Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 57-72
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_57_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NETTO (E.). — SUBSTITUTIONSTHEORIE UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE ALGEBRA. — 1 vol. in-8°. Leipzig, Teubner; 1882.

Dans son Traité bien connu, M. Jordan, développant les méthodes de Galois, considère la résolution par radicaux comme une des applications de la théorie des substitutions. En se plaçant à ce point de vue, il faut étudier les groupes de substitutions comme un nouvel algorithme et en développer les propriétés indépendamment de toute application. Cette méthode a l'avantage de donner des résultats généraux pouvant avoir des applications nombreuses.

M. Kronecker, suivant une voie toute différente, montre que le principe de Galois résulte de la théorie générale de l'élimination. Sa méthode, qui consiste tout d'abord à ne faire que le nombre d'abstractions nécessaires pour résoudre les questions d'Algèbre dans toute leur généralité, permet d'avoir toujours présent à l'esprit l'objet même que l'on a en vue, d'insister sur ses propriétés essentielles, et, dans les recherches si difficiles de l'Algèbre, donne ainsi moins de prise à l'erreur.

Je caractériserai l'Ouvrage de M. Netto en disant que c'est à la fois une introduction à la lecture des différents Mémoires publiés sur la théorie des substitutions et à l'étude des Communications célèbres faites par M. Kronecker à l'Académie des Sciences de Berlin.

Il est écrit dans un style à la fois clair et concis et a l'avantage de contenir des exemples nombreux. La division des matières est faite avec art, et l'intérêt que l'on éprouve à la lecture de l'Ouvrage ne faiblit pas un instant. C'est déjà un bien beau résultat, si l'on songe que l'on a affaire à l'une des branches les plus arides des Mathématiques.

Une seule fois (§ 56), on suppose connu un théorème qui n'est démontré que plus tard (§ 104), afin de pouvoir énoncer de suite, d'une manière générale, le théorème, que le plus grand commun diviseur des discriminants de toutes les fonctions correspondant au même groupe est une puissance déterminée du discriminant des éléments du groupe. On est ainsi amené à parler, dès le § 56, d'un *genre* de fonctions, alors que l'idée même de genre n'est introduite que plus tard (§ 98).

Les fautes d'impression sont peut-être un peu nombreuses; mais elles ne sont d'aucune importance.

L'auteur nous dit, dans sa Préface, que si la différence des méthodes employées ne lui a pas permis de faire usage de l'Ouvrage de M. Serret, il doit à celui de M. Jordan, non seulement les idées fondamentales qu'il y a puisées, mais encore la marche suivie dans certaines démonstrations du *Traité des substitutions*. Mais bien souvent on remarque l'influence exercée par la lecture des publications de M. Kronecker sur le choix des méthodes employées. Et il est bien naturel que M. Netto regrette de n'avoir pu tenir compte de la publication trop récente du profond, mais difficile Mémoire de l'illustre géomètre : *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (¹).

Le Livre de M. Netto se distingue du Traité de M. Jordan et par son point de départ, et parce qu'il limite l'étude des groupes de substitutions à celles de leurs propriétés qui trouvent une application immédiate dans la théorie de la résolution des équations par radicaux. La première Partie comprend une théorie des substitutions et des fonctions entières; dans la seconde moitié du volume, cette théorie est appliquée à l'étude des équations algébriques. Ce qui fait l'originalité de l'Ouvrage est la méthode suivie par l'auteur. Je vais essayer d'en donner un aperçu.

(¹) Ce grand Mémoire est, en effet, la base des belles théories de M. Kronecker. Sa publication tend à réaliser l'espoir exprimé par M. Jordan dans la préface de son *Traité des substitutions*, de voir grouper un jour en un corps de doctrine, suivi et complet, les beaux théorèmes du célèbre géomètre.

Mais il reste à développer ces théories et à les faire connaître à tous. M. Kronecker a bien voulu m'autoriser à entreprendre ce travail. Grâce à son extrême obligeance, je pense tout d'abord rédiger et publier prochainement sa *Théorie générale de l'élimination,* un des Chapitres les plus importants de ses recherches.

II.

