BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 257-276

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_257_0>

DÉTERMINATION D'UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SURFACES A LIGNES DE COURBURE PLANES DANS UN SYSTÈME ET ISOTHERMES;

PAR M. G. DARBOUX.

Dans un travail déjà ancien, inséré en 1868 aux *Nachrichten* de Gœttingue, M. Enneper a déterminé toutes les surfaces dont la courbure totale est constante et pour lesquelles les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes ou sphériques. Le résultat obtenu par cet habile géomètre est particulièrement intéressant : les surfaces déterminées par les conditions que nous venons d'énoncer ont leurs lignes de courbure planes dans un système et sphériques dans l'autre. De plus les plans des lignes de courbure du premier système passent par une même droite et, par conséquent, les sphères qui contiennent les lignes de courbure du second système ont toutes leur centre sur cette droite. Les surfaces de M. Enneper ont du reste été étudiées d'une manière détaillée par différents géomètres allemands; les équations qui les déterminent contiennent des fonctions elliptiques dont le module est absolument quelconque.

D'après une remarque faite par M. O. Bonnet, on peut déduire, de chaque surface dont la courbure *totale* est constante, deux surfaces dont la courbure *moyenne* est constante et qui sont parallèles à la première. On voit donc qu'aux surfaces à courbure totale constante découvertes par M. Enneper correspondent des surfaces à courbure moyenne constante qui auront, elles aussi, leurs lignes de courbure planes dans un système et sphériques dans l'autre. Ces dernières surfaces ont été l'objet d'une étude récente de M. Max Voretzsch (1).

Or, d'après un résultat que l'on doit encore à M. O. Bonnet, les surfaces dont la courbure moyenne est constante peuvent être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure ou, ce qui est la même chose, les lignes de courbure de chaque système constituent une famille de courbes isothermes.

(1) MAX VORETZSCH. *Untersuchung einer speciellen Fläche constanter mittlerer Krummung bei welcher die eine der beiden Schaaren der Krummungslinien von ebenen Curven gebildet ist.* Göttingen, 1883.

Il résulte donc de la recherche faite par M. Enneper qu'il existe des surfaces satisfaisant à cette double condition que leurs lignes de courbure soient planes dans un système et en outre que la surface puisse être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. J'ai été ainsi conduit à chercher toutes les surfaces, autres que les surfaces de révolution, jouissant de cette double propriété. La solution de ce problème fait l'objet du présent travail.

Le résultat que j'ai obtenu me paraît remarquable: bien que les surfaces cherchées doivent satisfaire à la fois à deux équations aux dérivées partielles, on trouve qu'elles contiennent dans leur équation deux constantes et une fonction arbitraire. On a donc, d'une part, une famille de surfaces à lignes de courbure planes dans un système, jouissant d'une propriété géométrique à laquelle les géomètres attachent quelque intérêt; et, à un autre point de vue, on ajoute aux surfaces en très petit nombre dont les lignes de courbure forment un système isotherme toute une famille de surfaces qui, par cette propriété, viennent se placer à côté des surfaces de révolution et des surfaces minima.

Malgré le degré de généralité de la solution, on peut obtenir une construction géométrique simple de toutes les surfaces qui correspondent à des formes différentes de la fonction arbitraire. D'ailleurs les calculs que l'on doit développer pour obtenir les expressions des coordonnées d'un point de la surface cherchée en fonction de deux variables indépendantes offrent une intéressante application de la belle théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce qui est due à M. Hermite. A tous ces points de vue, j'ai pensé qu'il y aurait quelque utilité à faire connaître dans ses points essentiels la méthode que j'ai suivie.

I.

Je rappellerai d'abord les formules de la théorie des surfaces dont j'aurai à faire usage.

