi = 20''$  correspondant à la même distance au centre de la Terre supposée sphérique. On demande la distance zénithale géocentrique.

Vérifier le résultat en déterminant inversement la distance zénithale apparente au moyen de la distance zénithale géocentrique.

*Analyse* (4 heures). — Soient OX, OY, OZ trois axes rectangulaires. Une surface réglée est engendrée de la manière suivante : le plan ZOA tourne autour de Oz; la génératrice D, située dans ce plan, fait avec Oz un angle constant dont la tangente est  $\lambda$ ; elle intercepte sur OC un segment OC égal à  $\lambda a \theta$ ,  $a$  désignant une ligne donnée et  $\theta$  l'angle des plans ZOZ, ZOA.

1° Calculer l'expression du volume limité par la surface réglée et les plans XOY, ZOZ, ZOA, l'angle  $\theta$  des deux derniers étant moindre que  $2\pi$ .

2° Calculer l'aire de la portion de surface limitée par les plans XOY, ZOZ, ZOA.

3° Trouver l'équation en coordonnées polaires des projections sur le plan XOY des lignes asymptotiques de la surface.

*Géométrie descriptive* (2 heures). — Perspective d'un cube

ABCD<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, reposant par une face ABCD sur le plan horizontal.

*Données* : On prendra comme point de fuite principal le centre de la feuille.

La ligne d'horizon est parallèle aux petits côtés de la figure.

La ligne de terre est à 0<sup>m</sup>,12 au-dessus de la ligne d'horizon.

La distance principale est de 0<sup>m</sup>,14.

On donne enfin par leurs perspectives deux des sommets du cube situés dans le plan horizontal et appartenant de plus à une même arête AB :

1° (A) à 0,03 à droite du point de fuite principal et à 0,02 au-dessus de la ligne de terre ;

2° (B) à 0,03 à gauche du point de fuite principal et à 0,06 au-dessus de la ligne de terre.

On placera le cube derrière la face verticale  $\overline{ABA_1B_1}$ .

On dessinera enfin la perspective de la circonférence inscrite dans la face supérieure du cube.

*Analyse* (4 heures). — Soient  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  trois axes rectangulaires et un parabolôide elliptique défini par l'équation

$$\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}.$$

1° Calculer la portion de volume limitée par le plan  $xoy$ , la surface du parabolôide et la surface du cylindre dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2° Déterminer les projections sur le plan  $xoy$  des trajectoires orthogonales des sections de la surface par les plans qui passent par son axe.

*Mécanique* (4 heures). — I. On donne un cône de révolution et l'on considère le plan P passant par l'axe du cône et le sommet O. Un point matériel M non pesant est assujéti à se mouvoir sur le cône; dans chacune de ses positions ce point est soumis à l'action d'une force perpendiculaire au plan (P) dirigée vers ce

plan et proportionnelle à la  $n^{\text{ième}}$  puissance de la distance  $z$  du mobile au plan.

La vitesse initiale  $v_0$  est supposée tangente au parallèle du point de départ :

- 1° Déterminer le mouvement du point M ;
- 2° Trouver l'expression de la réaction normale de la surface en fonction de la distance  $MO = r$  ;
- 3° Effectuer complètement les intégrations dans le cas de  $n = 1$ .

II. On suppose qu'un plan P soit lié invariablement à un cercle C' roulant sans glisser sur un cercle fixe C de même rayon ; de plus, le point de contact de C et de C' se meut uniformément sur C.

Trouver pour une position quelconque de P le point de ce plan dont l'accélération est nulle.

*Astronomie* (2 heures). — En un lieu de la Terre dont la latitude est  $38^{\circ}58'53''$  et dont la longitude est est, par rapport au méridien de Paris  $48^{\circ}51'15''$ , on a observé une étoile qui a  $8^{\circ}31'46'',56$  de déclinaison et  $79^{\circ}30'$  d'ascension droite absolue, sachant qu'au moment de l'observation la pendule sidérale réglée sur le méridien de Paris marque  $22^{\text{h}}22^{\text{m}}26^{\text{s}},76$ . On demande la distance zénithale et l'azimut de l'étoile au même moment.

SESSION DE NOVEMBRE 1882.

*Analyse*. — 1° Intégrer l'équation

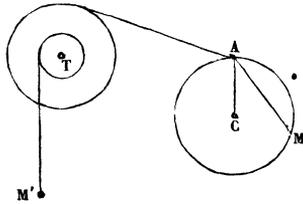
$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + px + q.$$

2° Déterminer les lignes asymptotiques du tore engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes.

