BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

SCHOUTE

Sur une certaine courbe du quatrième ordre douée de trois points doubles

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 278-280

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_278_0>

SUR UNE CERTAINE COURBE DU QUATRIÈME ORDRE DOUÉE DE TROIS POINTS DOUBLES (1);

Par M. SCHOUTE,
Professeur à l'Université de Groningue.

Pour analyser ce Mémoire, nous nous bornerons à énoncer les lemmes et théorèmes qu'il renferme.

1. OA et OB sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère; P et Q sont deux points de cette courbe. Si l'on construit un rectangle dont PQ est une diagonale et dont les côtés sont parallèles à OA et à OB, la seconde diagonale passe par le point O.

Réciproquement, si deux points P et Q sont situés par rapport à deux axes rectangulaires OA et OB, de manière que la deuxième diagonale du rectangle PQ dont les côtés sont parallèles à OA, OB passe par le point O, les points P et Q se trouvent sur une hyperbole équilatère dont OA et OB sont les asymptotes.

Le rectangle PQ sera nommé *rectangle asymptotique,* et l'hyperbole équilatère sera désignée par le symbole

$$H(OA, OB; P, Q, \ldots).$$

2. La tangente en P à H(OA, OB; P) est la droite antiparallèle de OP par rapport à OA et OB.

3. On trouve deux points de la tangente en P à H(OA, OB; P) en prolongeant PR et PS (R et S sont deux sommets du rectangle asymptotique PRQS) de longueurs RT, SU, égales respectivement à PR et PS, et en prenant les points d'intersection V de OT et SQ et W de OU et RQ.

Réciproquement, si les points P et Q sont situés par rapport à deux axes rectangulaires OA et OB, de manière que les points V et W obtenus comme ci-dessus sont en ligne droite avec P, le point Q se trouve sur H(OA, OB; P) et la droite PVW est tangente en P à cette courbe.

---

(1) *Over een bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten,* door P.-H. Schoute.

4. Par le centre M d'une conique K, les points à l'infini A et B de ses axes et un point quelconque P_1 de K, on peut faire passer quatre coniques tangentes à K en un point différent de P_1. Les quatre points de contact avec K de ces quatre hyperboles équilatères se trouvent sur une même hyperbole équilatère. Si P_2 est le point diamétralement opposé à P_1, cette hyperbole équilatère est $H(P_2A, P_2B; M)$. Chacune des quatre coniques coupe K en un quatrième point qui est situé sur la tangente à $H(P_2A, P_2B; M)$ menée par le point de contact de la conique correspondante avec K.

5. La développée d'une conique à centre est une courbe C_4^6 du sixième ordre et de la quatrième classe. Les tangentes à cette courbe aux quatre points où elle est coupée par une de ses tangentes concourent en un même point.

6. Lorsque le point P_1 parcourt la conique K, l'hyperbole équilatère $H(P_2A, P_2B; M)$, qui coupe K aux quatre points de contact des hyperboles du faisceau (M, A, B, P_1), enveloppe une C^4 dont les points M, A, B sont des points doubles. Les tangentes en ces points à C^4 sont tangentes à K.

7. Par un point quelconque P_1 d'une conique quelconque C^2 passent quatre coniques circonscrites à un triangle donné ABC conjugué par rapport à C_2 et, en outre, tangentes à C_2. Les points de contact de ces quatre coniques se trouvent sur une conique C_r^2 circonscrite à ABC. Le point de Brianchon par rapport au triangle circonscrit à C_r^2 dont les points de contact sont A, B, C est le point P_1. Lorsque P_1 parcourt C_2, la conique C_r^2 des points de contact enveloppe une courbe C^4 dont A, B, C sont des points doubles, les tangentes en ces points doubles étant des tangentes d'inflexion, tangentes en outre à C_2.

8. Si une courbe C^4 du quatrième ordre a trois points doubles et si les six tangentes en ces trois points sont des tangentes d'inflexion, cette courbe jouit des propriétés suivantes. Les points de contact des quatre tangentes à C_4 que l'on peut mener par un de ses points P se trouvent sur une droite l. Lorsque P parcourt la courbe C_4, la droite l enveloppe une conique; le triangle formé

par les points doubles de C_4 est conjugué à cette conique; en outre, les trois couples de tangentes à C_4 en ses points doubles sont tangentes à cette conique (extension d'un théorème sur la lemniscate démontré par M. Emile Weyr, professeur à Vienne).

9. Si une courbe K^4 de la quatrième classe a quatre tangentes doubles et si les points de contact de ces tangentes sont des points de rebroussement, elle jouit des propriétés suivantes. Les tangentes à C_4 aux quatre points d'intersection de la courbe et d'une de ses tangentes l concourent en un même point P. Quand la droite l tourne autour de C_4 en l'enveloppant, le point P décrit une conique; le triangle formé par les tangentes doubles de C_4 est conjugué à cette conique qui passe, en outre, par les points de rebroussement situés sur ces tangentes.

10. Le Mémoire est terminé par quelques remarques sur des propriétés de la courbe C^4 établies géométriquement par M. Kupper, professeur à Prague. E.-D. W.