Soit

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2 \tag{1}$$

l'expression de l'*élément linéaire* de la surface. Les six quantités p, q, r, p_1, q_1, r_1, identiques au signe près à celles qui ont été considérées par M. Codazzi et M. Bonnet, doivent satisfaire aux relations

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1; \end{cases}$$

$$(3)\quad A q_1 + C p = 0, \quad r = -\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}, \quad r_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}.$$

Désignons par a, a', a'' les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $v =$ const. ou, ce qui est la même chose, de la tangente à l'arc $A\,du$; par b, b', b'' les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $u =$ const. ou à l'arc $C\,dv$, et enfin par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à la surface. On devra avoir

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial u} = br - cq, & \dfrac{\partial a}{\partial v} = br_1 - cq_1, \\ \dfrac{\partial b}{\partial u} = cp - ar, & \dfrac{\partial b}{\partial v} = cp_1 - ar_1, \\ \dfrac{\partial c}{\partial u} = aq - bp, & \dfrac{\partial c}{\partial v} = aq_1 - bp_1, \end{cases}$$

et les équations analogues pour a', b', c'; a'', b'', c''. Les équations (5) feront connaître les neuf cosinus; puis on obtiendra les coordonnées rectangulaires X, Y, Z d'un point de la surface exprimées en u, v par les quadratures

$$(6)\quad \begin{cases} dX = A a\, du + C b\, dv, \\ dY = A a'\, du + C b'\, dv, \\ dZ = A a''\, du + C b''\, dv. \end{cases}$$

Remarquons enfin que, si l'on emploie la représentation sphérique de Gauss, c'est-à-dire si, par le centre d'une sphère de rayon 1, on mène une parallèle à la normale, prolongée jusqu'à son intersection avec la sphère, le point de la sphère correspondant au point (X, Y, Z) de la surface aura pour coordonnées c, c', c''. L'élément linéaire de la sphère sera donc déterminé par la formule

$$(7)\quad ds'^2 = \Sigma\, dc^2 = (p\,du + p_1\,dv)^2 + (q\,du + q_1\,dv)^2.$$

II.

Après avoir rappelé les formules précédentes, nous allons les appliquer au problème proposé; nous supposerons les surfaces cherchées rapportées à leurs lignes de courbure. Cela s'exprimera, comme on sait et comme il est aisé de le vérifier, par les deux équations

$$p = 0, \quad q_1 = 0. \tag{8}$$

De plus, comme les lignes de courbure doivent être isothermes, on pourra poser

$$A = C = e^h, \tag{9}$$

h désignant une nouvelle variable, substituée à la valeur commune de A et de C

La formule (7) se réduit, dans le cas qui nous occupe, à la suivante :

$$ds'^2 = p_1^2\, dv^2 + q^2\, du^2.$$

On voit que les lignes de la sphère qui correspondent aux lignes de courbure de la surface forment un système orthogonal. Pour exprimer que les lignes de courbure de l'un des systèmes, par exemple les lignes $v =$ const., sont planes, il suffira d'exprimer que les lignes qui leur correspondent sur la sphère sont des cercles, c'est-à-dire que leur courbure géodésique est constante : cela conduit à l'équation

$$q p_1 = -V \frac{\partial q}{\partial v}, \tag{10}$$

où V désigne une fonction de v.

Les équations (8), (9), (10) sont l'expression complète des conditions géométriques auxquelles doit satisfaire la surface cherchée. Si on les joint aux équations (2) et (3), on en déduira les valeurs suivantes des six quantités $p, q, \ldots$:

$$\left\{ \begin{aligned} & p = 0, && p_1 = -V' - V \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}}{\frac{\partial h}{\partial v}}; \\ & q = V \frac{\partial h}{\partial v}, && q_1 = 0, \\ & r = -\frac{\partial h}{\partial v}, && r_1 = \frac{\partial h}{\partial u}, \end{aligned} \right. \tag{11}$$

V' désignant la dérivée de V; en outre, la fonction h devra satisfaire aux deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}\right) = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}, \tag{12}$$

$$(1+V^2)\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + VV'\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = 0. \tag{13}$$

L'intégration simultanée de ces équations est donc la première recherche que nous ayons à entreprendre.