*Mécanique* (4 heures). — I. Un point pesant de masse  $m$  est assujéti à rester sur une circonférence verticale C. Ce point est à l'extrémité d'un fil qui passe dans un anneau infiniment mince A, situé au point le plus haut de la circonférence C et qui vient ensuite s'enrouler sur la grande roue d'un treuil T. Le fil enroulé sur la

petite roue de ce treuil porte, à son extrémité, un point pesant  $M'$  de masse  $m'$ .

On demande de déterminer le mouvement de ce système. Après avoir traité la question d'une manière générale, on examinera particulièrement le cas où la vitesse initiale du point  $M$  serait nulle.



II. Une circonférence  $C'$  de rayon  $R$  roule, sans glisser, sur une circonférence fixe de même rayon et le point de contact des deux circonférences se déplace sur  $C$  avec une vitesse constante  $v_0$ .

On demande quelle est l'accélération d'un point du cercle  $C'$  au moment où il se trouve sur la circonférence  $C$ .

*Astronomie.* — On donne, à un certain instant, l'ascension droite

$$R = 6^{\circ}33'29'',3$$

et la déclinaison

$$\delta = -(16^{\circ}22'35'',45)$$

d'un astre.

Sachant que l'obliquité de l'écliptique est  $23^{\circ}27'31'',72$ , calculer la longitude et la latitude astronomique correspondante.

SESSION DE JUILLET 1883.

*Mécanique* (4 heures). — 1° Trois points matériels  $M, M', M''$  non pesants, de masses  $m, m', m''$ , assujettis à se mouvoir dans un plan, s'attirent mutuellement, proportionnellement aux masses et à la distance.

1° On demande de déterminer leur mouvement, on prendra pour origine la position initiale  $G_0$  du centre de gravité des trois points et l'on exprimera les coordonnées  $xy, x'y', x''y''$  des trois points en fonction du temps et des données qui font connaître la position et les vitesses initiales des trois points.

2° En supposant les vitesses initiales perpendiculaires respectivement aux rayons vecteurs, aboutissant au point  $G_0$  et supposant en outre  $m = m' = m''$ , on demande quelles relations doivent exister entre les positions et les vitesses initiales, pour que les trajectoires des trois points  $M, M', M''$  soient trois ellipses égales entre elles.

*Cinématique.* — 1° On considère un plan lié invariablement à un cercle de rayon  $R$  qui roule sans glisser sur un cercle fixe de même rayon. Un point quelconque du plan mobile décrit pendant une révolution complète une circonférence fermée; quel est dans ce plan le lieu des points dont la trajectoire limite une aire donnée  $A^2$ ?

*Astronomie* (2 heures). — Le 1<sup>er</sup> avril 1880, en un lieu qui a  $105^{\circ}30'15''$  de longitude est et  $48^{\circ}50'$  de latitude, on a observé :

1° L'heure que marquait une pendule sidérale réglée sur Paris, ce qui a donné  $5^h 20^m 59^s$ ;

2° La différence en azimut entre une étoile ayant  $272^{\circ}43'47''$  pour ascension droite et  $86^{\circ}36'12'',4$  pour déclinaison et un certain signal terrestre situé à l'est de l'étoile, ce qui a donné  $25^{\circ}20'18'',2$ .

On demande l'azimut du signal.

*Analyse* (4 heures). — 1° On donne le paraboloïde hyperbolique défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$z = \frac{xy}{C},$$

dans laquelle  $C$  désigne une constante.

Déterminer les lieux des centres de courbure des sections principales qui correspondent aux divers points de l'axe  $Ox$ .

2° On considère les intégrales

$$\int_S \frac{dz}{\sqrt{z^3 + 1}} \quad \text{et} \quad \int_{S_1} \frac{dz}{\sqrt{z^3 + 1}},$$

dans lesquelles  $S$  et  $S_1$  désignent deux contours formés de la manière suivante.

Le contour  $S$  se compose de la droite  $OA$  (que l'on fait grandir

indéfiniment) du cercle de centre O et de rayon OA, enfin de la droite AO.

Le contour  $S_1$  est la suite des trois lacets qui enveloppent les points  $a, b, c$ , dont les affixes sont les racines de l'équation  $z^3 + 1 = 0$ . Établir la relation entre les deux intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^3}},$$

à laquelle on est conduit par cette comparaison.

