BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 293-314

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_293_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WALRAS (LÉON), Professeur d'Économie politique à l'Académie de Lausanne. — THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA RICHESSE SOCIALE. Lausanne, 1883.

COURNOT (AUGUSTIN). — RECHERCHES SUR LES PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA THÉORIE DES RICHESSES. Paris; 1838.

Le titre de ces Livres semble promettre pour la science d'Adam Smith une voie sûre et nouvelle. Les auteurs n'ont rencontré cependant qu'une approbation très indifférente. Savant distingué, écrivain habile, esprit original et élevé, dans l'art des déductions, Cournot était un maître. M. Walras se fait honneur d'être son disciple. « Cournot », dit-il, « est le premier qui ait tenté franchement l'application des Mathématiques à l'Économie politique; il l'a fait dans un Ouvrage publié en 1838, qu'aucun auteur français n'a jamais critiqué. J'ai tenu », ajoute le savant professeur de Lausanne, « à mentionner l'auteur d'une tentative remarquable, sur laquelle, je le répète, aucun jugement n'a été porté, et à laquelle j'ose dire que justice n'a pas été rendue. »

Ce reproche, publiquement adressé aux compatriotes de Cournot, a été pour moi l'occasion de relire un Ouvrage fort oublié, dont, malgré la juste réputation de l'auteur, ceux qui l'ont parcouru n'ont pas tous conservé une impression favorable. « Le titre de mon Ouvrage », dit Cournot dans sa préface, « n'annonce pas seulement des recherches théoriques, il indique que j'ai l'intention d'y appliquer les formes et les symboles de l'Analyse mathématique. » Les formes et les symboles de l'Analyse mathématique imposent la précision et promettent la rigueur; ils n'inspirent et ne donnent droit à aucune indulgence. Les formules sont vraies ou fausses, les définitions vagues ou précises, les raisonnements rigoureux ou absurdes; tel est le langage des géomètres. C'est celui de Cournot. Plusieurs essais ont précédé le sien; il n'en cite qu'un seul : les principes d'Economie politique de Canard, petit Ouvrage publié en l'an X et couronné par l'Institut. « Ces prétendus principes », dit Cournot, « sont si radicalement faux et l'application en est tellement erronée, que le suffrage d'un corps éminent n'a pu préserver l'Ouvrage de l'oubli. On conçoit aisément que des essais de cette nature n'aient pas réconcilié avec l'Algèbre des économistes tels que Say et Ricardo. »

Le citoyen Canard, quoique professeur de Mathématiques, ignore ou oublie les éléments du calcul des fonctions. Sachant que le prix d'une denrée s'accroît avec le nombre des acheteurs, avec leurs besoins et avec les revenus dont ils disposent, et qu'il diminue avec le nombre et l'empressement des vendeurs, la traduction dans la langue algébrique est pour lui immédiate; $B + Ax$ est en effet, suivant Canard, le type de toute fonction croissante de la variable x, et $B' - A'x$ celui des fonctions décroissantes; tel est le point de départ et la base de sa théorie.

Comment devint-il lauréat de l'Institut? Sur le rapport de quelle Commission? Je n'ai pas eu l'indiscrétion de le chercher ([1]).

Les problèmes abordés par Cournot sont insolubles par le raisonnement seul; il n'entre pas cependant dans le plan du savant auteur de recourir à l'observation des faits; non qu'il en méconnaisse l'importance; mais il faut diviser le travail, et le sien est autre. Il étudie les lois, laissant à d'autres les chiffres. Ses formules, où n'entrent que des lettres, sont hérissées de fonctions inconnues; en s'appliquant à les chercher, il croirait sortir de son rôle. Vraies ou fausses, leur étude, pour les hommes de pratique, doit sembler une fatigue inutile; ils s'y soustrayent en fermant le livre. Si la théorie des richesses de Cournot, malgré la science de l'auteur, la juste considération attachée à sa personne, l'influence de sa situation et le mérite de ses autres écrits, n'a pu, depuis un demi-siècle, attirer sérieusement l'attention, c'est que les idées s'y dérobent sous l'abondance des signes algébriques; la suppression des symboles réduirait le livre à quelques pages, et presque toutes

---

([1]) La deuxième Classe de l'Institut (Sciences morales et politiques) avait proposé la question suivante :

« Est-il vrai que, dans un pays agricole, toute espèce de contribution retombe sur les propriétaires fonciers? et, si l'on se décide pour l'affirmative, les contributions indirectes retombent-elles sur les mêmes propriétaires avec surcharges? »

Canard fut couronné. Comme l'Homme aux quarante écus, il se prononçait pour la négative, mais en faisant de la solution demandée « un chaînon d'une suite de conséquences », dont Cournot a signalé avec raison la fausseté.

offriraient alors de judicieuses réflexions et des assertions dignes d'intérêt. Cournot veut-il étudier les lois de la lutte dont résulte, sur un marché, le prix courant de chaque denrée, problème difficile, si mal résolu par Canard, il fait remarquer que, pour une marchandise donnée, le prix de vente étant nécessairement en rapport avec le débit, en le nommant p on pourra représenter le débit par $\varphi(p)$; $\varphi(p)$ désignant une fonction dont la dérivée est négative, la recette totale du vendeur sera le produit $p\varphi(p)$; c'est ce produit, si la marchandise ne coûte rien, qu'il faut rendre le plus grand possible. Sans en savoir ni en chercher davantage, on peut, en conséquence, d'après les règles du Calcul différentiel, égaler à zéro la dérivée. Ainsi

$$p\,\varphi'(p)+\varphi(p)=0$$

est l'équation que le vendeur doit résoudre; il doit s'assurer toutefois que la seconde dérivée est négative et vérifier l'inégalité,