L'équation (12) est du troisième ordre, mais il est aisé de l'intégrer complètement. En effet, si nous multiplions ses deux termes par $\dfrac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}$, ils deviennent l'un et l'autre des dérivées exactes par rapport à v. Une première intégration donne ainsi

$$\left(\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}\right)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u).$$

On peut écrire cette équation comme il suit :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u)}} = \frac{\partial h}{\partial v},$$

et une nouvelle intégration par rapport à v nous donne

$$\mathrm{L}\left[\frac{\partial h}{\partial u} + \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u)}\right] = h + f(u). \tag{14}$$

Il est vrai que nous avons négligé la solution particulière fournie par l'équation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u) = 0,$$

mais il est aisé de voir, en la combinant avec l'équation (12), qu'elle ne donne aucune autre solution du problème proposé que les surfaces de révolution. Cette solution était évidente *a priori*, et nous pouvons la négliger.

L'équation (14) peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \mathrm{U}\, e^{h} + \mathrm{U}_1\, e^{-h}, \tag{15}$$

où U et U_1 sont des fonctions quelconques de u. Il serait facile, en leur donnant des formes convenables, d'achever l'intégration; mais il nous a paru préférable de conserver l'équation (15).

Si dans l'équation (13) on substitue à la variable v la variable v_1 définie par l'équation

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}}, \tag{16}$$

elle prend la forme très simple

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0. \tag{17}$$

Tout se réduit donc à l'intégration simultanée des équations (15) et (17).

En différentiant l'équation (15), on obtiendra la valeur de $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}$, que l'on pourra exprimer en fonction de h et de u. Portant cette valeur dans l'équation (17), on obtiendra

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \mathrm{U}' e^{h} + \mathrm{U}'_1\, e^{-h} + \mathrm{U}^2 e^{2h} - \mathrm{U}_1^2\, e^{-2h} = 0.$$

Multiplions par $2\frac{\partial h}{\partial v_1}$ et intégrons par rapport à v_1, nous aurons

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v_1}\right)^2 + 2\mathrm{U}' e^{h} - 2\mathrm{U}'_1\, e^{-h} + \mathrm{U}^2 e^{2h} + \mathrm{U}_1^2\, e^{-2h} + \mathrm{U}_2 = 0, \tag{18}$$

U_2 désignant une nouvelle fonction de u.

Les équations (15) et (18) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \varphi(h, u),$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v_1}\right)^2 + f(h, u) = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(h, u) &= \mathrm{U}\, e^{h} + \mathrm{U}_1\, e^{-h}, \\ f(h, u) &= 2\mathrm{U}' e^{h} - 2\mathrm{U}'_1\, e^{-h} + \mathrm{U}^2 e^{2h} + \mathrm{U}_1^2\, e^{-2h} + \mathrm{U}_2. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Nous pouvons en déduire par la différentiation deux valeurs différentes pour $\frac{\partial^2 h}{\partial u\, \partial v_1}$, et, en exprimant que ces valeurs sont égales, nous trouverons l'équation de condition

$$2f\frac{\partial\varphi}{\partial h} + \varphi\frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial u} = 0. \tag{20}$$

Je dis que cette équation doit avoir lieu identiquement. En effet, s'il n'en était pas ainsi, elle déterminerait h qui serait fonction de la seule variable u, et la surface cherchée serait une surface de révolution. Nous avons déjà écarté cette solution, qui est évidente *a priori*.

En écrivant que l'équation (20) a lieu identiquement, c'est-à-dire que les coefficients des différentes puissances de e^h sont nuls, nous obtenons les trois équations

$$\frac{U''}{U} = \frac{U_1''}{U_1} = U_2 - 2UU_1,$$
$$6UU_1' + 6U'U_1 + U_2' = 0.$$

La dernière s'intègre immédiatement et l'on est ramené au système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{U''}{U} = \frac{U_1''}{U_1} = U_2 - 2UU_1,\\ &6UU_1 + U_2 = C_1, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

où C_1 désigne une constante arbitraire. Il faudra donc d'abord déterminer les fonctions U, puis intégrer le système des équations (15) et (18) ou, ce qui est plus simple, comme nous le verrons, le système *équivalent* des équations (15) et (17).