*Épreuve pratique* (2 heures). — On donne : 1° une perpendiculaire au plan vertical AA' sur le grand axe de la feuille, à 0<sup>m</sup>,10 au-dessus du plan horizontal;

2° Une parallèle à la ligne de terre BB' à 0<sup>m</sup>,10 en avant du plan vertical et 0<sup>m</sup>,06 au-dessus du plan horizontal;

3° Une circonférence CC' contenue dans un plan de front; son centre est sur le grand axe de la feuille, à 0<sup>m</sup>,06 en avant du plan vertical et à 0<sup>m</sup>,10 au-dessus du plan horizontal; son rayon est de 0<sup>m</sup>,04.

On demande de trouver le contour apparent horizontal de la surface réglée ayant pour directrice les trois lignes AA', BB', CC'. On indiquera à l'encre les constructions nécessaires pour trouver un point de cette courbe.

La surface est supposée opaque, prolongée indéfiniment, les plans de projection transparents.

*Analyse* (4 heures). — 1° Exprimer sous forme réelle l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = x.$$

2° Déterminer la courbe C de façon que le rayon de courbure  $\mathcal{R}$  en un point quelconque M de cette courbe et l'arc  $s = AM$ , compté à partir d'un point fixe A, vérifient la relation

$$s = \frac{\rho^2 + a^2}{a},$$

dans laquelle  $a$  désigne une ligne donnée.

*Mécanique* (4 heures) : 1° *Dynamique*. — Étudier le mouvement d'un disque circulaire homogène pesant, de masse  $M$  et de rayon  $a$ , situé dans un plan vertical et assujéti à glisser sans frottement sur une circonférence de cercle fixe de centre  $O$  et de rayon  $R > 2a$  situé dans le plan vertical.

Calculer la pression normale du disque mobile sur la circonférence.

2° *Cinématique*. — Étant donnés dans un plan fixe  $P$  un cercle fixe de centre  $O$ , et sur la circonférence de ce cercle un point fixe  $A$ , le mouvement d'un plan mobile  $P'$  sur le plan  $P$  est défini de la manière suivante : une droite  $BB'$  fixe dans le plan  $P'$  passe par le point  $A$  pendant qu'un point  $B$  fixe sur cette droite décrit la circonférence du cercle  $O$  :

1° Trouver dans ce mouvement la base et la roulette;

2° En supposant que le point  $B$  décrive la circonférence avec une vitesse constante, trouver pour une position quelconque du plan mobile  $P'$  le point de ce plan, dont l'accélération est nulle.

*Astronomie* (2 heures). — Dans un lieu dont la latitude est  $38^{\circ}58'53''$ , on a observé un astre au théodolite en un certain instant, et l'on a trouvé :

Distance zénithale.....  $z = 69^{\circ}42'30''$ ,

Azimat.....  $A = 300^{\circ}10'38''$ .

On demande les valeurs correspondantes de la distance polaire  $p$  et de l'angle horaire  $P$ .

SESSION DE NOVEMBRE 1883.

*Analyse*. — 1° On demande de calculer l'intégrale curviligne

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}},$$

prise le long du contour OABCD AO, formé de l'axe des  $x$  depuis l'origine  $O$  jusqu'en  $A$ , du cercle ABCDA et de la droite  $AO$ , les différentes parties du contour étant parcourues successivement dans l'ordre indiqué par les lettres qui les désignent. On suppose que

$OA = 2$  et que la valeur initiale du radical  $\sqrt{z^2 + z + 1}$  est prise égale à 1.

2° Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes qui sont les positions successives d'une courbe plane fixe (C) tournant sans changer de forme autour d'un point O de son plan. Application au cas où la courbe (C) est un cercle passant en O.

*Mécanique* (4 heures). — 1° Une barre pesante et homogène AB est fixée par une de ses extrémités A, et elle peut tourner librement dans l'espace autour de ce point. Un fil fixé à l'extrémité B vient passer dans un anneau infiniment mince situé sur la verticale de A, au-dessus de ce point et à une distance égale à la longueur AB de la barre; il retombe ensuite suivant la verticale OA, portant à son extrémité un poids de masse  $m$ .

On demande de trouver le mouvement de la barre.