On trouve facilement des fonctions entières de plusieurs variables indépendantes dont la *forme* ne change pas quand on échange entre elles de toutes les manières possibles les n variables qu'elles renferment. Ces fonctions sont dites symétriques; elles sont univalentes. Inversement il est facile de voir que toute fonction entière univalente est symétrique. Toute fonction symétrique de n éléments peut s'exprimer rationnellement et d'une seule manière par les fonctions symétriques élémentaires de ces éléments. Une des fonctions symétriques les plus importantes est le discriminant Δ des n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Lorsqu'une fonction entière n'est pas symétrique, elle est multivalente. Les fonctions multivalentes les plus simples sont les fonctions bivalentes; leur étude nous indique la voie qui devra être suivie pour trouver, en général, les propriétés des fonctions multivalentes.

L'existence d'une fonction bivalente se déduit de celle d'une fonction alternée; d'ailleurs toutes les fonctions alternées sont divisibles par $\sqrt{\Delta}$, et, comme on voit facilement que $\sqrt{\Delta}$ est une fonction alternée, on obtient à la fois la démonstration de l'existence d'une fonction bivalente et le type général de toutes ces fonctions, savoir, $S_1 + S_2\sqrt{\Delta}$, S_1 et S_2 étant des fonctions symétriques et Δ le discriminant. On voit ainsi que toutes les substitutions composées d'un nombre impair de transpositions changent la valeur d'une fonction bivalente, tandis que toutes les substitutions composées d'un nombre pair de transpositions laissent cette valeur invariable. Enfin toute fonction bivalente de n éléments est racine d'une équation du second degré, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles symétriques des n éléments. On voit de suite que la réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie et que l'on ne doit considérer les racines d'une équation du second degré comme fonctions bivalentes que si elles sont fonctions rationnelles des éléments.

Des questions analogues, mais plus générales, se posent immédiatement. Existe-t-il des fonctions de n variables ayant un nombre déterminé ρ de valeurs? Dans le cas où elles existent, quelles sont les substitutions qui laissent la fonction invariable? Quelles relations y a-t-il entre les ρ valeurs d'une fonction multivalente? Enfin n'y a-t-il pas un lien commun entre toutes les fonctions invariables par les mêmes substitutions?

La théorie des substitutions n'est encore que peu avancée; elle ne permet de répondre qu'en partie aux questions posées.

On démontre tout d'abord qu'à toute fonction correspond un groupe tel que les substitutions de ce groupe ne changent pas la valeur de la fonction, et qu'inversement à tout groupe correspondent une infinité de fonctions. Ce théorème permet de classer les fonctions entières de n variables, et l'étude de ces fonctions est ainsi ramenée à celle de tous les groupes de substitutions possibles entre n éléments.

Dans l'état actuel de la Science on ne peut former tous ces groupes; on se contente d'examiner les cas les plus simples : le groupe symétrique d'ordre $n!$ auquel correspondent les fonctions symétriques; le groupe unique d'ordre $\frac{n!}{2}$ auquel correspondent les fonctions bivalentes, et que l'on nomme *groupe alterné;* les groupes formés à l'aide d'une seule substitution; ceux qui sont formés à l'aide de deux substitutions s_α, s_β, telles que $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha^\mu$; enfin le groupe de degré n et d'ordre p^f, f étant la plus haute puissance du nombre premier p, divisant $n!$

C'est un théorème fondamental que, si ρ désigne le nombre de valeurs d'une fonction de n éléments, et r l'ordre du groupe correspondant, $r.\rho = n!$; il exclut déjà la possibilité de l'existence d'un grand nombre de fonctions multivalentes. Les théorèmes analogues et leurs corollaires sur les groupes contenant et contenus sont bien connus.

En considérant les groupes correspondant aux ρ valeurs d'une fonction, on voit que leurs substitutions sont semblables; on est ainsi amené à introduire l'idée des groupes *transformés,* et à en étudier les propriétés, ce qui permet de démontrer le théorème de Cauchy généralisé par M. Sylow : si l'ordre d'un groupe G est divisible par p^α, p désignant un nombre premier, G comprend des groupes d'ordre p^α. Les conséquences de ce théorème, dont la démonstration repose sur la possibilité de former un groupe d'ordre

p^f, f étant la plus haute puissance de p divisant $n!$, sont fort importantes.

