Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Facultés des départements. Sujets de composition donnés aux examens de licence

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 211-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_211_1>

MÉLANGES.

FACULTÉS DES DÉPARTEMENTS.
SUJETS DE COMPOSITION DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE.

SESSION DE JUILLET-AOUT 1883.

Bordeaux.

Analyse. — Discuter la courbe lieu des intersections de deux droites, dont l'une se meut dans un plan parallèlement à elle-même et avec une vitesse uniforme, tandis que l'autre tourne uniformément autour d'un point fixe. On prendra pour origine des coordonnées le point fixe et, pour axe des x, une parallèle aux droites de direction constante.

Montrer que la courbe ainsi construite donnerait le moyen de résoudre le problème de la quadrature du cercle, si l'on savait la construire par un mouvement continu.

Mécanique. — 1° Démontrer succinctement le théorème des couples de quantités de mouvement pour un système de points matériels.

2° Un cercle matériel homogène, de masse M, placé dans un plan horizontal, tourne avec une vitesse angulaire donnée ω autour d'un axe vertical passant par son centre. Un point matériel, en partant du centre, marche avec une vitesse v le long d'un des rayons du cercle. On demande quelle sera la vitesse angulaire du système au temps t. Quel doit être le rapport des masses pour que cette vitesse soit devenue la moitié de la vitesse angulaire primitive au moment où le point matériel arrive à l'extrémité du rayon?

Épreuve pratique. — Établir les formules générales de la transformation de l'angle horaire et de la déclinaison en azimut et hauteur.

Calculer pour Bordeaux ($\varphi = 44^\circ 50' 19''$) l'angle horaire et l'azimut du coucher du Soleil, le 26 juillet 1883.

Déclinaison Θ, le 26, à midi vrai	$+19^\circ 41' 30'',8$
Déclinaison Θ, le 27, à midi vrai	$+19^\circ 28' 27'',2$

Besançon.

Analyse. — On donne un cylindre parabolique dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $x^2 - z = 0$; trouver sur ce cylindre une courbe C, telle que, T étant la trace sur le plan des xy de la tangente en un point quelconque M, A et B étant les intersections du plan osculateur avec Ox, Oy, le point T soit situé au milieu de AB. On demande la projection de la courbe sur le plan des xy.

Mécanique. — Un point matériel non pesant assujetti à rester sans frottement sur une parabole de paramètre p, qui tourne uniformément autour de son axe avec la même vitesse angulaire ω, est attiré vers le foyer par une force de $4h^2\rho$ proportionnelle au rayon vecteur ρ. On demande le mouvement du point sur la parabole en supposant que la vitesse initiale au sommet est

$$v_0 = p\sqrt{\omega^2 - h^2}.$$

Épreuve pratique. — Quelle est l'heure sidérale à laquelle l'étoile α de la Lyre atteint la hauteur $34^\circ 24' 10''$ au-dessus de l'horizon de Besançon?

Les coordonnées équatoriales de α Lyre sont

$$\begin{aligned} Æ &= 18^{h}33^{m}1^{s}, \\ \delta &= 38^{\circ}40'30''. \end{aligned}$$

Latitude de la Faculté, $47^{\circ}13'46''$.

Caen.

Analyse. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} - 8y = x^3 - 2x.$$

2° Calculer la valeur de l'intégrale imaginaire

$$\int \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

prise suivant la circonférence du cercle défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$x^2+y^2-2x-2y=0.$$

Mécanique. — Montrer comment varie le moment d'inertie d'un cube homogène par rapport aux diverses droites qui passent en un sommet O du cube ; déterminer les axes principaux et les moments principaux d'inertie relatifs au point O.

On suppose que le sommet O est fixe, tandis qu'aucun autre point du solide n'est soumis à l'action de forces extérieures ; le cube, libre de tourner autour du point O, est d'abord en repos lorsqu'une des faces qui aboutissent au sommet fixe vient à être choquée en son centre par une très petite sphère, animée d'une vitesse de translation donnée perpendiculaire à la face choquée. On demande le mouvement que prendront après le choc les deux corps supposés parfaitement élastiques.

