BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

PAUL TANNERY

La perte de sept livres de Diophante

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 192-206

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_192_0>

MÉLANGES.

LA PERTE DE SEPT LIVRES DE DIOPHANTE;

PAR M. PAUL TANNERY.

On sait que des treize Livres des *Arithmétiques* annoncés par Diophante dans le préambule de son Ouvrage, il ne nous en reste que six, en dehors d'un petit Traité *Sur les nombres polygones*.

Dans son *Algebra der Griechen* (¹). Nesselmann a le premier soutenu :

1° Qu'il nous manque de Diophante beaucoup moins qu'on ne le croit habituellement, si l'on s'en tient au rapport de 6 à 13;

2° Que la lacune n'est pas à la fin, mais au milieu de l'Ouvrage, et qu'il faut la chercher principalement entre le premier et le deuxième Livre;

3° Que le désordre de l'Ouvrage remonte à une époque passablement reculée, sûrement avant le XIIIe ou le XIVe siècle, et s'est produit en Grèce même.

Ces opinions, que Nesselmann a longuement motivées, mais qu'il ne proposait toutefois que comme conjecturales et en les accompagnant de prudentes réserves, ont été adoptées après lui d'autant plus facilement qu'elles étaient relativement plus consolantes. Mais ni Hankel ni M. Cantor ne les ont appuyées par de nouvelles raisons. Je me propose de réfuter les deux premières et de préciser l'origine du désordre incontestable où se trouve ce qui nous reste de Diophante.

I.

Je dois tout d'abord écarter l'assertion de Colebrooke (²), récemment reprise par M. Charles Henry (³), que la division en

(¹) Berlin, p. 264-273; 1842.
(²) *Algebra of the Hindu's*, note M, p. LXI.
(³) *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, t. II, p. 86-90.

Livres du texte actuel est incertaine, et il me faut pour cela entrer dans quelques détails sur les manuscrits de Diophante.

Par une singulière inadvertance, Nesselmann (p. 256) ne reconnaît que cinq ou six manuscrits de Diophante; à savoir trois au Vatican (nos 191, 200 et 304), un à Paris (celui dont Bachet s'est servi, no 2379 du fonds grec de la Bibliothèque nationale), un autrefois à Heidelberg, et enfin celui de Xylander, peut-être identique au précédent (1).

Nesselmann aurait pu relever dans Heilbronner, qu'il cite plus loin (p. 281), une liste de dix-huit ou vingt manuscrits (2), et, de fait, il y en a actuellement cinq à Paris (3). A la vérité, le nombre de ceux antérieurs au XVIe siècle semble très restreint, et l'on ne peut compter que celui de Venise (Saint-Marc, 308), les trois du Vatican, et peut-être celui de Wolfenbüttel. Tous les autres doivent être considérés comme dérivés de ces derniers.

Or on a relevé, pour la division en Livres, les discordances suivantes :

Le manuscrit 200 du Vatican (XIVe siècle) divise le Livre IV en deux; il commence son Livre V à la question IV,20 de Bachet; ses Livres VI et VII sont les Livres V et VI du texte ordinaire; enfin il compte le Livre *Des nombres polygones* comme Livre VIII.

Cette division est suivie dans le manuscrit T I I I (XVIe siècle) de l'Escurial, et, comme je l'ai constaté le premier, dans le no 2485 de la Bibliothèque nationale.

Le manuscrit Ω I 15 (XVIIe siècle) de l'Escurial divise en deux le Livre I, en faisant un Livre de l'Introduction, un deuxième

(1) Xylander, le premier traducteur de Diophante (1575), était professeur à Heidelberg et il est naturel de croire que son manuscrit aura plus tard passé à la bibliothèque Palatine, où Saumaise l'a examiné sur la demande de Bachet. Cette bibliothèque a été dispersée au commencement de la guerre de Trente ans et la majeure partie en a été transportée au Vatican. Mais il ne faut pas y chercher le manuscrit palatin de Diophante; car les trois du Vatican y étaient déjà à la fin du XVIe siècle, où Joseph Auria les collationnait. En tout cas, au témoignage de Xylander, son manuscrit contenait, après le texte de Diophante, un fragment arithmétique sous le nom de Maxime Planude. Or ce fragment se rencontre généralement dans les manuscrits qui renferment les scolies attribués à ce commentateur, mais il semble être anonyme partout, sauf dans le manuscrit de Wolfenbüttel (*Gudianus* 1) et dans un de ceux du Vatican.