Un exemple nous montre qu'il existe des fonctions telles que les groupes correspondant à leurs ρ valeurs aient des susbstitutions communes. On démontre que, pour $n \gtrless 4$, les seules fonctions jouissant de cette propriété sont les fonctions symétriques ou alternées. Pour $n = 4$ on rencontre, au contraire, le groupe singulier

$$[1, (x_1x_2)(x_3x_4), \quad (x_1x_3)(x_2x_4), \quad (x_1x_4)(x_2x_3)].$$

Après avoir trouvé les relations qui relient les groupes correspondant aux ρ valeurs d'une fonction multivalente, on peut se proposer de trouver les rapports existant entre les ρ valeurs de la fonction elle-même. Elles sont racines d'une équation de degré ρ, dont les coefficients sont fonctions symétriques des éléments. Dans le cas où les n éléments sont indépendants, les seules fonctions multivalentes dont une puissance est symétrique sont les fonctions alternées; dans tout autre cas, l'équation précédente ne peut être binôme. Et si $n > 4$, il n'y a pas de fonctions ($\rho > 2$) de n éléments indépendants dont une puissance soit fonction bivalente. Pour $n = 3, 4$ on trouve, au contraire, que si ω désigne une racine cubique primitive de l'unité,

$$\varphi = x_1^r + \omega^2 x_2^r + \omega x_3^r,$$
$$\varphi_1 = (x_1x_2 + x_3x_4) + \omega(x_1x_3 + x_2x_4) + \omega^2(x_1x_4 + x_2x_3)$$

répondent à la question; φ^3 et φ_1^3 sont des fonctions bivalentes.

Pour pouvoir continuer à répondre aux questions posées, il importe de considérer quatre propriétés principales des groupes de substitutions. La première appartient à Cauchy; c'est celle de la *transitivité*. Un des théorèmes fondamentaux est dû à M. Jordan : *Tout groupe transitif a au moins* ($n - 1$) *substitutions qui permutent les n éléments. S'il en a davantage, il contient aussi des substitutions permutant moins de* ($n - 1$) *éléments.*

Les groupes peuvent être plusieurs fois transitifs. Si un groupe k fois transitif ($k > 1$) contient une substitution circulaire de trois éléments, il contient le groupe alterné; s'il contient une transposition, il est symétrique. On en déduit, à l'aide de lemmes faciles à établir, que, si un groupe de degré n n'est ni alterné, ni symétrique, il ne peut être plus de $\left(\frac{n}{3}+1\right)$ fois transitif.

Les théorèmes énoncés n'ont, en général, lieu que pour $k > 1$. Cela tient à une propriété de certains groupes une fois transitifs. Cette propriété est la *non-primitivité*. Gauss et Abel en font déjà mention. Les groupes transitifs qui ne sont pas non primitifs sont dits *primitifs*. Un groupe primitif qui contient une substitution circulaire s_1 d'ordre p contient une série de substitutions semblables $s_1, s_2, \ldots, s_{n-p+1}$, telles que s_λ soit formé à l'aide des éléments

$$x_1, x_2, \ldots, x_{p-1+\lambda};$$

le choix de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ est arbitraire. Ce groupe est $(n-p+1)$ fois transitif. On voit donc que le manque de la non-primitivité donne à un groupe transitif un caractère plus général en excluant certaines relations particulières.

Déjà, en étudiant les groupes transformés d'un groupe donné, on rencontre des substitutions échangeables, des groupes permutables. On est ainsi amené à parler d'une troisième propriété des groupes dont la notion est due à Galois et qui est de la plus haute importance : la distinction des groupes *simples* et *composés*, la définition de la *suite* d'un groupe, la constance de ses facteurs de composition. La suite de composition correspondant au groupe symétrique est, pour $n > 4$, le groupe alterné et l'unité; le groupe alterné de plus de quatre éléments est *simple*.

La *suite principale* d'un groupe est particulièrement importante, lorsque l'ordre d'un de ses groupes H est égal à celui du groupe suivant J, multiplié par une puissance ν d'un nombre premier p. Les substitutions de H sont alors échangeables, à des substitutions de J près. On démontre également la réciproque de ce théorème.

La quatrième propriété dont il est fait mention est celle de l'isomorphisme holoédrique et mériédrique. Elle est souvent utile. A chaque groupe transitif d'ordre r correspond un groupe transitif isomorphe holoédrique d'ordre et de degré r. Tout groupe transitif dont l'ordre est égal au degré ne contient que des substitutions permutant tous les éléments; ces substitutions se composent de cycles du même ordre. Lorsque deux de ces groupes sont isomorphes, ils sont semblables.