$$p\,\varphi''(p)+2\varphi'(p)<0.$$

Telle est, dans le cas d'une marchandise qui ne coûte rien et n'est grevée d'aucun impôt, la théorie mathématique du monopole. Ceux qui voudront l'appliquer n'auront plus qu'à chercher la fonction $\varphi(p)$. Le savant auteur fait judicieusement remarquer que, s'il ne peut satisfaire tous les acheteurs, le vendeur devra, par l'élévation du prix, réduire la demande à égaler, sans la surpasser, le chiffre possible de la production. Les choses étant ainsi établies, si la denrée est frappée d'un impôt, que doit-il arriver ? Le prix le plus souvent s'élèvera; il peut, dans certains cas, rester invariable, mais l'effet de l'impôt ne l'abaissera jamais. Toutes ces assertions de Cournot sont exactes; mais, pour les rendre évidentes, fallait-il employer l'Algèbre ? Insistons sur ce cas d'une source trop peu abondante pour suffire à la consommation, qui donnerait le produit maximum. Au moment où l'on établit un impôt sur chaque litre vendu, il pourra arriver qu'après avoir acquitté cet impôt, le propriétaire ait intérêt à accroître le prix qui jusque-là lui donnait le plus de profit, en diminuant, par une conséquence nécessaire, le chiffre de la production. L'accroissement du prix de vente lui procure en effet, sur chaque litre vendu, le même avantage qu'avant l'établissement de la taxe; mais la perte n'est plus la même, car, sur les bouteilles non vendues, il gagne ce qu'il donnait au fisc. Il peut arriver cependant que la diminution de la vente compense le double avantage de vendre à un prix plus élevé et de payer un impôt moindre; le propriétaire de la source doit supporter alors l'impôt tout entier, sans changer ni son prix ni le chiffre de sa production?

« Dès lors », ajoute Cournot, « il semblerait que, dans ce cas, le fisc ne serait limité, dans la fixation de la taxe, que par la condition de ne pas absorber entièrement le revenu net du producteur. Mais cette conséquence serait inexacte et l'on peut en démontrer la fausseté, au moins dans un cas. »

Cournot définit ce cas en langage algébrique; c'est celui où la fonction $\varphi'(\mathrm{D})$ est croissante avec D, et où l'on a $p' - p_0 > i, p_0$ et p' étant respectivement les racines des équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{F}(p) + [p - \varphi'(\mathrm{D})] \quad . \quad \mathrm{F}'(p) = 0, \\ \mathrm{F}(p) + [p - \varphi'(\mathrm{D}) - i]\,\mathrm{F}'(p) = 0. \end{cases}$$

Ces lettres et ces fonctions ont figuré dans les pages précédentes, elles sont connues du lecteur; cependant un géomètre même peut désirer une explication moins savante. Sans en donner aucune, Cournot continue : Soient Δ la limite nécessaire de la production et π la valeur de p tirée de la relation $\mathrm{F}(p) = \Delta$; il faudrait, dans l'hypothèse, que π fût $> p'$ et *a fortiori* $> p_0 + i$, i étant égal à $\pi - \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$. On aurait donc $\pi > p_0 + \pi - \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$ ou $p_0 < \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$.

Mais cette dernière inégalité ne peut certainement avoir lieu et $\varphi'(p)$ est, conformément à l'hypothèse, une fonction croissante avec D; car alors, p_0 étant $< \pi$, la demande D_0 correspondant à p_0 est $> \Delta$. $\frac{\varphi(\mathrm{D}_0)}{\mathrm{D}_0}$ est plus grand que $\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$; p_0 serait donc $< \frac{\varphi(\mathrm{D}_0)}{\mathrm{D}_0}$.

Cette valeur de p_0 constituerait donc le producteur en perte et par conséquent ne pourrait pas être racine de l'équation (1).

Une traduction devient nécessaire.

La question est celle-ci : dans les conditions où l'énoncé place le propriétaire de la source, l'État peut-il, par voie d'impôt, sur chaque litre de la marchandise, s'approprier la totalité du produit net, sans diminuer celui-ci et, par conséquent, sans procurer l'élévation du prix de vente? D'après l'une des hypothèses exprimées algébriquement, les frais croissent pour chaque litre avec le chiffre de la production. Si l'impôt sur l'ensemble absorbe tous les bénéfices sur les derniers litres obtenus, qui coûtaient plus cher que les autres, il mettra le producteur en perte; on s'abstiendra dès lors de les produire, et, la marchandise étant moins abondante, les prix s'élèveront, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il y a donc contradiction à admettre qu'on puisse, sans diminuer la production, absorber par un droit fixe la totalité du produit net. Il n'est pas nécessaire d'ailleurs que les frais soient croissants pour que, avant d'abandonner au fisc la totalité de ses bénéfices, le propriétaire cherche à se défendre, dût-il diminuer le produit net en élevant les prix. On ne s'explique pas que Cournot, en annonçant qu'on peut faire la preuve *au moins dans un cas*, semble douter de ce qui arriverait dans les autres. C'est à propos du Chapitre où sont puisés ces exemples et ces formules que M. Walras a écrit : « La théorie du monopole a été donnée sous la forme mathématique, qui est la forme la plus claire et la plus précise, par M. Cournot, au Chapitre V de ses recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses; malheureusement les économistes n'ont pas jugé à propos de prendre connaissance de cette théorie, et ils en sont réduits, au sujet du monopole, à une confusion d'idées qui, chez eux, se traduit à merveille par la confusion des mots. »

La condamnation est sévère. Les calculs dont nous avons cité un passage ne sont pas clairs cependant pour tout le monde; les résultats semblent de petite importance; quelquefois même, je dois l'avouer, ils paraissent inacceptables.