(2) Voir *Fabricius* (*Bibl. græc.*, éd. Harles), V, p. 643.

(3) Bibliothèque nationale, 2378, 2379, 2380, 2485. Arsenal, 8406.

des problèmes; les numéros suivants des Livres de Bachet se trouvent naturellement augmentés d'une unité et le Livre des nombres polygones est encore compté comme VIII.

Enfin ce dernier Livre serait compté comme VII dans le manuscrit 275, III C 17 de la Bibliothèque Bourbon, à Naples.

Quelle importance faut-il attribuer à ces discordances? Peut-on aller jusqu'à supposer, avec M. Charles Henry, que, dans le principe, chacun des six Livres a pu être dédoublé en deux, et qu'avec celui des nombres polygones, nous aurions tous les treize?

Cette conjecture hardie manque de tout appui réel. Au point de vue du texte, la collation des manuscrits de Paris m'a prouvé que, quoique remontant tous à un même original déjà très corrompu, les manuscrits de Diophante appartiennent à deux familles bien distinctes.

La première, que j'appellerai A, a été séparée de la seconde, B, avant la rédaction des scolies attribués à Planude, rédaction qui est propre à B. La famille A a des scolies particuliers en très petit nombre, et dont quelques-uns témoignent d'une singulière ignorance, mais le texte de Diophante y est dans un état très sensiblement meilleur, et il me servira de base dans l'édition que je prépare.

A la famille A appartiennent notamment le plus ancien manuscrit du Vatican, 191 (XIII[e] siècle?), probablement aussi le plus récent (1) (304, XV[e] siècle), mais, en tous cas, 2378 de la Bibliothèque nationale (Christophe Awer, XVI[e] siècle).

A la famille B appartiennent le manuscrit de Venise (indiqué comme du XII[e] siècle, mais qui, contenant un fragment de Planude, ne peut être que du XIV[e] siècle); celui de l'Arsenal, de la main de Christophe Awer, qui l'a noté expressément être une copie du précédent; celui de Bachet (Bibliothèque nationale, 2379), copié par Jean d'Otrante (XVI[e] siècle), qui est presque identique à celui de l'Arsenal; enfin les manuscrits 200 du Vatican (XIV[e] siècle) et 2485 de la Biblothèque nationale.

Quant au manuscrit 2380 (2) de cette dernière Bibliothèque, il

---

(1) D'après une communication verbale de M. Charles Henry.

(2) Ce manuscrit est certainement celui qui a appartenu à Charles de Montchal (Nesselmann, p. 280); il existe un double du travail d'Auria à la bibliothèque de Milan.

renferme le texte établi par Auria avec la collation des trois manuscrits du Vatican; quoiqu'on ne puisse évidemment regarder cette collation complète, elle suffit pour établir que notre manucrit 2485 est bien, comme on pouvait le penser *a priori*, une copie et une copie très fidèle du manuscrit 200 du Vatican.

Le fait que la discordance dans la division en Livres ne correspond nullement à la division en familles d'après l'état du texte prouve que cette discordance n'a pas une origine bien ancienne. L'examen de notre manuscrit 2485 permet d'ailleurs d'en reconnaître la source.