En introduisant des groupes réciproquement mériédriques, M. Capelli a généralisé la notion d'isomorphisme, donnée par M. Jordan dans son Traité. M. Netto ne développe pas cette théorie, mais rappelle que la construction des groupes intransitifs, à l'aide de groupes transitifs, peut être ramenée à celle de groupes réciproquement mériédriques.

On peut maintenant répondre à la dernière des questions que nous nous étions posées. Toutes les fonctions correspondant au même groupe sont exprimables rationnellement par l'une d'entre elles ; elles font partie du même *genre*. Le plus grand commun diviseur de leurs discriminants est une puissance déterminée du discriminant de leurs éléments. C'est ici que nous rencontrons pour la première fois la notion fondamentale de *genre;* elle est due à M. Kronecker qui insiste à plusieurs reprises, dans ses communications à l'Académie de Berlin, sur sa grande importance.

Toutes les fonctions ψ d'un genre sont déterminées rationnellement par l'une d'entre elles φ, $\psi = \frac{R(\varphi)}{\Delta_\varphi}$. Il est donc important de montrer que dans tout genre il existe des fonctions à discriminant différent de zéro, quelles que soient les relations existant entre les éléments inégaux $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Étant donnée une suite de composition $G, G_1, \ldots, G_\nu$, on démontre, entre autres théorèmes, le suivant :

Pour que l'on puisse déterminer une fonction ayant $\rho, p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ *valeurs et correspondant à* G_ν, *à l'aide d'une fonction ayant* ρ *valeurs et correspondant à* G, *il faut et il suffit que chaque groupe* $G_{\alpha-1}$ *puisse être formé à l'aide du suivant* G_α *et d'une substitution* τ_α *permutable à* G_α, *et telle que le nombre premier* p_α *soit le plus petit nombre pour lequel* G_α *soit contenu dans le groupe* $G_{\alpha-1}$.

Si maintenant l'on cherche à répondre à la première des questions posées, celle de l'*existence* de fonctions ayant un ρ et un n donnés, on obtient une série de théorèmes sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction entière de n éléments. M. Netto cite Cauchy, MM. Bertrand et Serret, et plus particulièrement les démonstrations de MM. Kronecker et Jordan. Certains groupes particuliers jouent un grand rôle dans la théorie des équations. Ce sont d'abord les groupes Ω dans lesquels l'ordre est égal au degré n. M. Netto considère ces groupes dans le cas où n est un nombre premier, ou un produit de deux nombres premiers. Dans ce dernier cas, il y a trois types de groupes Ω; l'un d'eux est le groupe cyclique. Ce sont ensuite les groupes dont le degré p est un nombre premier et dont les substitutions ne peuvent que permuter tous les éléments, n'en permuter aucun, ou enfin n'en laisser qu'un seul invariable. Ce groupe est d'ordre $\frac{p(p-1)}{\sigma}$, où σ est un des diviseurs de $(p-1)$; pour $\sigma = 1$, on obtient le groupe métacyclique; pour $\sigma = 2$, le groupe demi-métacyclique. Ce sont enfin les groupes de degré $(p+1)$ et d'ordre $(p-1)p(p+1)$ qui comprennent toutes les substitutions linéaires $(\operatorname{mod} p)$; ce groupe comprend celui des équations modulaires.

Enfin M. Netto démontre, comme application d'un théorème général de M. Kronecker, que, si les substitutions d'un groupe sont échangeables, il existe un système fondamental de substitutions $s_1, s_2, \ldots$, d'ordres $r_1, r_2, \ldots$, tel que toute substitution du groupe puisse être représentée par

$$s_1^{h_1} s_2^{h_2}, \ldots, (h_i = 1, 2, \ldots, r_i),$$

chaque nombre r_k est multiple du suivant ou lui est égal; le produit des r_k est égal à r. Les nombres r_k sont des invariants du groupe.

Dans un dernier Chapitre, M. Netto expose les premiers principes de la représentation analytique des substitutions. Et c'est ici que perce manifestement son intention d'écrire un Traité qui puisse servir d'introduction à la lecture des Mémoires publiés sur ce sujet. Car, en se plaçant au point de vue de M. Kronecker, il semble que cette représentation analytique n'est pas nécessaire et même qu'elle n'est pas indiquée par la nature de la question que l'on a en vue. M. Netto donne le théorème bien connu de M. Hermite, puis considère les substitutions arithmétiques et géométriques. Il termine ce Chapitre en démontrant le théorème de Galois, sur l'ordre du groupe linéaire de degré m^k, en particulier p^k.