Telle est l'étude, faite au Chapitre VII, de la lutte entre deux propriétaires qui, sans avoir à craindre aucune concurrence, exploitent deux sources de qualité identique. Leur intérêt serait de s'associer ou tout au moins de fixer le prix commun, de manière à prélever sur l'ensemble des acheteurs la plus grande recette possible; mais cette solution est écartée. Cournot suppose que l'un des concurrents baissera ses prix pour attirer à lui les acheteurs, et que, l'autre, pour les ramener, les baissant à son tour davantage, ils ne s'arrêteront dans cette voie que lorsque chacun d'eux, lors même que son concurrent renoncerait à la lutte, ne gagnerait plus rien à abaisser ses prix. Une objection péremptoire se présente : dans cette hypothèse aucune solution n'est possible, la baisse n'aurait pas de limite; quel que soit en effet le prix commun adopté, si l'un des concurrents abaisse seul le sien, il attire à lui, en négligeant des exceptions sans importance, la totalité de la vente, et il doublera sa recette si son concurrent le laisse faire. Si les formules de Cournot masquent ce résultat évident, c'est que, par une singulière inadvertance, il y introduit, sous le nom de D et D′, les quantités vendues par les deux concurrents, et que, les traitant comme des variables indépendantes, il suppose que, l'une venant à changer par la volonté de l'un des propriétaires, l'autre pourra rester constante. Le contraire est de toute évidence.

Cournot, dans d'autres occasions, introduit dans l'énoncé de ses problèmes des abstractions dont la déclaration formelle met à l'abri sa responsabilité de géomètre. N'est-on pas toujours libre de poser un problème à sa guise? C'est ainsi qu'en traduisant en formules la question si complexe de la liberté commerciale, après avoir démontré mathématiquement que la nation qui exporte accroît son revenu et que celle qui reçoit des marchandises diminue le sien, il ajoute : « Nous ne tenons pas compte, en déduction de cette diminution réelle de revenu, de l'avantage résultant, pour les consommateurs qui achètent par suite de la baisse, de ce qu'ils font ainsi de leurs revenus un usage plus à leur convenance. »

Supposons, par exemple, que le prix du drap baisse de moitié chez la nation qu'on déclare appauvrie; ceux qui portaient des vêtements de coton en hiver pourront les remplacer par des costumes de drap, et, en faisant ainsi de leur revenu *un usage plus à leur convenance*, diminuer la mortalité. C'est un avantage, Cournot le reconnaît; mais, ne pouvant l'évaluer dans ses formules, il prévient simplement qu'il n'en tiendra pas compte. A-t-on le droit de lui rien reprocher ?

Les représentations géométriques, dans le Livre de M. Walras, remplacent souvent les formules; les raisonnements sont plus accessibles, les résultats plus voisins de l'application; le succès a été plus rapide et plus grand. « Si l'on ne considérait l'état de la question qu'en France et en Angleterre », écrit-il au savant professeur Stanley Jevons, qui s'est rencontré avec lui sur plus d'un point, « nous n'aurions guère à partager qu'une réputation de rêveurs chimériques; mais il en est autrement ailleurs, notamment en

Italie, où la méthode nouvelle a été saisie, dans son esprit et dans sa portée, avec une intelligence et une promptitude merveilleuses. »

Sans aborder ici les nombreuses, importantes et difficiles questions traitées par M. Walras, et me prononcer sur les conclusions qui partagent les meilleurs juges, je veux me borner à discuter un principe proposé comme fondamental.

Imaginons un marché sur lequel se présentent des porteurs d'une marchandise (A) disposés à en donner une partie pour se procurer de la marchandise (B), et où, d'un autre côté, se présentent des porteurs de la marchandise (B) qui veulent la convertir en marchandise (A). Un certain cours s'établira; m(A) seront échangés contre n(B). Quels sont les éléments constitutifs de ce prix? M. Walras, que j'abrège, suppose, pour résoudre ce problème, que chaque porteur de l'une des marchandises, sans rien laisser à l'impression de la dernière heure, ait pris, avant d'arriver au marché, une résolution définitive pour chacun des cas qui peuvent se présenter. Remplaçons, pour plus de concision, la marchandise (B) par de l'argent et supposons que la marchandise (A) soit du blé, le marché mettant en présence des cultivateurs qui désirent les plus hauts prix et des acheteurs qui désirent les moindres. Chaque acheteur, suivant l'hypothèse, donnera ses ordres à un courtier, et lui dira, par exemple : si le cours est 20$^{\text{fr}}$, achetez pour moi 100$^{\text{hlit}}$; à 25$^{\text{fr}}$ n'en prenez que 60; à 30$^{\text{fr}}$ je n'en veux que 10, et à 35$^{\text{fr}}$ je m'abstiens. Le tableau complet fera connaître, en regard de chaque cours, le chiffre correspondant des achats. Les vendeurs, de leur côté, ont donné leurs ordres, et l'on sait, pour chaque cours, la quantité que chacun propose.

La solution est fort simple : le savant professeur suppose que, si l'on réunit les carnets de tous les acheteurs, et que, pour chaque cours successivement, on fasse la somme de leurs demandes, les carnets des vendeurs, par leur réunion, fourniront un tableau semblable. Ces tableaux résultants pourront être remplacés par des courbes dont les abscisses sont les prix de vente. Le point d'intersection des deux courbes a pour abscisse le cours que M. Walras nomme cours d'équilibre : c'est celui-là qui tend à s'établir.

Tel est le théorème de M. Walras; en voici la démonstration. Supposons que les courbes se coupent en un point dont l'abscisse soit par exemple 25. Si, dès le début du marché, on propose le cours de 25fr par hectolitre, le chiffre des demandes à ce cours égalant par hypothèse celui des offres, les transactions s'accompliront aisément, chaque vendeur trouvant un acheteur et chaque acheteur un vendeur; mais aucune vente ultérieure ne sera possible; au-dessus de 25fr, on ne trouvera plus d'acheteurs, ni, au-dessous, de vendeurs. Si l'on avait fixé tout d'abord un cours supérieur à 25fr, on se serait aperçu, après quelques transactions, que les offres surpassaient les demandes, et il y aurait eu baisse; un prix inférieur à 25fr provoquerait, au contraire, la hausse, et, dans les deux cas, on s'approche du cours d'équilibre.

Je crois avoir résumé, sans nuire à sa clarté, le raisonnement du savant professeur de Lausanne.