III.

Je commence par l'intégration du système (21). On déduit de la première équation

$$U_1U' - UU_1' = C,$$

C désignant une constante.

Si l'on prend comme inconnue auxiliaire

$$UU_1 = \theta,$$

on trouve

$$U_2 = C_1 - 6\theta,$$

$$U = \sqrt{\theta}\, e^{\int \frac{C\,du}{2\sqrt{\theta}}}, \quad U_1 = \sqrt{\theta}\, e^{-\int \frac{C\,du}{2\sqrt{\theta}}},$$

$$\frac{U''}{U} = \frac{U''_1}{U_1} = C_1 - 8\theta,$$

et θ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(22) \qquad 2\theta\theta'' - \theta'^2 + C^2 = 4\theta^2(C_1 - 8\theta).$$

Différentions cette équation, nous obtiendrons

$$\theta''' = 4\theta'(C_1 - 12\theta),$$

d'où nous déduirons par l'intégration

$$\theta'' = 4C_1\theta - 24\theta^2 + C_2.$$

On déduit immédiatement de cette dernière équation que l'inconnue auxiliaire θ dépend des fonctions elliptiques et qu'elle doit être de la forme

$$A + B\,\mathrm{sn}^2 u,$$

que l'on peut aussi écrire, en introduisant une constante ω,

$$B(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \omega).$$

En exprimant que cette valeur satisfait à l'équation (22), nous obtenons

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{1}{2} k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega, \\ C_1 &= 3k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - 1 - k^2, \\ \theta &= \frac{k^2}{4}(\mathrm{sn}^2\omega - \mathrm{sn}^2 u). \end{aligned} \right.$$

Les deux premières équations feront connaître k, ω en fonction de C, C_1; la dernière donnera θ.

Quant aux deux fonctions U, U_1, elles doivent satisfaire l'une et l'autre à l'équation

$$\frac{y''}{y} = C_1 - 8\theta,$$

ou

$$\frac{y''}{y} = 2k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 1 - k^2 + 2k^2\,\mathrm{sn}^2\omega,$$

et, en outre, leur produit doit être égal à θ. On reconnaît le cas le plus simple de l'équation de Lamé, si complètement étudiée par M. Hermite, et les solutions U, U_1 sont précisément celles dont le produit est une fonction entière de $\operatorname{sn}^2 u$.

Il résulte des recherches de M. Hermite (*Comptes rendus*, t. LXXXV) que l'on aura

$$2iU = \rho \frac{H(u+\omega)H'(o)}{\Theta(\omega)\Theta(u)} e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$$2iU_1 = \frac{1}{\rho} \frac{H(u-\omega)H'(o)}{\Theta(\omega)\Theta(u)} e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

ρ étant une constante à laquelle on peut donner une valeur quelconque; car sa variation donnera une série de surfaces semblables à l'une quelconque d'entre elles. Nous prendrons $\rho = i$, et les valeurs définitives de U, U_1 seront

$$(24) \quad \begin{cases} U = \dfrac{H'(o)H(u+\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)} e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \\[2ex] U_1 = -\dfrac{H'(o)H(u-\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)} e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{cases}$$

IV.

Nous avons maintenant à intégrer le système formé par les deux équations

$$\frac{\partial h}{\partial u} = U e^h + U_1 e^{-h},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0,$$

où U, U_1 désignent les fonctions définies par les formules (24).