III.

Voici maintenant la marche suivie dans la seconde partie de l'Ouvrage :

On montre tout d'abord que la méthode à l'aide de laquelle on peut résoudre par radicaux les équations des premiers degrés fait défaut, lorsque l'on cherche à résoudre les équations générales de degrés supérieurs au quatrième. On identifie ensuite ce dernier problème qui en renferme plusieurs, puisqu'il s'agit de trouver *toutes* les racines de l'équation proposée, avec la résolution de l'équation résolvante de Galois. Cette équation de degré $n!$ n'est plus générale. On rencontre ainsi, dès le début, une équation *particulière*, on connaît une relation entre ses racines ou, ce qui revient au même, entre ses coefficients. On est ainsi amené à considérer en général des équations particulières, et à montrer que ce qui les caractérise, ce qui les distingue des équations générales, est *l'adjonction d'un genre* ou d'un groupe de substitutions *non symétrique*. Il est facile de démontrer l'identité de la transitivité du groupe d'une équation et de l'irréductibilité de cette équation ([1]); on voit également que la condition nécessaire et suffisante pour que les racines d'une équation irréductible soient toutes exprimables rationnellement par l'une d'entre elles est que l'ordre du groupe transitif de cette équation soit égal à son degré.

Après avoir considéré le groupe de l'équation résolvante de Galois et introduit l'idée de résolvante en général, M. Netto indique la méthode suivie par Lagrange pour réduire et, s'il est possible, résoudre les équations par un choix convenable d'une suite de résolvantes.

Il n'y a rien de particulier à remarquer sur les méthodes données par M. Netto pour résoudre les équations binômes. Le Chapitre suivant, qui traite des équations abéliennes, contient, outre

---

([1]) On peut regretter que M. Netto n'ait pas démontré aussi que, à la notion de Cauchy de transitivité d'ordre k, correspond l'irréductibilité des équations

$$f(x) = 0, \quad \frac{f(x)}{x - x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})} = 0.$$

les deux cas de résolubilité donnés par Abel et qui sont exposés dans le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret, une recherche sur les équations de degré $n = m.\nu$, dont les racines sont $x_1, \theta x_1, \theta_1 x_1, \ldots$, les fonctions rationnelles θ_k étant liées par les relations

$$\theta_1\theta(x_1) = \theta^{\alpha_1}\theta_1(x_1), \quad \theta_2\theta(x_1) = \theta^{\beta_1}\theta_2(x_1), \quad \ldots,$$
$$\theta_2\theta_1(x_1) = \theta^{\beta_2}\theta_1^{\gamma_2}\theta_2(x_1), \quad \theta_3\theta_1(x_1) = \theta^{\beta_3}\theta_1^{\gamma_3}\theta_3(x_1), \quad \ldots.$$

Ces conditions sont suffisantes pour que l'on puisse effectuer sur l'équation de degré ν dont dépend la résolvante

$$\varphi_1 = x_1 + \theta x_1 + \ldots + \theta^{m-1}x_1,$$

et dont les racines sont $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$, les mêmes réductions que sur l'équation proposée. On montre qu'elles sont également nécessaires sous l'unique condition que de $\varphi_\beta = \text{rat}(\varphi_\alpha)$, on puisse conclure que $x_\beta = \text{rat}_1(x_\alpha)$. On trouve facilement le groupe correspondant à cette classe d'équations.

Mais il faut observer que l'on n'obtient pas ainsi une nouvelle classe d'équations résolubles par radicaux. Il eût été facile à M. Netto d'insister davantage sur ce point important et de montrer que ces équations sont du genre de celles que M. Kronecker nomme *cycloïdales;* ce sont, en effet, des équations abéliennes dont les coefficients dépendent rationnellement d'une racine d'une équation abélienne. En se plaçant à ce point de vue, il conviendrait, sans doute, de changer l'ordre des matières et de considérer les équations abéliennes avant celles de M. Netto; on pourrait ensuite dire quelques mots sur les équations cycloïdales en général.