J'y ferai maintenant une objection. En remplaçant le groupe des acheteurs par un acheteur unique demandant à chaque cours autant d'hectolitres que tous les acheteurs réels pris ensemble, on change les conditions du problème. Il n'est pas permis davantage de remplacer tous les vendeurs par un seul. Supposons, pour le démontrer par un exemple, que deux acheteurs aient demandé 100hlit chacun, le premier au cours de 20fr et rien à un prix plus élevé, le second quel que soit le cours. Supposons, de plus, qu'au premier cours de 20fr le courtier chargé de tous les ordres de vente ait vendu 100hlit. Il n'est pas indifférent que ce soit au compte du premier ou du second acheteur et que l'un ou l'autre se retire du marché, car la présence de l'un tend à abaisser les cours, celle de l'autre à les élever.

On doit remarquer que les courbes qui représentent les ordres des acheteurs aux divers cours doivent nécessairement, sans que pour cela leurs intentions aient changé, varier pour chacun d'eux pendant la durée du marché. Les courbes résultantes, dont l'intersection résout le problème, se déforment sans cesse, et l'on peut aisément démontrer la variation nécessaire de l'abscisse du point elles se coupent. Supposons, par exemple, que l'un des acheteurs où ait inscrit les ordres suivants : à 20fr acheter 100hlit, à 25fr 60hlit, et à 30fr 50hlit seulement. Le premier cours est 20fr; sur les 100hlit qu'il demande on ne peut en acheter que 50; puis les prix s'élèvent, et l'on atteint le cours de 30fr, qui se maintient. Que doit faire le courtier? Acheter 50hlit à 30fr? Nullement, car 50hlit à 20fr et 50hlit à 30^{fr} en représentent 100 à 25^{fr}, et, à ce prix, on n'en demande que 60. Le courtier devra se décider par la condition que le prix moyen entre son achat nouveau et les 50^{hlit} déjà achetés corresponde, sur le carnet du client, à la totalité des achats faits pour son compte. Pour chaque cours se présente un problème semblable, et la courbe qui représente les ordres doit, après chaque transaction, être calculée et refaite. Doit-on, pour obtenir le prix d'équilibre, se servir de la courbe nouvelle ? Si l'on répond oui, le théorème de M. Walras perd son caractère géométrique, le résultat final dépend des circonstances accidentelles qu'on avait eu la prétention d'éliminer. Comment cependant répondre non? Comment admettre qu'un nouveau venu sur le marché, à qui l'on ferait connaître l'état actuel des choses, n'ait pas le droit d'appliquer les principes? Autant vaudrait, pour prévoir les prix, s'informer des ordres donnés au marché du mois précédent.

Un dernier argument, s'il subsistait des doutes, les fera complètement disparaître. Supposons que, d'après les intentions connues des acheteurs et des vendeurs, le cours d'équilibre calculé une heure avant l'ouverture du marché à l'aide du théorème discuté soit 25^{fr} l'hectolitre. Un nouvel acheteur se présente : au-dessous de 25^{fr} il veut acheter sans limite, et ne rien prendre ni à ce cours ni *a fortiori* au-dessus. Sa présence, si l'on en croit la règle de M. Walras, n'exercerait aucune influence; elle relève en effet jusqu'à l'infini la courbe des demandes pour les points dont l'abscisse est inférieure à 25, sans la changer en rien pour les autres; l'intersection, dont on a fait dépendre le résultat, restera la même et correspondra toujours à l'abscisse 25. Peut-on admettre une telle conclusion? Le cours de 25^{fr}, en supposant qu'il tende à s'établir, ne sera ni le seul ni le premier; les prix oscilleront autour de lui; chaque fois qu'ils lui seront inférieurs, l'acheteur nouveau se présentera, et ceux qui lui vendront, ayant écoulé tout ou partie de leur marchandise, n'offriront plus, au cours de 25^{fr}, ce qu'ils avaient offert au début. L'un d'eux, je suppose, avait apporté 100^{hlit} au marché; au cours de 25^{fr} il voulait tout vendre, et, à 24^{fr}, n'en livrer que 80; le cours de 24^{fr} s'est présenté : l'acheteur dont nous parlons a pris ses 80^{hlit}; il n'en reste que 20 à offrir; l'ordonnée de la courbe des vendeurs a donc subi, pour l'abscisse 25, une diminution égale ou supérieure à 80;

celle des achats n'a pas changé. Le point d'intersection des deux courbes s'est donc déplacé, et, comme l'une d'elles a des ordonnées infinies quand l'abscisse est moindre que 25, c'est de l'autre côté que se fera l'intersection nouvelle, et, d'après la règle même que nous contestons, l'intervention du nouvel acheteur doit élever le cours final.

Mon intention n'est pas d'analyser le Livre de M. Walras; j'y trouverais beaucoup à louer, beaucoup aussi à contredire. Je veux me borner, en terminant, à indiquer une définition par laquelle le savant auteur détourne de sa signification habituelle un mot dont le sens usuel est bien connu. Cela est permis assurément, mais à la condition que le sens nouveau soit rigoureusement défini, Je ne crois pas cette condition remplie, et cependant le mot *rareté,* tel que l'entend M. Walras, joue un grand rôle dans ses raisonnements.

L'ingénieux auteur, dont je prendrai la liberté d'abréger les explications, suppose que le possesseur d'une quantité a d'une certaine denrée tire de cette possession une certaine utilité, une certaine satisfaction de ses besoins ou de ses désirs, que chaque parcelle acquise accroît successivement, de telle sorte que, la quantité possédée passant de x à $x + dx$, l'avantage soit pour lui représenté par $\varphi(x)\,dx$. La possession de a équivaut alors à l'intégrale $\int_0^a \varphi(x)dx$. Le prix réglé par les conditions du marché n'a aucune relation nécessaire avec la fonction φ, qui varie d'un individu à l'autre. Si l'on nomme p le prix de chaque unité achetée ou vendue, il est clair qu'en payant $p\,dx$ l'acroissement dx, qui, pour lui, représente une satisfaction mesurée par $\varphi(x)dx$, celui dont nous parlons fera une bonne affaire, si $\varphi(x)$ est plus grand que p, et une mauvaise si $\varphi(x)$ est moindre que p; il devra acheter ou vendre une certaine quantité de la marchandise qu'il possède selon que l'une ou l'autre de ces conditions sera remplie, et cesser ses achats ou ses ventes quand on aura $\varphi(x) = p$. Si $x = \alpha$ est la racine de cette équation, α est ce que M. Walras nomme la rareté de la marchandise pour la personne considérée.