*N. B.* — On désignera par  $2l$  la longueur et par  $\rho$  la masse de l'unité de longueur de la barre; on fera abstraction de la masse du fil.

2° On considère à un instant déterminé un système invariable en mouvement. En prenant dans ce système trois axes de coordonnées rectangulaires dont l'axe des  $z$  est l'axe de rotation instantanée, on demande d'écrire les projections sur les axes de la vitesse d'un point quelconque  $(x, y, z)$  du système.

Démontrer ensuite à l'aide de ces formules qu'il existe dans un plan quelconque non parallèle à l'axe instantané un point, et un seul, dont la vitesse est perpendiculaire au plan.

*Astronomie* (2 heures). — On donne la longitude et la latitude d'un astre,

$$L = 9^{\circ} 32' 47'', 94,$$

$$\lambda = - (2^{\circ} 51' 28'', 12).$$

Calculer l'ascension droite et la déclinaison, l'obliquité de l'écliptique étant  $\omega = 23^{\circ} 27' 32'', 9$ .

SESSION DE JUILLET 1884.

*Analyse* (4 heures). — 1° Déterminer l'intégrale générale de

l'équation différentielle

$$ax^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2xy(y - 2a) \frac{dy}{dx} - 2y^2(y - 2a) = 0.$$

Reconnaître si l'équation a des solutions singulières.

2° Les fonctions  $f(z)$ ,  $f'(z)$  sont holomorphes à l'intérieur d'un contour C comprenant l'origine; on demande la valeur de l'intégrale  $\int f'(z)L(z)dz$  prise le long d'un contour  $C_1$  intérieur à C, en partant d'un point déterminé  $z$  du contour  $C_1$ .

*Géométrie descriptive* (2 heures). — On donne les deux points

$$\begin{aligned} AA' \dots x &= 8, \quad y = 4, \quad z = 0^m, 10, \\ BB' \dots x &= -8, \quad y = 4, \quad z = 0^m, 10. \end{aligned}$$

Sur la droite ABA'B' comme base, on construit dans le plan horizontal A'B' un triangle équilatéral ABCA'B'C'. (Le sommet C est en avant.)

On considère :

1° Le cylindre vertical ayant pour base la circonférence inscrite dans le triangle ABC;

2° Le conoïde ayant pour plan directeur le plan horizontal, et pour directrices la verticale C, puis la circonférence décrite sur ABA'B' comme diamètre dans le plan de front AB.

Représenter le solide commun au cylindre et au conoïde.

On expliquera et l'on indiquera à l'encre la construction d'un point de l'intersection, et de la tangente en ce point.

*Mécanique* (4 heures). — I. Une tige homogène pesante, AB, de longueur  $l$ , est suspendue verticalement à un point fixe A; on imprime à cette tige une vitesse angulaire  $\omega_0$ ,

$$\omega_0 = \sqrt{(n + 6) \frac{g}{l}},$$

où  $g$  désigne la gravité, et  $n$  un nombre positif.

1° Déterminer le mouvement de la tige.

Au moment où la tige occupe la position verticale AB', on rend libre l'extrémité A;

2° Déterminer le mouvement de la tige dans cette seconde phase;

3° Déterminer  $n$  de manière que les deux extrémités de la tige se trouvent à un même moment sur le plan horizontal mené par le point B.

II. Deux cercles C et C' de rayon R et R' peuvent tourner indépendamment l'un de l'autre autour de leur centre commun O.

Le cercle C engrène extérieurement et le cercle C' intérieurement avec un troisième cercle  $\Gamma$ .

Le cercle C tourne avec la vitesse angulaire  $\omega$  et le cercle C' avec la vitesse angulaire  $\omega'$ ; dans ces conditions, le mouvement du cercle  $\Gamma$  est complètement déterminé.

On demande d'abord de calculer la vitesse angulaire avec laquelle se déplace la droite O $\gamma$  joignant le centre fixe O au centre  $\gamma$  du cercle  $\Gamma$ .

On considère ensuite un plan invariablement lié au cercle  $\Gamma$  : trouver à un moment quelconque la position du centre instantané de rotation de ce plan.

*Astronomie.* — On donne les coordonnées équatoriales d'une étoile, à savoir

$$\text{D} = -16^{\circ} 22' 35'', 45,$$

$$\text{A} = 6^{\circ} 33' 29'', 30;$$

on sait que l'obliquité de l'écliptique est

$$\varepsilon = 23^{\circ} 27' 31'', 72.$$

On demande les coordonnées écliptiques, latitude et longitude astronomiques de l'étoile.