M. Netto donne deux démonstrations du théorème qui permet de ramener la résolution des équations abéliennes à celle d'équations abéliennes de degré premier. La première est due à M. Kronecker: elle est contenue dans les *Monatsberichte* de 1877; la seconde est celle donnée par M. Jordan, dans son Traité, n$^{\text{os}}$ 405-407.

Dans des recherches plus récentes qui viennent d'être publiées dans les *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, M. Kronecker *décompose* toute équation abélienne à coefficients entiers en équations abéliennes premières et en équations unités. Les racines de l'équation donnée sont fonctions rationnelles des racines des équations premières et des équations unités. Il étend ses recherches au cas où les coefficients de l'équation abélienne sont fonctions entières de variables h, à coefficients entiers.

La *décomposition* d'une équation abélienne à coefficients entiers, en équations abéliennes premières, est analogue à celle d'un nombre entier en ses facteurs premiers.

Ces nouvelles recherches de M. Kronecker n'ont naturellement pu trouver place dans l'Ouvrage de M. Netto.

A la suite des équations abéliennes, l'auteur considère une classe d'équations dont toutes les racines sont fonctions rationnelles de deux d'entre elles. Après avoir défini les équations de Galois, il cherche leur groupe et montre comment elles peuvent être résolues par des équations abéliennes. Exemple : $x^p = A$. (Comparer Jordan, *Traité*, Liv. III, Chap. II.) Enfin, il expose les recherches de M. Nöther (*Math. Ann.*, XV) sur les équations triples.

Les relations données entre les racines des équations particulières considérées jusqu'ici permettaient d'appliquer à leur étude la théorie des substitutions. Mais en est-il toujours ainsi et pourquoi est-on en droit d'appliquer, en général, la théorie des substitutions à l'étude des équations résolubles par radicaux?

Dire que x_0 est racine d'une équation résoluble par radicaux, c'est dire que x_0 peut être donné explicitement en fonction entière de quantités $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$, telles que chaque $V_\alpha^{p_\alpha}$, où p_α est un nombre premier, soit une fonction entière des $V_{\alpha+1}$, $V_{\alpha+2}, \ldots, V_\nu$, dont les coefficients soient fonctions rationnelles des quantités faisant partie du domaine de rationnalité. D'autre part, la théorie des substitutions suppose que toutes les fonctions auxquelles on l'applique soient des fonctions entières des variables. Pour légitimer l'emploi de cette théorie, dans le cas qui nous occupe, il faut donc démontrer que chaque expression V_λ est fonction entière des racines de l'équation considérée. Et ce théorème doit être démontré par un procédé algébrique, car il serait évidemment illusoire de vouloir employer une méthode fondée elle-même sur la théorie des substitutions.

Ce théorème, démontré d'après M. Kronecker, dont les méthodes simplifient celles d'Abel, il est facile d'en conclure l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations générales de degrés supérieurs au quatrième. L'étude de la forme des racines d'une équation supposée résoluble par radicaux conduit à une série de théorèmes sur ces équations; on obtient, en particulier, le théorème célèbre de Galois, que nous pouvons énoncer ainsi :

Toute équation irréductible et de degré premier, résoluble par radicaux, peut être ramenée à une suite d'équations abéliennes.

Après avoir introduit l'idée fondamentale de groupe d'une équation, M. Netto avait démontré deux théorèmes importants sur ces groupes; je les ai cités plus haut. Mais, dans la première Partie de l'Ouvrage, nous avons appris à connaître une série de propriétés fondamentales des groupes de substitutions. Si, à la transitivité du groupe d'une équation correspond l'irréductibilité de cette équation, il est naturel de chercher, par exemple, la propriété de l'équation qui correspond à la non-primitivité de son groupe de substitutions. Considérons, à cet effet, l'équation de degré $n = m.\nu$ résultant de l'élimination de y entre les deux équations

$$y^\nu - A_1 y^{\nu-1} + \ldots \pm A_\nu = 0,$$
$$x^m - S_1(y).x^{m-1} + S_2(y).x^{m-2} - \ldots \pm S_m(y) = 0.$$

On démontre que son groupe est non primitif et que toute équation dont le groupe est non primitif peut être considérée comme résultant de l'élimination de y entre les deux équations précédentes.