Cette définition, sans parler de l'inconvénient de disposer du sens d'un mot bien connu et usuel, paraît avoir le défaut grave de perdre toute signification quand on l'applique aux commerçants, qu'il faudrait, au contraire, avoir surtout en vue dans les problèmes de ce genre. Un marchand de blé achète des millions d'hectolitres et sait ce qu'ils lui ont coûté ; il vend au cours du jour quand il y trouve profit, quelquefois à perte quand il prévoit la baisse, pour éviter une perte plus grande, conserve en magasin quand il espère la hausse, et ne se règle nullement sur les avantages que peuvent lui procurer les diverses parties de la provision.

Les deux théories que je viens de résumer jouent l'une et l'autre un rôle important dans l'œuvre considérable de M. Walras. L'abandon de ces théories troublerait plus d'un raisonnement, beaucoup d'autres resteraient entiers ; je m'abstiens de les aborder.

J. Bertrand.

RADAU (R.). — Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques (*Annales de l'Observatoire de Paris*, Partie théorique, t. XVI). Paris, 1881. In-4° de 114 p.

Les Tables de réfractions en usage parmi les astronomes sont sensiblement d'accord pour les distances zénithales qui n'excèdent pas 80° ; les petites différences qui subsistent encore ne sont guère dues qu'à la diversité des valeurs adoptées pour la constante qui dépend de l'indice de réfraction de l'air. C'est que, dans ces limites, la loi suivant laquelle on fait décroître la densité des couches atmosphériques a très peu d'influence sur le résultat.

Il n'en est plus de même pour les réfractions qui s'opèrent plus près de l'horizon. Les valeurs de la réfraction horizontale moyenne qui se déduisent des diverses théories diffèrent de plusieurs minutes, et les mêmes écarts se présentent lorsque l'on compare ces théories aux observations faites dans le voisinage de l'horizon. Ce désaccord prouve que, pour le calcul des réfractions un peu fortes, il ne suffit point de connaître la température et la pression ; il faudra évidemment introduire dans les Tables un autre élément qui permette de tenir compte du décroissement plus ou moins rapide des densités. Il y a lieu aussi d'examiner l'influence que peut exercer un dénivellement des couches réfringentes. C'est l'étude de ces questions qui fait l'objet du Mémoire que nous résumons ici; on y trouve, en outre, des Tables fondées sur une nouvelle théorie.

Les premiers Chapitres sont consacrés à un exposé critique des théories connues. L'auteur commence par discuter les diverses formes qui peuvent être données à l'intégrale par laquelle s'exprime la réfraction, et il établit qu'il y a tout avantage à adopter la suivante :

$$r = A_0 \int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\cot^2 z + 2s - 2\alpha\omega}},$$

qui est plus simple, sans être pour cela moins exacte, que les formules usitées. On a désigné par z la distance zénithale; les variables s, ω sont définies par les relations

$$s = 1 - \frac{r_0}{r}, \quad \omega = 1 - \eta = 1 - \frac{\rho}{\rho_0},$$

où ρ est la densité de la couche de rayon r. Les constantes α et A_0 dépendent de l'indice de réfraction de la couche r_0, qui a la densité ρ_0; mais A_0 n'est pas la constante ordinaire, elle est un peu plus faible (d'environ $\frac{1}{900}$) : c'est le coefficient du premier terme de la série de Laplace

$$r = A_0 \operatorname{tang} z - A_1 \operatorname{tang}^3 z + \ldots.$$

Pour qu'on puisse obtenir la valeur de cette intégrale, il faut faire une hypothèse sur la loi suivant laquelle la densité varie avec l'altitude. On a une première approximation en supposant, avec Cassini, la densité de l'air constante, de sorte que la réfraction s'opère dans une couche terminale, infiniment mince. L'hypothèse d'une densité décroissant en progression arithmétique, sur laquelle reposent les formules de Mayer, de Bouguer, de Simpson et de Bradley, fournit une approximation beaucoup plus satisfaisante, car elle permet de représenter les réfractions observées jusqu'à 80°. Si l'on pose

$$\zeta = \frac{\sqrt{\cot^2 z + 2a} - \cot z}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\cot^2 z + 2a} - \cot z}$$

ou bien

$$\sqrt{2a} \operatorname{tang} z = \operatorname{tang} \varphi, \quad \zeta = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi,$$

a étant une constante, la formule de Mayer devient

$$r = \frac{2A_0}{\sqrt{2a}}\zeta.$$

La fonction de z qui vient d'être désignée par ζ joue un grand rôle dans la théorie des réfractions astronomiques, car l'expression de r peut toujours être développée en série ordonnée par rapport aux puissances impaires de ζ. Cette série se déduit de la série de Laplace en faisant

$$\sqrt{2a}\tang z = \frac{2\zeta}{1-\zeta^2}.$$

On y arrive aussi directement en substituant l'expression de $\tang z$ dans l'intégrale même, et en développant le radical suivant les puissances de ζ, par le procédé d'Ivory. En posant

$$s - \alpha\omega = u = a v$$

($\omega = 1$, $u = a$, $v = 1$ à la limite de l'atmosphère), on trouve

$$r = A_0 \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\cot^2 z + 2u}} = \frac{2A_0}{\sqrt{2a}}(\zeta + B_1\zeta^3 + B_2\zeta^5 + \ldots),$$

où

$$B_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^1 D_v^n (v - v^2)^n\, d\eta.$$

Si nous désignons par i une variable fictive qui a pour valeur l'unité, et par le symbole Δ_i^n l'opération $D_i^n (i = 1)$, on aura évidemment

$$D_v^n (v - v^2)^n = \Delta_i^n (i - i^2 v)^n = \Delta_i^n\, i^n (1 - iv)^n,$$

et cette transformation peut, dans certains cas, faciliter l'intégration. En désignant par a, b deux valeurs particulières de X, et posant

$$C = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

on a, d'une manière générale,

$$\frac{1}{\sqrt{X}} = \frac{2}{1.2\ldots n}\sum C^{2n+1}\Delta_i^n [i(b-a) - i^2(X-a)]^n,$$

développement qui offre un moyen commode d'évaluer certaines intégrales définies.