La première de ces équations appartient à un type que l'on sait intégrer dès que l'on en connaît une solution particulière. Il suffit, en effet, de prendre comme inconnue soit e^h, soit e^{-h}, et l'on est ramené à une équation de Riccati; par conséquent, les valeurs de e^h correspondantes à quatre solutions particulières auront entre elles un rapport anharmonique constant, et l'intégrale générale sera donnée par une formule

$$e^h = \frac{P + QC}{R + SC},$$

où C désignera la constante arbitraire par rapport à u, fonction de v_1, et où P, Q, R, S seront des fonctions déterminées de u. Toute la difficulté se réduit donc à la recherche de solutions particulières de cette équation.

Or reportons-nous à l'équation (20) qui a lieu identiquement. Elle exprime, on le reconnaîtra par un calcul facile, que les fonctions h de u, définies par l'équation

$$f(h, u) = 2\,U' e^h - 2\,U'_1\, e^{-h} + U^2 e^{2h} + U_1^2\, e^{-2h} + U_2 = 0,$$

sont précisément des solutions particulières de l'équation à intégrer. Il suffira donc de résoudre l'équation

$$(25)\qquad U^2 e^{2h} + 2\,U' e^h + U_2 - 2\,U'_1\, e^{-h} + U_1^2\, e^{-2h} = 0,$$

qui est du quatrième degré par rapport à e^h, et l'on aura quatre solutions particulières qui permettront d'écrire l'intégrale générale cherchée.

Les invariants i et j de cette équation ont pour valeurs

$$i = \frac{1}{12}(1 - k^2 + k^4),$$

$$j = -\frac{1}{432}(1 + k^2)(2k^2 - 1)(k^2 - 2).$$

La résolvante du troisième degré a ses racines rationnelles

$$\frac{1 + k^2}{12},\quad \frac{1 - 2k^2}{12},\quad \frac{k^2 - 2}{12};$$

et, par des calculs qu'il me paraît inutile de reproduire, on obtient les expressions suivantes des quatre racines cherchées :

$$(26)\qquad e^h = \frac{\Theta\left(\dfrac{u + \gamma - \omega}{2}\right)\Theta\left(\dfrac{u - \gamma - \omega}{2}\right)}{H\left(\dfrac{u + \gamma + \omega}{2}\right)H\left(\dfrac{u - \gamma + \omega}{2}\right)}\, e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

où l'on donne à γ successivement les quatre valeurs

$$0,\quad 2K,\quad 2iK',\quad 2K + 2iK'.$$

D'ailleurs, comme on peut donner à l'expression de e^h la forme

$$(27)\qquad e^h = \frac{\Theta^2\left(\dfrac{u - \omega}{2}\right)}{\Theta^2\left(\dfrac{u + \omega}{2}\right)}\;\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{sn}^2\dfrac{u - \omega}{2}}{k \operatorname{sn}^2\dfrac{u + \omega}{2} - k\operatorname{sn}^2\dfrac{\gamma}{2}}\, e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

qui est linéaire par rapport à la constante $k\,\mathrm{sn}^2\frac{\gamma}{2}$, on voit que l'intégrale générale cherchée sera donnée par l'une quelconque des formes équivalentes (26) ou (27), où γ sera la constante arbitraire.

Mais γ qui ne dépend pas de u est ici une fonction de v_1 qui reste à déterminer par la condition que h satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2}=0.$$

Exprimons que cette équation est vérifiée pour toutes les valeurs de u, nous aurons les équations

$$\gamma'^2+1=0,\quad \gamma''^2=0,$$

qui donnent

$$\gamma=\pm i v_1,$$

en négligeant une constante additive qu'on peut supposer réunie à v_1. En résumé, on trouve, pour la valeur définitive de h, la formule

$$(28)\qquad e^h=\frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1-\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

et l'on connaît complètement l'élément linéaire de la surface cherchée aussi bien que les six quantités p, q, r, p_1, q_1, r_1.

En éliminant v_1 entre l'équation (28) et sa dérivée, j'ai vérifié qu'on retrouve bien l'équation (15) qu'il s'agissait d'intégrer.

V.