Pour les titres des trois premiers Livres, il les donne tout au long comme les manuscrits ordinaires des deux familles. Διοφάντου ἀλεξανδρέως Ἀριθμητικῶν α', β' ou γ'. Mais ensuite il ne donne plus que l'abrégé Διοφάντου δ', ε', ς', ζ' ou η'. Il faut savoir, en outre, que les titres et les initiales des problèmes sont en rouge, que bon nombre des initiales manquent, et que certaines confusions qui en résultent montrent qu'elles manquent aussi, au moins en partie, dans le manuscrit 200 du Vatican.

Il y a là un fait bien connu en paléographie; ces titres et initiales en rouge, ordinairement accompagnés d'ornements calligraphiques, étaient très souvent écrits après coup, parfois par une autre main, et sans avoir l'original sous les yeux. Un blanc laissé mal à propos a suffi dès lors pour bouleverser le numérotage des Livres de Diophante, ce qui a eu lieu de même dans d'autres manuscrits d'autres auteurs.

L'erreur était d'autant plus facile que le Livre IV contient relativement plus de problèmes que les autres (1); mais il est incontestable aussi que la division du manuscrit 200 n'est nullement rationnelle au point de vue des matières.

Les autres discordances signalées doivent recevoir la même explication, et il faut évidemment s'en tenir à la division et aux titres reconnus par les manuscrits les plus anciens dans chaque famille.

---

(1) Voici les nombres des problèmes par Livres, suivant le numérotage de Bachet : I, 43, II, 36, III, 24, IV, 46, V, 33, VI, 26.

II.

J'ai dit que tous les manuscrits de Diophante remontaient à une source commune déjà très corrompue. Avant de rechercher comment la corruption et la confusion ont pu s'introduire dans cette source, on peut se demander tout d'abord comment elle s'est trouvée réduite à moins de la moitié des Livres des *Arithmétiques* et augmentée, par contre, du Livre des *Nombres polygones* qui, à première vue au moins, ne devait pas en faire partie.

Une simple réflexion sur un cas analogue nous donnera immédiatement la réponse. Pourquoi avons-nous perdu les quatre derniers Livres des *Coniques* d'Apollonius? Parce qu'à un certain moment on s'est avisé d'accompagner de commentaires l'œuvre du géomètre de Perge, et qu'on a fait une édition comprenant les quatre premiers Livres avec commentaires au lieu de comprendre l'Ouvrage entier. Le succès de l'édition avec commentaires a fait disparaître l'édition complète; nous avons cependant gagné, bien faible compensation, deux petits Traités de Sérénus accolés à l'édition restreinte comme pour la compléter.

La même chose a dû se passer pour Diophante; nous savons que, vers la fin du IVe siècle ou le commencement du Ve, il fut commenté par Hypatia. A la prolixité des commentaires de cette époque, on peut bien supposer que le travail ne fut pas plus complet que celui d'Eutocius pour Apollonius, et qu'il se borna à six Livres. Il en résulte une édition restreinte, à laquelle s'ajouta, pour compléter le Volume, le Livre des *Nombres polygones,* et c'est de cette édition que proviendrait l'original de nos manuscrits.

Seulement, et c'est la différence avec l'Apollonius d'Eutocius, dans l'original en question, le commentaire d'Hypatia a été supprimé. Il est, en effet, bien certain que Planude écrivait le sien sans profiter d'un autre antérieur qui lui aurait permis de reconnaître les confusions et corruptions du texte. Ces confusions, sinon ces corruptions, peuvent remonter d'ailleurs à la suppression du premier commentaire, car le copiste a parfaitement pu prendre pour des scholies quelques porismes que Diophante avait insérés au milieu de ses problèmes : de là les lacunes apparentes signalées par Nesselmann; le copiste a pu, au contraire, conserver comme de Diophante des problèmes analogues traités par Hypatia.

Ces conjectures suffisent-elles pour expliquer l'état actuel du texte? C'est ce que nous allons voir en examinant les arguments de Nesselmann.

Il y aurait, d'après lui, une lacune considérable entre le premier et le deuxième Livre, lacune qui aurait été remplie originairement par la solution des équations du second degré et par l'analyse indéterminée du premier degré.