Nous ne nous arrêterons pas aux expressions de la réfraction sous forme finie qu'on obtient, soit en posant $\eta = (1 - v)^m$, soit en posant $v = (1 - \eta)(a - b\eta)$ ou $v = (1 - \sqrt{\eta})(a - b\sqrt{\eta})$. Les relations de la forme $\eta = f(u)$ permettent sans doute d'établir l'expression de r d'une manière très directe, mais elles ont l'inconvénient de supposer, pour la constitution de l'atmosphère, des lois compliquées. Il en est ainsi de l'hypothèse $\eta = e^{-\frac{u}{a}}$, qui donne

$$r = \frac{2A_0}{\sqrt{2a}} \psi\left(\frac{\cot z}{\sqrt{2a}}\right),$$

en désignant par $\psi(Z)$ la transcendante

$$\psi(Z) = \int_Z^\infty e^{Z^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{Z^2 + x}},$$

pour laquelle on possède des Tables. La constante a peut se déterminer de différentes manières : en prenant $a = \frac{1}{838}$, on obtient la formule de M. Oppolzer. La théorie de Laplace est fondée sur l'hypothèse

$$\eta = \left(1 + f\frac{u}{a}\right) e^{-\frac{u}{a}},$$

qui permet aussi d'exprimer r par la transcendante ψ, mais d'une manière moins simple; elle a seulement l'avantage de renfermer deux constantes (a, f) au lieu d'une seule, ce qui la rend plus propre à représenter des observations données.

Renonçant aux avantages que présentent les relations un peu artificielles de la forme $\eta = f(u)$, la plupart des géomètres ont préféré définir la constitution hypothétique de l'atmosphère par une relation simple entre la densité et l'altitude (Kramp, Bessel), ou la température et l'altitude (Schmidt, Bauernfeind, Gyldén), ou la densité et la température (Ivory, Kowalski).

Soient p la pression en atmosphères, T la température absolue,

$$\tau = \frac{T}{273} = 1 + 0,00366\,t;$$

la loi de Mariotte et de Gay-Lussac donne

$$p = \rho\tau,$$

et l'équation d'équilibre de l'atmosphère devient

$$8\,dp = -\,\rho \check{R}\,ds,$$

ou bien

$$\frac{dp}{p_0} = -\,\eta\,\frac{R}{l_0}\,ds = -\,\eta\,dy,$$

où $R(=r_0)$ est le rayon terrestre, et $l_0 = 8\tau_0$; le nombre 8 (plus exactement 7,993) représente la hauteur, en kilomètres, d'une colonne d'air de densité 1 dont le poids balancerait 760^{mm} de mercure. La variable $y = \frac{Rs}{l_0}$ représente l'altitude, et, en étendant l'intégration jusqu'à la limite de l'atmosphère, on a

$$\int_0^Y \eta\,dy = 1.$$

En admettant que, comme la pression, la densité s'annule à la limite, on aurait aussi

$$\int_0^1 y\,d\eta = 1, \qquad \int_0^1 u\,d\eta = \frac{l_0}{R} - \frac{\alpha}{2} = \theta.$$

Le nombre θ sert à déterminer les deux premiers coefficients (A_0, A_1) de la série de Laplace, qui sont ainsi indépendants de la loi des densités, pourvu que η s'annule à la limite, ce qui n'est pas certain *a priori*.

Les relations ci-dessus (où il faut encore introduire un terme de correction lorsque η^n ne s'annule pas) expriment la condition à laquelle doit satisfaire la loi hypothétique des densités pour qu'elle puisse s'étendre jusqu'à la limite de l'atmosphère (¹).

Dans le cas de l'hypothèse de Laplace, cette condition est représentée par la relation

$$(1+f)a = \theta = \frac{\tau_0}{796} - \frac{\rho_0}{6800},$$

qui montre que les constantes a, f ne peuvent conserver la même

(¹) Lorsqu'on prend $\eta_n > 0$, l'intégration doit néanmoins être étendue jusqu'à $\eta = 0$; autrement le résultat ne comprendrait pas la réfraction à la surface de l'atmosphère.

valeur pour toutes les températures. C'est ce que M. Caillet a oublié en calculant les Tables du Bureau des Longitudes; ses réfractions ne reposent sur la théorie de Laplace que pour $t_0 = 0^\circ$ (¹).

Les Tables de Newton sont fondées sur l'hypothèse d'une densité décroissant en progression géométrique pendant que la température reste constante ($\eta = e^{-y}$). Kramp et Bessel ont modifié cette hypothèse en faisant

$$\eta = e^{-\frac{y}{1+f}} = e^{-\beta s}, \quad \left(\beta = \frac{R}{l_0} - \frac{R}{g}\right).$$

Mais alors η_n ne s'annule pas. Chez Bessel, $\eta_n = 0{,}036$ pour $p = 0$, à la hauteur de 28^{km}, et la température ne décroît que de $1^\circ,2$ pour les premiers 1000^{m}.