Il reste maintenant à indiquer comment on trouvera les neuf cosinus $a, a', a'', \ldots$ et les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface. Mais auparavant je définirai une nouvelle fonction qui jouera un rôle essentiel de cette recherche.

Considérons la fonction

$$\frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)}e^{\frac{u+iv_1}{2}\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

de l'argument complexe $u+iv_1$. Il résulte de la formule (28) que e^h est le module de cette fonction. On pourra donc poser

$$(29) \qquad e^{h+i\sigma} = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{\frac{u+iv_1}{2}\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

et l'on obtiendra pour σ l'expression

$$(30) \qquad e^{i\sigma} = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1-\omega}{2}\right)} e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

D'ailleurs, comme $h+i\sigma$ est une fonction de la variable complexe $u+iv_1$, on aura les équations bien connues

$$(31) \qquad \frac{\partial h}{\partial v_1} = -\frac{\partial\sigma}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial\sigma}{\partial v_1},$$

qui nous seront utiles.

La fonction $i\sigma$ ne diffère de h que par les notations. Elle satisfait par conséquent à une équation tout à fait semblable à l'équation (15)

$$(32) \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v_1} = \mathrm{M}e^{i\sigma} + \mathrm{N}e^{-i\sigma},$$

où M et N ont pour valeurs

$$(33) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \frac{\mathrm{H}'(0)\Theta(\omega+iv_1)}{2\Theta(\omega)\mathrm{H}(iv_1)} e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \\ \mathrm{N} &= -\frac{\mathrm{H}'(0)\Theta(\omega-iv_1)}{2\Theta(\omega)\mathrm{H}(iv_1)} e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{aligned}\right.$$

Nous verrons plus loin comment la Géométrie fait prévoir l'existence de cette équation. La valeur de σ, contenant d'ailleurs l'arbitraire u qui ne figure pas dans la formule (32), donne par conséquent l'intégrale générale de cette équation différentielle.

VI.

Quand on connaît l'élément linéaire d'une surface et les six quantités qui figurent dans les formules de Codazzi, il reste à déterminer les neuf cosinus et les coordonnées rectangulaires X, Y, Z.

On est conduit, comme l'a démontré M. Bonnet, à une seule surface; mais la détermination de cette surface dépend en général, comme il serait aisé de le prouver, de l'intégration d'une équation de Riccati. On a de nombreux exemples dans lesquels on se trouve arrêté et où l'intégration à effectuer paraît réellement impossible.

Dans le cas actuel, j'ai pu terminer les calculs et obtenir les neuf cosinus et les coordonnées rectangulaires de la manière suivante :

Considérons un point de la surface et la tangente à la ligne de courbure plane $v = \text{const.}$ qui passe en ce point. Les cosinus directeurs de cette tangente sont, d'après les notations du § I, a, a', a''.

Si, par le centre d'une sphère de rayon 1, nous menons une parallèle à cette tangente, elle coupera la sphère en un point dont les coordonnées seront a, a', a''; nous aurons ainsi un mode de représentation sphérique de la surface distinct de celui de Gauss et qui va nous être très utile.

L'élément linéaire de la sphère sera donné par la formule

$$dS^2 = da^2 + da'^2 + da''^2$$

ou, en employant les formules (5) et (11),

$$dS^2 = V^2 \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\, du - \frac{\partial h}{\partial u}\, dv\right)^2.$$

Introduisons, en tenant compte de la formule (16), dv_1 à la place de dv et servons-nous des formules (31) pour substituer les dérivées de σ à celles de h. Nous obtiendrons ainsi l'expression très simple

$$dS^2 = d\sigma^2 + V^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}\right)^2 dv_1^2. \tag{34}$$

Cette formule montre que les lignes $v_1 = \text{const.}$ de la sphère, qui correspondent aux lignes de courbure planes de la surface, sont des lignes géodésiques, c'est-à-dire des grands cercles. Ces lignes admettent pour trajectoires orthogonales les courbes $\sigma = \text{const.}$, ce qui donne la signification géométrique de la fonction σ.