Mais toutes les raisons qu'il donne tombent devant un fait: c'est que le deuxième Livre est bien à sa place, puisque le texte de Diophante s'y réfère expressément (ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ) dans le problème 17 du Livre III.

Pour ce qui concerne d'ailleurs la solution des équations du second degré, annoncée par Diophante dans son préambule, et considérée plus loin comme connue, j'ai montré, dans une autre occasion (¹), qu'elle devait avoir été donnée en *porismes* sur les problèmes I, 30, 33, et j'ai essayé de restituer le sens de ces *porismes*.

Quant à l'analyse indéterminée du premier degré, il n'y a guère de preuves précises que les Grecs en aient traité les questions, si ce n'est dans le célèbre problème des bœufs d'Archimède; mais, si l'on admet que Diophante avait recueilli les problèmes plus ou moins analogues, il n'y a certainement aucune nécessité de supposer qu'il les avait placés dans les premiers Livres; la recherche de solutions entières, propre à ces problèmes, devait, au contraire, le conduire à les placer après ceux où les solutions rationnelles sont admises, comme dans l'ensemble des six Livres qui nous restent.

Une remarque plus grave de Nesselmann concerne la confusion et le désordre de la division actuelle en Livres. Il est incontestable notamment, comme il le dit, que les sept premiers problèmes du deuxième Livre se rattachent naturellement au premier, et qu'au moins les quatre premiers du troisième se rattache-

---

(¹) *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide* dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* t. IV (2ᵉ série), p. 395-416.

raient mieux au deuxième. Mais, au contraire, le Livre IV s'ouvre naturellement par les premières équations du troisième degré, le Livre VI se trouve exclusivement consacré aux problèmes sur les triangles rectangles numériques; enfin, pour le Livre V, si la distinction du commencement n'est pas aussi nette, elle ne provoque nullement le soupçon comme celles des Livres II et III.

Quant aux autres traces de confusion dans l'intérieur même des Livres, il n'y a pas à s'y arrêter; s'il y a, notamment, suivant toute vraisemblance, trois problèmes manquant entre V, 21 et 22, c'est un accident bien commun qui confirme seulement le mauvais état du texte dans le manuscrit archétype de ceux qui nous restent (¹); si les problèmes II, 18, 19 devraient être reportés au premier Livre, après I, 25, c'est une transposition de texte dont les analogues ne manquent pas non plus dans des manuscrits d'un tout autre genre.

Attachons-nous donc seulement aux problèmes qui commencent les Livres II et III.

Les problèmes II, 1-5 sont des répétitions absolument inutiles des problèmes I, 34-37, et leur authenticité est dès lors plus que suspecte, Bachet l'avait déjà remarqué. Quant aux problèmes II, 6, 7, ce sont des variantes sans intérêt d'une question que Diophante avait probablement traitée entre les problèmes I, 33 et I, 34, à savoir : *Trouver deux nombres, connaissant leur différence et la différence de leurs carrés,* mais qui manque aujourd'hui. Il est donc permis de conjecturer que tous ces problèmes antérieurs à II, 8, c'est-à-dire au véritable commencement du Livre II, ont été empruntés au commentaire (d'Hypatia?), et que leur position vient précisément de ce que le copiste a respecté en fait l'indication de la fin du texte du premier Livre de Diophante (²).

Pour le commencement du Livre III, la question n'est pas tout à fait aussi claire. En fait, à partir de II, 3, Diophante commence

---

(¹) Je puis signaler, comme preuve du peu de confiance que l'on doit avoir en particulier dans le manuscrit 200 du Vatican, qu'il a omis le problème V, 31 qui se trouve cependant dans les manuscrits des deux familles A et B.

(²) On peut admettre aussi que les problèmes II, 18, 19 proviennent de même du commentaire, et que le copiste, s'étant décidé après coup à les conserver, les aura intercalés à une place toute différente de celle où il aurait dû les mettre.