Une autre hypothèse consiste à admettre que la température décroît uniformément à partir du sol. C'est sur elle que reposent une première théorie d'Ivory, ainsi que celles de Schmidt, de Bauernfeind, de Fabritius, et au fond aussi celle de Baeyer. La manière la plus simple de la mettre en équation est de poser

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{s}{S} = x,$$

d'où

$$\eta = x^k, \quad \frac{p}{p_0} = x^{k+1}, \quad RS = (k+1) l_0.$$

La hauteur de l'atmosphère H et le décroissement Δt pour 1000^{m} sont donnés par les formules

$$H = (k+1) l_0, \quad \Delta t = \frac{34^\circ,15}{k+1},$$

et, en prenant $h = 4, 5, 6$, on obtient des nombres qui s'accordent bien avec l'expérience.

La première théorie de M. Gyldén est fondée sur la relation moins simple

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left(1 - \frac{1}{2}\beta s\right)^2 = \left(1 - \frac{s}{S}\right)^2,$$

(¹) *Voir* p. 25 et 55 du Mémoire.

qui donne

$$\frac{\tau}{\tau_0} = x^2, \quad \eta = \frac{1}{x^2} e^{g - \frac{g}{x}}.$$

Cette hypothèse recule la limite de l'atmosphère au delà de 100^{km}; mais il est facile de voir que les couches situées au-dessus de 50^{km} ne produisent qu'un effet négligeable, et que le résultat diffère à peine de celui que fournit l'hypothèse d'un décroissement uniforme. Plus tard, M. Gyldén a préféré représenter la température par une suite de termes de la forme $s^n e^{-as}$. Mais alors les intégrations ne peuvent être faites qu'au moyen de séries plus ou moins convergentes.

On échappe à beaucoup de difficultés en partant d'une relation entre la température et la densité, à l'exemple d'Ivory, qui fait simplement

$$\vartheta = 1 - \frac{\tau}{\tau_0} = f\omega,$$

d'où

$$y = -(1-f)\log\eta + 2f\omega,$$
$$\vartheta = \frac{f}{1+f}y - \frac{f-f^2}{2(1+f)^3}y^2 + \ldots.$$

En ajoutant un terme et posant

$$\vartheta = f\omega + g\omega^2,$$

on a

$$\vartheta = \frac{f}{1+f}y + \frac{2g-f+f^2}{2(1+f)^3}y^2 + \ldots,$$

et l'on peut ainsi représenter des lois très variées, en choisissant convenablement les coefficients f, g. Le décroissement devient presque uniforme et égal à $5°,7$ par 1000^m, pour $f = 0,2$, $g = 0,08$. Dans l'hypothèse d'Ivory, le décroissement se ralentit peu à peu, dans celle de Bessel il s'accélère, à mesure que l'altitude augmente. Pour exprimer un abaissement d'abord très rapide, mais qui se ralentit très vite, comme celui qui a été constaté par M. Glaisher dans ses ascensions aérostatiques, on peut introduire une puissance fractionnaire de ω, en posant, par exemple,

$$\vartheta = k\omega^{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad \vartheta = f\omega + a\sqrt{\omega};$$

ces hypothèses sont un peu plus simples que celles de M. Kowalski (¹), qui fait

$$\frac{\tau_0}{\tau} - 1 = k\,\omega^{\frac{5}{7}}.$$

Mais il n'est nullement nécessaire, pour représenter les observations en question, de recourir à des puissances fractionnaires qui rendent les intégrations difficiles; on arrive au même résultat avec des expressions où ne figurent que des puissances entières de ω et de η. Tous les modes de distribution des températures sont d'ailleurs aisément représentés par des formules telles que la suivante :

$$\Im = f\omega + a(1 - \eta^m) + b\,\omega\eta^n,$$

qui permettent d'intégrer immédiatement l'équation

$$dy = d\Im - (1 - \Im)\,\frac{d\eta}{\eta},$$

et d'où il est facile de déduire ensuite l'expression de $\Im$ en fonction de l'altitude y. C'est cette raison qui doit faire préférer les relations de la forme $\Im = f(\omega)$ aux relations de la forme $\Im = f(y)$, bien que ces dernières expriment la loi des températures d'une manière plus directe.

Il s'agit maintenant de voir comment s'obtient, dans ces diverses hypothèses, l'expression générale de r en fonction de z.

On peut, d'une part, recourir au développement

$$\zeta + B_1\,\zeta^3 + \ldots,$$

dont les coefficients dépendent d'intégrales de la forme $\int u^m\,d\eta$. Cette série se recommande surtout dans le cas du décroissement uniforme où les coefficients B peuvent être obtenus sous une forme assez remarquable. En faisant $\eta = x^k$, on trouve que B_n s'exprime par l'intégrale

$$\Delta_i^n \int_0 [1 - x - \gamma(1 - x^k i^{k-1})]^n\,dx,$$

et, en développant la parenthèse, on voit que le coefficient de γ^{p+1}

(¹) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, septembre 1878.

a pour expression

$$\Delta_i^n \Delta_j^{-(n-p)} (i^{k-1} j^k - 1)^{p+1}.$$

Le facteur γ dépend du thermomètre et du baromètre, tandis que l'exposant k dépend du décroissement de la température. En posant $k + 1 = \frac{6}{1+\lambda}$, on a

$$\Delta\Gamma = 5^\circ,69(1+\lambda),$$

et les différences des réfractions calculées avec diverses valeurs de l'exposant k sont sensiblement proportionnelles à λ, comme le montre le Tableau de la page 55 du Mémoire.

M. Gyldén a également le facteur $(1+\lambda)$ par lequel on tient compte du décroissement Δt; mais les corrections des réfractions qui dépendent de λ paraissent avoir été calculées par des séries insuffisamment convergentes. Les observations de M. Fuss, à Poulkova, ont donné pour λ des valeurs comprises entre $-0,45$ (décembre) et $+0,74$ (août). Ces observations, comme celles de M. Kowalski, à Kazan, laissent cependant apparaître assez souvent des écarts trop considérables pour être attribués aux variations du coefficient λ et qui doivent être expliqués par une inversion des températures, phénomène dont la réalité a été souvent constatée. Un maximum de température qui se manifeste à une faible hauteur produit un décroissement très rapide de la densité et, par suite, une réfraction exceptionnellement forte. Cette question a été examinée avec soin (p. 58-60).