Épreuve pratique. — On donne, pour le 10 août à midi vrai, la déclinaison du Soleil égale à $15^{\circ}31'34''$ et l'équation du temps égale à $5^{m}8^{s},1$; pour le 11, à midi vrai, la déclinaison est de $15^{\circ}14'53''$, l'équation du temps $4^{m}58^{s},7$. Calculer en temps moyen l'heure du coucher du Soleil pour le 10 août en un lieu dont la latitude est $50°38'44''$. On ne tient compte ni de la réfraction ni de la parallaxe.

Clermont.

Analyse. — On donne une surface du second degré et une tangente MT en un point M de cette surface. On mène un plan passant par MT. On construit dans ce plan le centre O du cercle osculateur de la section en M, puis le centre O′ du cercle osculateur de la développée de la section en O.

Lieu des points O′ lorsque le plan tourne autour de MT.

Mécanique. — Un fil sans masse de longueur constante tourne autour d'un point fixe O dans un plan vertical. Deux masses pesantes m et m' sont situées en deux points donnés du fil et éprouvent de la part de l'air des résistances proportionnelles à leurs vitesses respectives. Étudier le mouvement du système. Cas des petites oscillations.

Épreuve pratique. — Calculer la valeur de u par la formule

$$u - e \sin u = nt,$$

en prenant $t = \frac{T}{4}$, $e = 0{,}01676697$, $n = \frac{360}{T}$, $T = 365{,}2422$.

Dijon.

Analyse. — Intégration d'une équation aux dérivées partielles, linéaire par rapport aux dérivées de la fonction inconnue. Élimination de la fonction arbitraire qui figure dans l'intégrale générale. Recherche de la forme que doit avoir cette fonction pour que l'intégrale ait une détermination initiale donnée.

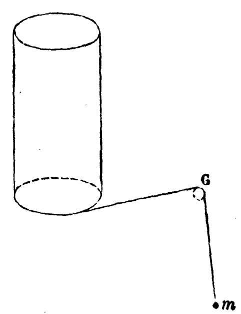
N. B. — Les candidats pourront se borner à l'examen du cas où la fonction inconnue ne dépend que de deux variables indépendantes.

Mécanique. — Un fil inextensible et sans masse, assujetti à rester sur un plan horizontal, s'enroule par une de ses extrémités sur un treuil vertical homogène, de masse M, puis sur une poulie G infiniment petite, et se termine par une masse m attirée vers G par une force inversement proportionnelle au carré de la distance.

Étudier le mouvement du système et, en particulier, la trajectoire du point de masse m dans le cas où la vitesse initiale du treuil est nulle.

Épreuve pratique. — Résoudre un triangle sphérique connaissant les éléments suivants :

$$a = 11^\circ 25' 56'',3,$$
$$B = 184^\circ 6' 55'',4,$$
$$C = 11^\circ 18' 40'',3.$$



Grenoble.

Analyse. — 1° Intégrer l'équation

$$y\left(1 + 2\frac{dy^2}{dx^2}\right) + x\frac{dy}{dx} = 0.$$

2° Arête de rebroussement de la surface enveloppe d'une sphère qui se meut en conservant un contact de second ordre avec une courbe donnée.

Mécanique. — Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur la surface d'un cône de révolution et attiré vers le sommet du cône en raison inverse du carré de la distance. Développement de la trajectoire. Réaction de la surface.

Épreuve métallique. — Calculer les coordonnées équatoriales d'une étoile dont les coordonnées écliptiques sont

$$l = 146^\circ 16' \; 6'',21,$$
$$\lambda = \;\; 0^\circ 43' 42'',67,$$

l'obliquité de l'écliptique étant

$$23^\circ 27' 24'',34.$$

Lille.