à étendre à trois inconnues des problèmes résolus plus haut pour deux, et l'on a les correspondances suivantes : (II, 21 et 33), (II, 22 et 34), (II, 23 et 34), (II, 24 et 35), (II, 25 et III, 2), (II, 26 et III, 3). Quant aux problèmes III, 1 et 4, à trois inconnues, ils appartiennent évidemment à la même série, mais ils n'ont pas leurs correspondants dans II, qui seraient :

Trouver deux nombres tels que leur somme moins le carré de chacun d'eux fasse un carré;

Trouver deux nombres tels que chacun d'eux moins le carré de leur somme fasse un carré.

La difficulté est qu'ici les premiers problèmes du Livre III ne sont nullement suspects comme les premiers du Livre II; quoique faciles au fond, ils sont réellement dignes de Diophante, et s'ils ne sont pas de lui, ils appartiennent à un imitateur qui s'était parfaitement rendu maître des procédés du maître. On peut signaler quelques différences de rédaction avec les problèmes analogues du Livre II, mais ces différences sont plutôt en faveur de ceux du Livre III, si l'on considère la concision de l'exposition et l'assurance de la méthode.

Mais il est encore possible de conserver ces derniers problèmes à Diophante, tout en maintenant comme bonne la division actuelle.

En fait, l'ensemble des problèmes des Livres II et III est un; la division originaire a donc été nécessairement arbitraire; il ne nous est nullement prouvé que Diophante ait tenu à épuiser tous les problèmes offrant entre eux de l'analogie (par la variation des signes $+$ et -1 dans les équations auxquelles ils correspondent); enfin, d'après les usages de cette époque, les Livres s'éditaient successivement. Rien n'empêche donc d'admettre que Diophante, après avoir négligé quelques cas dans son Livre II, les ait repris pour son Livre III.

On peut, au contraire, regarder comme interpolés les deux derniers problèmes du Livre III, qui ne sont que des variantes sans intérêt de II, 15 et 16.

III.

Nesselmann développe un dernier argument qui peut se résumer comme suit :

Si l'on approfondit les procédés de Diophante, on arrive à la conviction qu'il ne pouvait dépasser ce qui se trouve dans les six Livres qui nous restent ; il n'a qu'un nombre limité de ressources avec lesquelles il ne pouvait faire beaucoup plus qu'il n'a fait dans ce que nous avons de lui.

Cet argument est spécieux, surtout parce qu'il vient d'un homme qui a étudié Diophante; mais Nesselmann n'a pas assez considéré le mathématicien grec comme un compilateur, ce qu'il est réellement. La très grande différence de valeur entre les diverses solutions de ses problèmes l'indique cependant suffisamment, et Nesselmann a le premier fait remarquer lui-même combien peu Diophante se donne pour un inventeur.

Le recueil de problèmes d'Analyse indéterminée qui nous reste n'offre, en réalité, aucune unité de méthode qui permette de conclure, de ce que paraît ignorer Diophante à tel endroit, que son ignorance est réelle. Nesselmann fait remarquer, avec juste raison, que les problèmes du Livre VI sont généralement plus faciles que ceux du Livre V, et il en conclut que Diophante ne pouvait s'élever à un niveau supérieur. Il n'en est pas moins vrai que, si le Livre VI nous manquait comme les suivants, nous croirions, d'après le problème III, 12, que notre Grec ne savait pas traiter l'équation

$$52x^2+12=y^2,$$

tandis que, d'après le lemme VI, 12, il sait qu'elle a une infinité de solutions. Plusieurs exemples semblables pourraient être donnés.

Les lacunes que semblent présenter les procédés de Diophante peuvent donc être illusoires et l'argument de Nesselmann n'est donc point valable. Reste à savoir si l'on peut réellement imaginer la matière des sept Livres perdus.