Au lieu de recourir à la série $\zeta + B_1\zeta^3 + \ldots$, on peut encore obtenir l'expression de la réfraction au moyen de la transcendante $\psi(Z)$, en faisant usage d'un développement fondé sur le théorème de Lagrange. Nous avons déjà vu que cette transcendante se présentait tout naturellement dans le cas particulier de $\eta = e^{-x}$, car, en faisant $\log\eta = -x$ et $\cot^2 z = 2aZ^2$, la réfraction s'exprimait par l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{Z^2+x}}$.

L'hypothèse de Bessel et celle d'Ivory conduisent à des intégrales de la forme $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{Z^2+x-\varphi(x)}}$, et, en posant $x - \varphi(x) = w$, le théorème de Lagrange fournit le moyen d'exprimer aussi

$e^{-x}dx$ en fonction de la nouvelle variable w, de sorte que l'intégration devient possible à l'aide de la transcendante ψ. Cette transformation peut d'ailleurs s'opérer de plusieurs manières différentes (p. 40-44). On trouve (p. 45) les réfractions déduites de la théorie de Bessel pour quatre valeurs différentes du paramètre β, et (p. 64-65) la comparaison des réfractions calculées d'après quelques-unes des théories les plus importantes. Enfin le tableau de la page 72 donne, pour trois distances zénithales, les réfractions qui répondent à une série d'hypothèses sur la forme du décroissement Δt, auxquelles on arrive en attribuant diverses valeurs aux coefficients f, g de la formule $\mathfrak{I} = f\omega + g\omega^2$.

Il se trouve que l'influence du coefficient g est beaucoup moins sensible que celle du coefficient f, de sorte que, pour la construction d'une Table de réfractions normales, il y a lieu de prendre simplement $\mathfrak{I} = f\omega$. Le calcul des réfractions peut alors se faire au moyen de la formule

$$r = \mathrm{C}(\mathrm{E}_0 - k\mathrm{E}_1 + k^2\mathrm{E}_2 - k^3\mathrm{E}_3),$$

dont le dernier terme est généralement négligeable. Le coefficient C ne dépend que du baromètre et du thermomètre; k dépend aussi du paramètre f, par lequel on tient compte du décroissement Δt. Les fonctions E, qui dépendent de l'argument $\mathrm{Z} = \gamma \cot z$ ont été réduites en Tables (75-78).

Après avoir calculé par cette méthode, pour les distances zénithales comprises entre 80° et 90°, un assez grand nombre de valeurs de r, l'auteur les a complétées par interpolation, de manière à former une Table à double entrée (Table I) qui donne directement les réfractions pour chaque degré de t, depuis $-30°$ jusqu'à $+30°$ C., et pour des valeurs assez rapprochées de l'argument z, en supposant $f = 0,2$ et $\mathrm{B} = 760$ à t^0. Cette Table deviendrait tout à fait commode, si elle était étendue par interpolation de façon à donner, par exemple, r pour toutes les minutes de z. Elle occuperait alors un plus grand volume; mais la double interpolation serait alors très facile. La disposition adoptée par Bessel, qui a pour but d'éviter les Tables à double entrée, devient incommode et cesse même d'être exacte quand z approche de 90°. Les petites Tables II et III fournissent les corrections qui dépendent des variations du paramètre f et de l'état du baromètre; le calcul peut se faire, soit en corrigeant les réfractions moyennes, soit en corrigeant l'argument t.

Pour tenir compte des variations diurnes ou des perturbations accidentelles du décroissement Δt, il faudrait introduire dans l'expression théorique de ce décroissement des termes nouveaux dont l'influence pourrait se déterminer directement comme celle des paramètres f, g; mais les réfractions qui répondent à ces hypothèses s'obtiendront plus simplement par des quadratures approchées (p. 92-99).

Un dernier Chapitre est consacré à l'étude des modifications que les réfractions éprouvent lorsque les surfaces réfringentes cessent d'être sphériques, ce qui doit arriver assez fréquemment par suite des dénivellements dus à des inégalités de température et de pression. La trajectoire du rayon lumineux se détermine alors par un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\frac{dx}{ds}\right)=\frac{d\mu}{dx}, \quad \ldots,$$

où figure l'indice de réfraction $\mu=f(x, y, z)$. Ce système peut s'intégrer d'abord dans le cas ordinaire des couches sphériques $[\mu=f(x^2+y^2+z^2)]$, puis dans celui des couches planes $[\mu=f(z)]$, dont l'étude montre qu'un dénivellement produit, en général, une réfraction latérale en même temps qu'une erreur dans la réfraction verticale. On arrive à des conclusions semblables par la considération d'un système de sphères excentriques. Enfin les équations différentielles de la trajectoire peuvent encore s'intégrer pour certaines surfaces sphéroïdales dont l'étude confirme les résultats précédemment obtenus.

Pour donner à la théorie une base plus solide, il faudrait combiner des observations astronomiques avec des observations de la réfraction terrestre et des observations météorologiques échelonnées dans la direction de la trajectoire. Il faudrait tâcher de déterminer directement, sur une assez grande étendue, la pente des surfaces de niveau ou surfaces d'égale densité, ainsi que la loi de leur distribution dans le sens vertical, aux heures de la journée où s'observent les distances zénithales; on y trouverait sans doute l'explication satisfaisante des variations anormales de la réfraction. Le *Rapport annuel* du Directeur de l'Observatoire de Paris pour 1882 nous apprend qu'un ballon captif de 60^{mc}, muni d'appareils enregistreurs et destiné à l'étude de l'atmosphère à quelques centaines de mètres au-dessus de l'Observatoire, a été construit sous la direction de M. le capitaine Renard, et que les premiers essais ont donné de bons résultats quand la vitesse du vent ne dépassait pas 5^m par seconde. C'est une innovation qui nous paraît pleine d'avenir et qui mérite d'être signalée.