Outre la transitivité et la non-primitivité, nous avons vu qu'il existait une propriété bien importante des groupes de substitutions; un groupe peut être simple ou composé. Il est moins facile que dans les cas précédents de voir directement l'influence de cette propriété d'un groupe sur l'équation correspondante. Mais les propriétés d'une équation algébrique se reflètent pour ainsi dire dans celles de sa résolvante. Lorsqu'une équation $f(x) = 0$ de degré n est caractérisée par un groupe G d'ordre r, l'équation résolvante de Galois est réductible; chacun de ses $\frac{n!}{r}$ facteurs $F_1(\xi) = 0$ peut être considéré comme résolvante de l'équation; toutes les racines de $F_1(\xi) = 0$ sont fonctions rationnelles de l'une d'entre elles à l'aide de laquelle on peut exprimer toutes les racines de la proposée. Le passage de $f(x) = 0$ à $F_1(\xi)$ est identique à celui de G à son isomorphe holoédrique Ω. Ce théorème jette une vive lumière sur l'importance de l'idée d'isomorphisme dans la théorie des substitutions.

A chaque genre de fonctions correspond une certaine multivocité de ces fonctions. Il arrive souvent que le genre que l'on adjoint au domaine de rationnalité pour caractériser l'équation proposée est donné comme racine d'une équation irréductible. Il semble alors convenable d'adjoindre au domaine de rationnalité non pas une, mais toutes les racines de l'équation irréductible. Il convient donc de se demander ce que devient le groupe G d'ordre r d'une équation $f(x) = 0$, dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lorsque l'on adjoint au domaine de rationnalité toutes les racines $\psi_1, \ldots, \psi_m$ d'une équation irréductible $g(\psi) = 0$, dont les coefficients font partie du même domaine de rationnalité que ceux de $f(x)$, et dont nous *supposons* les racines fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On montre que l'équation résolvante ne peut être décomposée en facteurs non linéaires par l'adjonction d'une équation auxiliaire que si le groupe G est composé.

On peut voir maintenant de quelle importance fondamentale est la notion de groupes simples et composés. Si $G, G_1, G_2, \ldots, G_\nu, 1$, est une suite correspondant au groupe composé G, chaque G_α d'ordre r_α étant un groupe d'ordre maximum contenu dans $G_{\alpha-1}$ et permutable à ce groupe, on peut ramener la résolution de l'équation $f(x) = 0$ à groupe G à celle d'une suite d'équations irréductibles de degrés $\frac{r}{r_1}, \frac{r_1}{r_2}, \ldots, \frac{r_{\nu-1}}{r_\nu}, r_\nu$, dont les coefficients font partie du domaine de rationnalité de $f(x) = 0$. Les racines de chacune de ces équations sont toutes exprimables rationnellement par l'une d'entre elles; leurs groupes d'ordres $\frac{r}{r_1}, \frac{r_1}{r_2}, \ldots, \frac{r_{\nu-1}}{r_\nu}, r_\nu$ sont *simples*. L'équation résolvante de Galois est successivement réductible en $\frac{r}{r_1}, \frac{r}{r_2}, \ldots, \frac{r}{r_\nu}, r$ facteurs.

On démontre maintenant que la réduction du groupe G d'une équation $f(x) = 0$, produite par l'adjonction d'une équation irréductible quelconque, dont les coefficients font partie du même domaine de rationnalité que ceux de $f(x)$, est équivalente à la réduction produite par l'adjonction de toutes les racines d'une équation vérifiée par des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'hypothèse faite plus haut n'est donc pas une restriction, en ce sens, du moins, que nous n'obtenons aucune réduction nouvelle en la laissant de côté.

Mais il y a plus. Il n'est point nécessaire que les ψ soient fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour que le groupe G soit réduit par adjonction de $g(\psi) = 0$. Il suffit, pour que la réduction ait lieu, qu'il existe des fonctions rationnelles de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, égales à des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on suppose enfin que les racines des deux équations irréductibles $f(x) = 0$, $g(\psi) = 0$, soient liées rationnellement par des relations de la forme $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi_1, \ldots, \psi_m) = 0$, on démontre que l'on peut déduire ces relations de cette autre plus simple :

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_2(\psi_1, \ldots, \psi_m),$$

où les racines des deux équations sont séparées.