Pour avoir des données précises à cet égard, il faudrait avoir approfondi les travaux des Arabes en Analyse indéterminée. Leurs algébristes peuvent, en effet (ce qui pourtant est douteux), avoir eu entre leurs mains le Diophante complet, et avoir conservé ses procédés. En tout cas, s'ils n'ont eu que les six premiers Livres, les progrès qu'ils ont réalisés n'ont pas dû dépasser ceux des Grecs. On sait au moins d'eux ([1]) qu'ils avaient particulièrement poursuivi l'étude du triangle rectangle en nombres et reconnu l'impossibilité de la solution de l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Si nous allons jusque chez les Hindous, nous y trouvons l'Analyse indéterminée du premier degré et la solution de l'équation de Pell. Sans doute, ils ont pu arriver d'eux-mêmes à ces questions; mais peut-on en refuser la connaissance aux Grecs quand elles sont supposées par le problème des bœufs d'Archimède? A la vérité, il est douteux que le géomètre de Syracuse ait communiqué ses méthodes; mais les questions étaient posées et des tentatives de solution plus ou moins complète ont dû exister dès avant Diophante. Comment, d'ailleurs, nous est parvenu ce problème des bœufs? N'est-ce point un débris des derniers Livres de l'Alexandrin et sa compilation ne devait-elle pas être couronnée par ce problème ([2])?

Diophante enfin avait pu aborder d'autres sujets. Nous savons, par exemple, que Jamblique attribuait à Pythagore la connaissance des nombres *amiables* 220 et 284, dont chacun est égal à la somme des parties aliquotes de l'autre. L'Arabe Tâbit-ibn-Kurra a donné, pour trouver de tels nombres ([3]), un procédé analogue à celui d'Euclide pour les nombres parfaits.

Diophante a pu traiter, avec cette question, celle de trouver des nombres dans un rapport donné avec la somme de leurs parties aliquotes, comme l'ont fait plus tard Fermat et ses contemporains.

Enfin, il a pu recueillir quelques *récréations arithmétiques*,

---

([1]) *Voir* M. CANTOR, *Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1880; p. 645 et suivantes.

([2]) Sur le probleme des bœufs d'Archimède, *voir* le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. V (2e série), 1881.

([3]) $A = 2^n pq$ et $B = 2^n r$ sont des nombres *amiables*, si p, q, r sont des nombres premiers et que l'on ait

$$p = 3.2^n - 1, \quad q = 3.2^{n-1} - 1, \quad r = 9.2^{2n-1} - 1,$$

dont on doit supposer l'existence dès cette époque, quoiqu'on ne les retrouve guère avant la décadence complète de la Science (¹)?

En somme, s'il est évidemment impossible de songer à une restitution quelconque des Livres perdus de Diophante, il est permis d'affirmer qu'il avait pour les remplir une matière suffisante, et qu'ils offriraient pour nous au moins autant d'intérêt que les Livres conservés.

IV.

J'ai écarté implicitement l'hypothèse d'après laquelle, dans les treize Livres des *Arithmétiques,* il faudrait compter le Livre des *Nombres polygones* qui nous reste et un recueil de *Porismes* auxquels se réfère Diophante dans ses problèmes V, 3, 5, 19.

Pour le Livre des *Nombres polygones,* qui forme un Traité parfaitement distinct comme fond, comme forme et comme composition, il me paraît inutile de discuter la conjecture de Nesselmann, d'ailleurs rejetée par Hankel et M. Cantor. Quant aux *Porismes,* je ne puis me rallier à aucune des deux opinions émises, d'après lesquelles il s'agirait d'un recueil de propositions d'une forme spéciale qui aurait, suivant les uns, formé un Ouvrage à part, qui aurait, suivant les autres, occupé un ou plusieurs des Livres perdus des Arithmétiques.

Diophante dit trois fois : ἔχομεν ἐν τοῖς Πορίσμασιν ὅτι (nous avons dans les porismes que), et les trois propositions qu'il cite peuvent se représenter comme suit :

A. Si $x_1 = m^2 - a$, $x_2 = (m+1)^2 - a$, et $x_3 = 2(x_1 + x_2) - 1$,

---

(¹) J'en signalerai une publiée par Richard Hoche à la suite de son édition de Nicomaque (Leipzig, 1866), p. 152, et attribuée à Isaac Argyrus, moine grec du XIVᵉ siècle, parce qu'elle suppose quelque connaissance de l'Analyse indéterminée du premier degré :

Trouver un nombre (supposé compris entre 7 et 105), connaissant ses résidus par rapport à 3, à 5 et à 7.