Analyse. — 1° A quels caractères reconnaît-on qu'une fonction $f(x, y, z)$ est maximum ou minimum, ou n'est ni l'un ni l'autre pour un système de valeurs x, y, z qui annule les dérivées premières de cette fonction, mais qui donne des valeurs différentes de zéro à ses dérivées secondes?

2° Trouver la fonction y de x qui, faisant acquérir une valeur donnée C à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dx,$$

rend minimum l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y'^2 - y^3) dx.$$

Mécanique. — 1° Stabilité de l'équilibre dans le cas où la fonction des forces est maximum.

2° Déterminer le mouvement du système de deux points pesants réunis par une tige rigide sans masse; chacun de ces points éprouve, en sens contraire de sa vitesse, une résistance proportionnelle à cette vitesse. On connaît la position initiale de la tige et l'on suppose les vitesses initiales des deux points situés avec la tige dans un même plan vertical.

Épreuve pratique. — Deux observations faites à deux époques différentes d'un même mois ont donné pour la déclinaison du Soleil :

1° .... $\delta = 6^\circ 26' 40''$

2° .... $\delta' = 13^\circ 12' 20''$

La différence des ascensions droites est $\alpha' - \alpha = 17^\circ 39' 9'', 6$. En déduire l'obliquité de l'écliptique.

Lyon.

Analyse. — Une surface rapportée à des axes rectangulaires a pour équation

$$(x-y)^2 z^2 - 4z + 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 0.$$

On demande de déterminer pour un point de la surface choisi à volonté : 1° les rayons de courbure des sections principales; 2° les directions de ces sections par rapport aux axes.

Intégrer l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = e^x - 1.$$

Épreuve pratique. — La comète Swift-Brooks a une orbite dont les éléments de position sont :

Longitude du périhélie	$\pi = 29^\circ 0' 1'', 4$
Longitude du nœud ascendant.......	$\Omega = 278^\circ 7' 40'', 7$
Inclinaison sur l'écliptique..........	$i = 78^\circ 4' 40'', 2$

Le 15 avril 1883, à minuit moyen de Paris, cette comète avait pour anomalie moyenne

$$v = 79^\circ 21' 41'', 6.$$

Calculer la longitude et la latitude héliocentriques correspondantes.

Marseille.

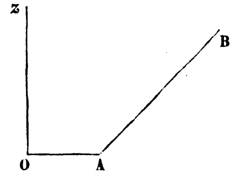
Analyse. — Trouver les lignes asymptotiques de la surface

$$z = f(x) - f(y);$$

déterminer la fonction f par la condition que les lignes asymptotiques de la première série coupent orthogonalement celles de la seconde. Trouver dans cette hypothèse les lignes asymptotiques de la surface sous forme finie. Discussion.

Mécanique. — On considère l'hyperboloïde de révolution engendré par la rotation d'une droite AB autour d'un axe fixe Oz qui ne la rencontre pas. La plus courte distance OA des deux droites est égale à a. La direction de AB fait avec Oz un angle de 45°.

Un point matériel m non pesant de masse égale à l'unité se meut sans frottement sur cet hyperboloïde sous l'action d'une force constamment dirigée vers le point O et proportionnelle à la distance. On supposera que l'attraction à l'unité de la distance est égale à k^2.



On demande d'étudier le mouvement du point M dans le cas particulier où les données initiales sont les suivantes : 1° dans sa position initiale, le point M est en A; 2° la vitesse initiale est égale à $Ka\sqrt{2}$; 3° la direction de la vitesse initiale, qui est d'ailleurs nécessairement dans le plan tangent en A, fait un angle de 60° avec Oz. On demande aussi de calculer la pression et de déduire de ce calcul une observation sur la nature de la trajectoire.

Si l'on définissait le mouvement du point M en considérant ce point comme assujetti à se mouvoir sur la génératrice AB pendant que cette génératrice tourne autour de Oz, quel serait le mouvement relatif de ce point et quelle serait à chaque instant la vitesse angulaire de rotation de AB autour de Oz.

