

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

STIELTJES

Sur le caractère du nombre 2 comme résidu ou non-résidu quadratique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 8, n° 1 (1884), p. 175-176

http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_175_1

© Gauthier-Villars, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE CARACTÈRE DU NOMBRE 2 COMME RÉSIDU OU NON-RÉSIDU
QUADRATIQUE;

PAR M. STIELTJES.

Soit p un nombre premier impair et considérons la suite des $p - 1$ nombres

$$(A) \quad 1, 2, 3, \dots, p - 1.$$

Nous dirons que deux nombres consécutifs $k, k + 1$ présentent une *variation* lorsque l'un d'eux est résidu, l'autre non-résidu quadratique de p .

Cela posé, on voit facilement que le nombre total des variations dans la suite (A) est égal à $\frac{p-1}{2}$. En effet, deux nombres $k, k + 1$, présentent une variation ou non, selon que le nombre r_k défini par

$$k + 1 \equiv kr_k \pmod{p}$$

est non-résidu ou résidu. Mais il est évident que les nombres

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-2}$$

sont tous différents et qu'aucun d'eux n'est égal à l'unité, en sorte que ces nombres sont

$$2, 3, 4, \dots, p - 1,$$

en faisant abstraction de l'ordre. Le nombre des non-résidus parmi eux, c'est-à-dire le nombre des variations dans la suite (A), est donc bien égal à $\frac{p-1}{2}$.

Supposons maintenant $p \equiv 1 \pmod{4}$. Le nombre des variations dans la suite (A) étant pair, et le premier nombre 1 de cette suite étant résidu, il s'ensuit que le dernier $p - 1$ ou -1 est aussi résidu. Deux nombres k et $p - k$ sont donc en même temps résidus ou

non-résidu : d'où il suit que le nombre des variations dans la suite

$$(B) \quad 1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$$

est égal à $\frac{p-1}{4} = n$.

Si n est pair, c'est-à-dire $p \equiv 1 \pmod{8}$, le dernier nombre $\frac{p-1}{2}$ sera donc nécessairement résidu, et partant 2 est résidu.

Si n est impair, c'est-à-dire $p \equiv 5 \pmod{8}$, $\frac{p-1}{2}$ et 2 seront non-résidus.

Soit en second lieu $p \equiv 3 \pmod{4}$. Le nombre des variations dans la suite (A) étant impair, $p-1$ ou -1 sera non-résidu et le nombre des variations dans la suite (B) sera égal à $\frac{p-3}{4} = n$.

Si n est pair, c'est-à-dire $p \equiv 3 \pmod{8}$, $\frac{p-1}{2}$ sera résidu, partant 2 sera non-résidu.

Si n est impair, c'est-à-dire $p \equiv 7 \pmod{8}$, $\frac{p-1}{2}$ sera non-résidu et 2 résidu quadratique de p .