Je remarque à ce sujet que Hoche a donné sous le nom Τοῦ κύνος (Du chien) un problème qui précède ceux d'Isaac Argyrus. D'après le manuscrit 2377 de la Bibliothèque nationale, il faut lire Τοῦ κυδώνου. L'auteur doit donc être Démétrius Cydones, contemporain d'Isaac Argyrus.

les trois expressions $x_1 x_2 + a$, $x_2 x_3 + a$, $x_3 x_1 + a$ sont des carrés.

B. Si $x_1 = m^2$, $x_2 = (m+1)^2$ et $x_2 = 2(x_1 + x_2) + 2$, les expressions $x_1 x_2 + x_1 + x_2$, $x_2 x_3 + x_2 + x_3$, $x_3 x_1 + x_3 + x_1$ sont des carrés, ainsi que les suivantes : $x_1 x_2 + x_3$, $x_2 x_3 + x_1$, $x_3 x_1 + x_2$.

C. On peut résoudre toujours l'équation $x^3 + y^3 = a^3 - b^3$ en nombres rationnels.

J'exclus tout d'abord l'opinion que Diophante se réfère à un Ouvrage étranger aux *Arithmétiques*. Entendus dans ce sens, *les Porismes* pris absolument ne pourraient être que l'Ouvrage d'Euclide qui portait ce nom et qui était consacré à de tout autres matières. Si Diophante avait composé un Ouvrage arithmétique sous le même titre, il aurait certainement dit : « Dans nos porismes ».

Les propositions qu'il cite se trouvaient donc dans les *Arithmétiques* mêmes; mais elles ne pouvaient figurer dans un Livre spécial, car alors il faudrait revenir à l'hypothèse de Nesselmann sur la confusion du rang des Livres des *Arithmétiques*.

Les porismes devaient donc être simplement des corollaires de certains problèmes, ainsi que nous l'avons déjà indiqué, en expliquant également comment ils se sont perdus.

Au temps de Diophante, d'ailleurs, le sens euclidien du mot *porisme* était à peu près perdu, et la signification de corollaire était la seule courante.

A l'appui de ma thèse, je puis d'ailleurs faire remarquer que l'Ouvrage des *Arithmétiques*, tel que nous l'avons, renferme encore quelques porismes.

Le scoliaste reconnaît comme tels la fin du problème I, 37 à partir de Ὁμοίως, et le problème I, 42 ; en réalité, il s'agit d'énoncés de problèmes nouveaux donnés en corollaires de problèmes analogues. D'autre part, comme forme d'énoncé et de rédaction, le problème V, 10 est un véritable porisme au sens euclidien. Les lemmes VI, 12 et 16 s'en rapprochent également assez comme forme.

Il s'agit donc seulement de savoir si les propositions citées par Diophante se rattachent naturellement aux problèmes antérieurs.

Or, pour A, la question de trouver trois nombres x_1, x_2, x_3, tels que leurs produits deux à deux, augmentés d'un nombre donné a, fassent des carrés, est le problème III, 12. Il est vrai que la solution donnée ne correspond nullement à la proposition citée V, 3, et qu'il faut supposer, par conséquent, que le porisme perdu renfermait une seconde solution.

Pour B, la question de trouver trois nombres, tels que leurs produits deux à deux augmentés de la somme des deux facteurs fassent des carrés, est le problème III, 17-18, dont la première solution correspond identiquement au porisme. La question de trouver trois nombres, tels que leurs produits deux à deux augmentés du troisième fassent des carrés, est, au contraire, le problème III, 14, dont la solution est différente. Mais on peut admettre ici que le porisme perdu était seulement en corollaire à III, 17 et renfermait la remarque que la solution donnée s'appliquait également au problème III, 14.