Épreuve pratique. — Étant données la longitude λ et la latitude β d'un astre, ainsi que l'inclinaison de l'écliptique ε, calculer l'ascension droite et la déclinaison de cet astre.

$$\lambda = 235^\circ 48' 25'',6,$$
$$\beta = -\ 6^\circ 29' 48'',5,$$
$$\varepsilon = 23^\circ 27' 15'',5.$$

Montpellier.

Analyse. — Étant donnée l'équation différentielle

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

où P et Q sont des fonctions de x et de y, démontrer qu'il existe une fonction v de x et de y, telle que l'expression

$$vP\,dx + vQ\,dx$$

soit une différentielle exacte.

Donner l'expression générale des facteurs tels que v, lorsqu'on connaît l'un d'eux. Trouver un facteur v lorsqu'on sait qu'il est indépendant de x ou de y.

Mécanique. — Mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution donnée. L'axe de figure est pris pour axe des z et la force motrice, constamment parallèle à cet axe, est supposée une fonction donnée de z.

Montrer que le problème peut toujours se ramener aux quadratures. On effectuera complètement le calcul dans le cas où, la surface étant un cône dont le sommet est à l'origine, la force est proportionnelle à z.

Épreuve pratique. — 1° Le 2 mai 1883, la déclinaison du Soleil au midi vrai, à Paris, est trouvée égale à $15°21'17'',3$. Le 31 du même mois, la déclinaison est $21°54'30,6$.

L'accroissement de l'ascension droite dans l'intervalle est

$$1^h 54^m 49^s,85.$$

En déduire l'obliquité de l'écliptique.

2° Mouvement du Soleil en ascension droite. Inégalité des jours solaires. Équation du temps. On indiquera seulement, sans démonstration, les calculs ou les développements qui se rapportent à ces questions.

Nancy.

Analyse. — 1° Définition d'une intégrale prise entre des limites imaginaires données. L'intégration étant faite successivement suivant deux lignes différentes terminées aux deux points qui représentent ces limites, la valeur de l'intégrale peut rester la même.

Comme application, expliquer comment il faut mener les différentes lignes que doit suivre la variable z pour que l'intégrale obtienne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sin z}$$

ses différentes valeurs.

2° Trouver une équation différentielle entre x, y qui renferme toutes les hyperboles équilatères tracées dans un plan et ayant leur centre en un point donné (x, y sont deux cordonnées rectangulaires).

3° Intégrer, d'après les règles connues, l'équation différentielle

$$(x^2+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Mécanique. — Deux points pesants M, M′ sont réunis par une tige de longueur invariable a dont on négligera la masse. Ils sont assujettis à glisser sans frottement, le premier sur une sphère fixe de rayon a égal à la longueur de la tige, le second sur le diamètre vertical de cette sphère :

1° Étudier le mouvement du système.

2° Déterminer l'état initial de manière que le point M décrive un cercle horizontal. Quelle est, dans ce cas, la durée de la révolution?

Épreuve pratique. — En un lieu dont la latitude est

$$\lambda = 48°41'31'',$$

on a observé à un certain instant l'azimut A et la distance zénithale Z d'une étoile

$$A = 29^\circ 15' 40'',$$
$$Z = 61^\circ 48' 30''.$$

Calculer l'heure sidérale de cet instant. On connaît l'ascension droite

$$Æ = 5^h 23^m 14^s,$$

et la réfraction calculée est $1', 8$.

Poitiers.

Analyse. — Trouver l'équation générale des surfaces telles que si, par un point M de l'une d'elles, on mène la normale MP terminée au plan des xy, la longueur MP soit égale à la distance OP du point P à l'origine des cordonnées.

Déterminer celle de ces surfaces qui passe par la spirale contenue dans le plan des xy et dont l'équation est

$$\sqrt{x^2 - y^2} = a e^{m \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}.$$

Mécanique. — 1° L'extrémité A d'une droite AB se meut sur une circonférence dont le rayon est précisément égal à AB, tandis que l'extrémité B se meut sur un diamètre de cette circonférence. En quoi consiste le mouvement épicycloïdal d'une figure plane entraînée par AB.