Le résultat précédent pouvait être prévu géométriquement; car, si un point se déplace sur la surface en décrivant une ligne de courbure plane, le point correspondant de la sphère, dans le mode de représentation que nous avons adopté, décrira évidemment le grand cercle dont le plan est parallèle au plan de la ligne de courbure; c'est en raison de cette propriété que nous nous sommes proposé de déterminer en premier lieu les cosinus a, a', a''.

Lorsque l'élément linéaire de la sphère prend la forme (34), on sait que le coefficientde dv_1^2 doit être de la forme

$$[\varphi(v_1)e^{i\sigma} + \psi(v_1)e^{-i\sigma}]^2;$$

cette remarque se vérifie bien ici en vertu de l'équation (32), que nous avons signalée d'avance à l'article précédent.

Revenons à la formule (34). Nous savons que σ, v_1 sont les coordonnées curvilignes d'un point de la sphère; σ désigne la distance de ce point à une courbe fixe (Γ) de cette sphère, distance comptée sur le grand cercle normal à (Γ), passant par le point. Quant à v_1, c'est une fonction de l'arc de la courbe (Γ), compté à partir d'une origine fixe jusqu'au pied du grand cercle normal. Appelons x, y, z les coordonnées d'un point de (Γ) que nous considérerons comme des fonctions de l'arc de courbe compté à partir de l'origine choisie. Désignons cet arc par s et appelons $x', x'', \ldots$ les dérivées de $x, \ldots$ par rapport à s. Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad xx' + \ldots = 0, \\ &x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad x'x'' + \ldots = 0. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Posons, pour abréger,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \tag{36}$$

nous aurons les formules

$$\left\{\begin{aligned} yz'' - zy'' &= -\Delta x', \\ zx'' - xz'' &= -\Delta y', \\ xy'' - yx'' &= -\Delta z', \end{aligned}\right. \tag{37}$$

dont la démonstration est immédiate.

Exprimons maintenant que le point (a, a', a'') de la sphère est situé à une distance σ sur l'arc de grand cercle, qui est normal à la courbe (Γ) au point (x, y, z). Nous obtiendrons, par des méthodes tout élémentaires, les formules

$$(38)\quad \begin{cases} 2a = [x - i(yz' - zy')]e^{i\sigma} + [x + i(yz' - zy')]e^{-i\sigma}, \\ 2a' = [y - i(zx' - xz')]e^{i\sigma} + [y - i(zx' - xz')]e^{-i\sigma}, \\ 2a'' = [z - i(xy' - yx')]e^{i\sigma} + [z + i(xy' - yx')]e^{-i\sigma}. \end{cases}$$

Il nous reste à exprimer qu'en prenant pour s une fonction convenable de v_1, ces formules conduisent à l'expression (34) de l'élément linéaire.

Différentions la première, en tenant compte des relations (37). Nous trouvons

$$\begin{aligned} 2da &= x'\,ds[(1 + i\Delta)e^{i\sigma} + (1 - i\Delta)e^{-i\sigma}] \\ &\quad + i\,d\sigma\{[x - i(yz' - zy')]e^{i\sigma} - [x + i(yz' - zy')]e^{-i\sigma}\}. \end{aligned}$$

On déduit de là, en élevant au carré et ajoutant les équations analogues,

$$dS^2 = d\sigma^2 + \left(\frac{1 + i\Delta}{2}\frac{ds}{dv_1}e^{i\sigma} + \frac{1 - i\Delta}{2}\frac{ds}{dv_1}e^{-i\sigma}\right)^2 dv_1^2,$$

Si l'on compare à l'expression fournie par la formule (34) où l'on a remplacé $\frac{\partial\sigma}{\partial v_1}$ par sa valeur

$$dS^2 = d\sigma^2 + (\mathrm{VM}\,e^{i\sigma} + \mathrm{VN}\,e^{-i\sigma})^2 dv_1^2,$$

on voit que l'on doit avoir

$$(39)\quad \begin{cases} (1 + i\Delta)ds = 2\mathrm{VM}\,dv_1, \\ (1 - i\Delta)ds = 2\mathrm{VN}\,dv_1. \end{cases}$$

Ces équations peuvent servir à un double usage.