On voit donc que l'adjonction des racines de $g(\psi) = 0$ au domaine de rationnalité de $f(x) = 0$ ne peut donner, dans ce cas, comme dans le précédent, d'autres réductions que celles que l'on obtient par adjonction de fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous avons étudié les propriétés fondamentales des groupes; nous venons de voir comment ces propriétés se reflètent dans les équations correspondantes. Ceci posé, on peut demander quelles sont les équations résolubles par radicaux. La réponse est simple : il faut et il suffit que les facteurs de composition du groupe correspondant à l'équation soient des nombres premiers. A l'aide des théorèmes démontrés sur les suites de composition d'un groupe, on peut énoncer ce théorème de bien des manières différentes; on en déduit des corollaires intéressants.

M. Netto démontre ensuite le théorème qu'Abel énonce dans le t. II de ses *Œuvres complètes*, p. 191; sa démonstration repose sur ce qu'un certain groupe de la suite de composition du groupe G de l'équation donnée est un des groupes de la suite de composition *principale* de G. Elle montre clairement l'importance de la notion de suite de composition *principale*, due à M. Jordan.

J'insiste sur le résultat suivant dû à M. Netto; il montre combien sa méthode peut être avantageuse :

Lorsqu'en passant d'un terme H *de la suite de composition principale de* G *au suivant* K, *l'équation* $f(x) = 0$ *est réductible dans le nouveau domaine de rationnalité et contient les facteurs* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\lambda(x)$, *on a* $f_1(x).f_2(x)\ldots f_\lambda(x) = f(x)$; *si, au contraire, cette réduction s'est effectuée en passant d'un terme* H *de la suite de composition de* G *au suivant* H', *on sait seulement que le produit* $f_1(x)f_2(x)\ldots f_\lambda(x)$ *est égal à une puissance de* $f(x)$.

Les équations du quatrième degré donnent un exemple du dernier cas.

On est ainsi amené à supposer l'équation donnée primitive et de degré p^λ. Si alors l'équation doit être résoluble par radicaux, on montre facilement que son groupe est formé par la combinaison des substitutions arithmétiques de degré p^λ et de substitutions géométriques du même degré.

L'auteur examine particulièrement le cas où $\lambda = 1$; pour $\lambda = 2$, il donne les trois types des équations primitives résolubles par radicaux, et renvoie au Mémoire publié par M. Jordan, dans le *Journal de Liouville*, 2e série, t. XIII.

Enfin, dans le cas général, il démontre plusieurs théorèmes dont les derniers jettent une vive lumière sur les recherches de M. Nöther relatives aux équations triples que j'ai citées plus haut. On voit que l'on peut, en appliquant la même méthode, construire des équations quadruples de degré p^3, ...

Je citerai ce résultat élégant qui généralise celui de Galois sur les équations de degré p résolubles par radicaux : « Toutes les racines d'une équation primitive de degré p^λ, résoluble par radicaux, sont exprimables rationnellement par $(\lambda + 1)$ d'entre elles, pourvu que ces dernières ne forment pas un système conjugué. »

M. Netto, fidèle jusqu'au bout à son programme, se limite rigoureusement à la résolution des équations par radicaux. On ferme le Livre en ayant beaucoup appris et en désirant apprendre davantage.

J. Molk.

MANNHEIM (A.). — PREMIERS ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. — Paris, 1883 In-8°, 40 p.

M. Mannheim, avec une indiscutable compétence, p opose de réformer l'enseignement de la Géométrie descriptive, de façon à rapprocher cet enseignement des habitudes pratiques.

Dans la plupart des Traités didactiques sur la matière, on attribue, à ce qu'il nous semble, trop de *réalité* aux plans de projection; n'est-ce pas un abus, en effet, que de forcer le dessinateur à figurer, comme invisibles, les lignes qui seraient cachées par ces plans? D'un autre côté, on est bien obligé de reconnaître que la considération des points situés soit au-dessous du plan horizontal, soit en arrière du plan vertical, rend les épures difficiles à lire.

Partant de ce que les projections d'une figure quelconque ne changent pas quand on éloigne les plans de projection parallèlement à eux-mêmes, M. Mannheim propose de laisser la position de ces plans indéterminée, *de ne pas tracer la ligne de terre* et de supposer la figure dont on veut obtenir les projections tout entière en avant du plan vertical et au-dessus du plan horizontal : il donne ensuite quelques exemples bien choisis qui montrent nettement que, en procédant ainsi, on n'a à faire que des constructions tout aussi simples que celles où l'on utilise la ligne de terre, et qu'on lit plus facilement les résultats de ces constructions.

J. T.