2° Un point matériel pesant de masse m a été abandonné sans vitesse initiale relative dans un tube étroit, mobile autour d'une verticale de son plan et qui a reçu une vitesse angulaire initiale. Quelle est la valeur de la pression exercée par le point normalement au plan du tube et quelle est l'accélération qui en résulte pour le système formé par le tube et le point. Signification de l'intégrale de l'équation ainsi obtenue. On désignera par μ le moment d'inertie du tube par rapport à l'axe.

Épreuve pratique. — Le 1er janvier 1875, les coordonnées héliocentriques de Vénus avaient pour valeur

Longitude................	114°42′12″,2
Latitude boréale..........	2° 8′37″,5
Rayon vecteur............	0,7185679

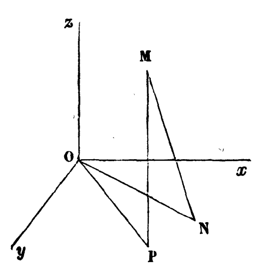
On demande de calculer les coordonnées géocentriques de cette planète, sachant que ce même jour la Terre avait pour coordonnées héliocentriques

Longitude................	100°43′10″,4
Rayon vecteur............	0,9832602

Rennes.

Analyse. — Le point P étant la projection d'un point quelconque M d'une surface sur le plan des xy et le point N étant la trace de la normale en M sur le même plan, quelle doit être cette surface pour que l'angle NOP soit constant?

Étudier les intersections des surfaces qui jouissent de cette propriété par des sphères ayant leur centre à l'origine des coordonnées.



Mécanique. — Un point matériel libre est soumis à l'action de deux forces : l'une est une attraction vers l'origine O des coordonnées inversement proportionnelle au cube de la distance et dont la valeur à l'unité de distance est μ, l'autre parallèle à Oz est de sens contraire à la composante de la première suivant cet axe et double de cette composante.

On imagine deux hyperboloïdes équilatères de centre O, de révolution autour de Oz, passant l'un par le mobile, l'autre par l'extrémité d'une droite égale et parallèle à la vitesse menée par l'origine O et l'on demande :

1° Comment varient les axes de ces deux surfaces;

2° De réduire la détermination du mouvement à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre;

3° D'intégrer cette équation et d'étudier le mouvement dans le cas particulier où le mobile placé à l'origine du temps sur le plan zx reçoit parallèlement aux y une vitesse égale au quotient de $\sqrt{\mu}$ par sa distance à l'origine. On examinera en particulier comment varient la direction de la force, la grandeur de la vitesse et quelle est la nature de la trajectoire?

Épreuve pratique. — Quelle est l'heure solaire vraie dans un lieu dont la latitude est de

$$45°52'34'',26$$

quand la hauteur du Soleil, corrigée de la réfraction, est de $29°48'37'',18$, sa déclinaison boréale étant de $15°28'32'',58$?

Toulouse.

Analyse. — 1° On demande les trajectoires orthogonales des courbes représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 + 3x^2 - ax = 0,$$

où a désigne le paramètre variable.

2° Évaluer l'aire de la boucle formée par une de ces trajectoires.

Mécanique. — Un mobile assujetti à décrire une courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$r = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta)$$

est soumis à l'action d'une force répulsive constante $2k^2a$ émanant du pôle. Il est placé en un point B de cette courbe sans vitesse initiale. On demande :

1° D'étudier le mouvement du point sur la courbe;

2° De montrer que le mobile mettra toujours le même temps pour atteindre le sommet A de cette courbe, quel que soit le point de départ B ?

3° De calculer la pression du point sur la courbe.

Épreuve pratique. — L'anomalie vraie d'une planète est $112^\circ 28' 42'',5$.

L'excentricité de l'orbite est égale au sinus de $2^\circ 3' 42'',81$.

Trouver l'anomalie moyenne.