*Analyse* (4 heures). — 1° Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[(t-\alpha)^2 + \beta^2]^{n+1}},$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  sont des constantes réelles ( $n$  entier);

2° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces jouissant de la propriété que les tangentes aux deux lignes de courbure en un quelconque de leurs points se projettent sur le plan des  $xy$  suivant deux droites dont les coefficients angulaires soient égaux et de signes contraires (c'est-à-dire dont les bissectrices

soient parallèles à  $Ox$  et à  $Oy$ ), déterminer celles de ces surfaces dont l'équation est de la forme

$$z = \varphi(x) + \varphi(y),$$

et intégrer l'équation différentielle de leurs lignes de courbure.

*N. B.* On suppose les axes rectangulaires.

*Mécanique* (4 heures). — I. Deux barres homogènes pesantes  $AB, A'B'$ , de même longueur  $2a$  et de même masse  $M$ , sont reliées l'une à l'autre par deux fils  $AA', BB'$ , inextensibles et sans masse de même longueur  $l$ ; la barre supérieure  $AB$  est mobile autour de son milieu  $O$  qui est fixe, et le système tout entier est assujéti à se mouvoir dans un plan vertical invariable  $xOy$ .

Étudier le mouvement de ce système.

*Nota.* — On désignera par  $Mk^2$  le moment d'inertie de chaque barre par rapport à son milieu; par  $\theta$  l'angle que fait la verticale  $Oy$  avec la droite  $OO'$  joignant les milieux des deux barres, et par  $\varphi$  l'angle que fait la droite  $OA$  avec l'horizontale  $Ox$ .

II. Un cône  $C$  de révolution est fixe; un second cône de révolution  $C'$  et de même sommet roule extérieurement sans glisser sur le premier, de telle sorte que la génératrice de contact se déplace sur  $C$  d'un mouvement uniforme.

On considère un solide lié invariablement au cône  $C'$ : trouver à un moment quelconque les points du solide dont l'accélération est, à ce moment, parallèle à l'axe instantané de rotation.

*N. B.* — On désignera par  $\alpha$  et  $\alpha'$  les demi-angles au sommet des cônes  $C$  et  $C'$ .

*Astronomie.* — On a trouvé à un certain instant et dans un certain lieu :

La déclinaison du Soleil égale à.....	23° 26' 8", 57
L'ascension droite.....	5 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 50 <sup>s</sup> , 54

(l'heure valant, comme on sait, 15°).

On demande : 1° l'obliquité vraie ou apparente  $\varepsilon$  de l'écliptique et la longitude vraie  $\odot$  du Soleil.

Sachant, en outre, qu'à l'instant considéré la longitude du nœud de l'orbite lunaire est

$$\mathcal{Q} = 272^{\circ}37',4$$

et réduisant les formules de la nutation à

$$\begin{aligned}\Psi &= -17'',24 \sin \mathcal{Q} - 1'',269 \sin 2 \odot, \\ \Omega &= 9'',233 \cos \mathcal{Q} + 0'',55 \cos 2 \odot.\end{aligned}$$

On demande : 2° l'obliquité moyenne  $\varepsilon_m$  de l'écliptique et la longitude  $\odot_m$  comptée à partir de l'équinoxe moyen du Soleil (1).

(1) On a dû remarquer une notable différence entre les sessions de juillet et de novembre, en ce qui concerne le nombre et la composition des sujets donnés. Les remarques suivantes, faites une fois pour toutes, et destinées surtout à nos lecteurs étrangers, expliquent complètement cette différence. Il y a en juillet trois séries d'examens pour la licence, que nous allons indiquer par ordre de date : 1° les élèves de première année de l'École Normale ont une composition d'Analyse de quatre heures et une épreuve pratique de deux heures (le plus souvent une épure); 2° les élèves de seconde année de la même École ont une composition de Mécanique de quatre heures et une épreuve pratique de deux heures se rapportant à l'Astronomie; 3° tous les autres candidats qui passent la licence en une fois ont une composition d'Analyse de quatre heures, une composition de Mécanique de même durée et une épreuve pratique de deux heures, qui consiste le plus souvent en un calcul astronomique.

En novembre, au contraire, il y a une seule session, consacrée aux candidats qui sont interrogés sur l'ensemble du Programme.