En somme, pour ces deux renvois de Diophante, on a une correspondance très satisfaisante avec les problèmes antérieurs; il n'en est pas de même pour le troisième.

C'est à l'occasion des problèmes IV, 1, 2 que Bachet et Fermat ont résolu la question supposée par le porisme de Diophante, et l'on ne voit guère d'autre place où la rapporter qu'à côté de ces deux questions. Cependant elles sont, en réalité, passablement différentes. On y propose de trouver deux nombres connaissant leur somme et celle de leurs cubes ou leur différence et celle de leurs cubes.

Il faudrait donc supposer là, non seulement la perte d'un porisme ou au plus d'une seconde solution, mais celle de toute une série de problèmes importants, et cette supposition est d'autant moins facile à admettre que le Livre IV est déjà très chargé.

Je proposerai donc une autre hypothèse. En réalité, au problème V, 19, Diophante ne donne nullement la solution; il indique seulement qu'il est possible. Je pense que sur les problèmes II, 8-11 (division d'un carré ou d'un nombre connu de deux carrés en deux autres carrés), il avait pu indiquer en corollaire que la division d'un cube en deux cubes est impossible, énoncé que nous avons vu chez les Arabes, qu'au contraire on peut partager en deux cubes un nombre somme ou différence de deux cubes; ce dernier problème n'était pas traité, mais réservé sans doute pour un des Livres perdus. Au cours du Livre V, Diophante, en ayant eu accidentellement besoin, ne s'est pas fait scrupule de recourir à ce problème non encore résolu.

Je puis appuyer à cet égard mon opinion sur ce fait que les procédés de Diophante pour égaler à un cube un polynôme du troisième degré, dans la partie de son œuvre qui nous reste, sont loin d'être développés comme ils devraient l'être. Ainsi, IV, 28, il déclare impossible l'équation

$$8x^3 - x^2 + 8x - 1 = y^3,$$

auquel il est pourtant facile de satisfaire en posant, soit $y = 2x - \frac{1}{12}$, soit $y = \frac{8}{3}x - 1$. Or, la solution de la décomposition en deux cubes d'une somme ou d'une différence de deux cubes réclame des positions tout à fait analogues, le problème n'a donc dû être effectivement traité que plus loin.

Si nous retrouvons ainsi un thème des problèmes perdus de Diophante, nous croyons pourtant devoir écarter, avec Nesselmann, l'opinion que les derniers Livres auraient pu contenir la solution des équations du troisième et du quatrième degré. Cette découverte semble bien avoir été réservée aux temps modernes, et cependant, il faut le remarquer, les Grecs n'avaient à faire qu'un pas pour y toucher.

Rien de plus facile, en effet, que d'appliquer la méthode de Diophante dans les problèmes IV, 1, 2, à la solution du problème :

Trouver deux nombres connaissant leur produit et la somme ou la différence de leurs cubes.

Soit

$$x_1^3 + x_2^3 = 2q, \quad x_1 x_2 = p, \quad x_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}, \quad x_2 = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Si l'on prend pour inconnue $x_1 + x_2 = x$, on tombe sur l'équation

$$x^3 - 3px - 2q = 0,$$

dont la solution apparaît dès lors immédiatement.

On a cru trouver une preuve que Diophante avait traité des équations de degré supérieur dans le fait qu'il pousse la nomenclature des puissances successives jusqu'au sixième degré et jusqu'à celui-là seulement. Mais cette particularité ne lui appartient nullement; il suivait simplement à cet égard une tradition pythagoricienne, probablement ancienne, qui est attestée par plusieurs textes, et notamment par les témoignages décisifs de saint Hippolyte [1], auteur du IIe siècle après J.-C., lequel donne la série complète des six puissances, avec les mêmes noms que Diophante et en y ajoutant, comme lui, l'unité.