BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

STIELTJES

Sur le caractère du nombre 2 comme résidu ou non-résidu quadratique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 175-176

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_175_1>

SUR LE CARACTÈRE DU NOMBRE 2 COMME RÉSIDU OU NON-RÉSIDU QUADRATIQUE;

PAR M. STIELTJES.

Soit p un nombre premier impair et considérons la suite des $p-1$ nombres

$$(\mathrm{A}) \qquad 1, 2, 3, \ldots, p-1.$$

Nous dirons que deux nombres consécutifs k, $k+1$ présentent une *variation* lorsque l'un d'eux est résidu, l'autre non-résidu quadratique de p.

Cela posé, on voit facilement que le nombre total des variations dans la suite (A) est égal à $\frac{p-1}{2}$. En effet, deux nombres k, $k+1$, présentent une variation ou non, selon que le nombre r_k défini par

$$k+1 \equiv kr_k \pmod{p}$$

est non-résidu ou résidu. Mais il est évident que les nombres

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-2}$$

sont tous différents et qu'aucun d'eux n'est égal à l'unité, en sorte que ces nombres sont

$$2, 3, 4, \ldots, p-1,$$

en faisant abstraction de l'ordre. Le nombre des non-résidus parmi eux, c'est-à-dire le nombre des variations dans la suite (A), est donc bien égal à $\frac{p-1}{2}$.

Supposons maintenant $p \equiv 1 \pmod{4}$. Le nombre des variations dans la suite (A) étant pair, et le premier nombre 1 de cette suite étant résidu, il s'ensuit que le dernier $p-1$ ou -1 est aussi résidu. Deux nombres k et $p-k$ sont donc en même temps résidus ou non-résidus : d'où il suit que le nombre des variations dans la suite

$$(B) \qquad 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$$

est égal à $\frac{p-1}{4} = n$.

Si n est pair, c'est-à-dire $p \equiv 1 \pmod{8}$, le dernier nombre $\frac{p-1}{2}$ sera donc nécessairement résidu, et partant 2 est résidu.

Si n est impair, c'est-à-dire $p \equiv 5 \pmod{8}$, $\frac{p-1}{2}$ et 2 seront non-résidus.

Soit en second lieu $p \equiv 3 \pmod{4}$. Le nombre des variations dans la suite (A) étant impair, $p-1$ ou -1 sera non-résidu et le nombre des variations dans la suite (B) sera égal à $\frac{p-3}{4} = n$.

Si n est pair, c'est-à-dire $p \equiv 3 \pmod{8}$, $\frac{p-1}{2}$ sera résidu, partant 2 sera non-résidu.

Si n est impair, c'est-à-dire $p \equiv 7 \pmod{8}$, $\frac{p-1}{2}$ sera non-résidu et 2 résidu quadratique de p.