Si l'on a choisi arbitrairement V en fonction de v, elles nous font connaître s et Δ en fonction de v et, par conséquent, Δ en fonction de s. Cette relation entre Δ et s détermine non la situation, mais la forme de la courbe (Γ). Au contraire, si l'on a pris (Γ) arbitrairement ainsi que k et ω, elles nous font connaître V et v_1 en fonction de s et, par suite, V, v_1 en fonction de v. On voit donc que l'on peut choisir arbitrairement la courbe (Γ). En d'autres termes, *parmi les surfaces que nous étudions, il y en aura toujours pour lesquelles les plans des lignes de courbure du premier système seront parallèles aux plans tangents d'un cône quelconque.*

La détermination de a étant faite, on aura b par l'une des formules (5) qui donne

$$\frac{\partial a}{\partial v} = br = b\,\frac{\partial h}{\partial u} = b\,\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}$$

et, par conséquent, la différentielle de la coordonnée rectangulaire X d'un point de la surface sera

$$dX = e^h\left(a\,du + \frac{\frac{\partial a}{\partial v}\,dv}{\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}}\right) = e^h\left(a\,du + \frac{\frac{\partial a}{\partial v_1}\,dv_1}{\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}}\right).$$

En remplaçant a par sa valeur, on trouve

$$(40)\qquad \begin{aligned} dX = e^h V x'\,dv_1 &+ [x - i(yz' - zy')]\,e^{h+i\sigma}\,d\left(\frac{u+iv_1}{2}\right) \\ &+ [x + i(yz' - zy')]\,e^{h-i\sigma}\,d\left(\frac{u-iv_1}{2}\right). \end{aligned}$$

Voici comment on peut effectuer cette quadrature. e^h, considérée comme une fonction de $\frac{u}{2}$, est doublement périodique de seconde espèce et a les mêmes multiplicateurs que la fonction

$$e^{2r\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\frac{H(x - 2\omega)}{H(x)}.$$

Si l'on applique la formule donnée par M. Hermite pour la décomposition en éléments simples, on trouvera

$$(41)\qquad \left\{ \begin{aligned} e^h = {} & \frac{2M\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)}\,\frac{H\left(\frac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)}\,e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} \\ & + \frac{2N\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)}\,\frac{H\left(\frac{u-iv_1+3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}\,e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \end{aligned} \right.$$

M et N ayant les valeurs définies par les formules (33).

Si l'on porte cette expression de e^h dans le premier terme seul de la formule (40), puis que l'on remplace

$$\begin{aligned} &2VMx'\,dv_1 \quad \text{par} \quad x'(1 + i\Delta)\,ds = d[x - i(yz' - zy')] \\ &2VNx'\,dv_1 \quad \text{par} \quad x'(1 - i\Delta)\,ds = d[x + i(yz' - zy')], \end{aligned}$$

on obtient

$$dX = \frac{\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)} \frac{H\left(\frac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} d[x-i(yz'-zy')]$$

$$+[x-i(yz'-zy')] \frac{\Theta^2\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{H^2\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} d\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)+\ldots,$$

les termes non écrits se déduisant des précédents par le changement de i en $-i$.

Dans la seconde ligne de la formule précédente figure une fonction que l'on déduit de la suivante :

$$F(x) = \frac{\Theta^2\left(x-\frac{\omega}{2}\right)}{H^2\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

en y remplaçant x par $\frac{u+iv_1}{2}$. Ici encore $F(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce, et une nouvelle application de la méthode de décomposition de M. Hermite nous donne

$$\frac{\Theta^2\left(x-\frac{\omega}{2}\right)}{H^2\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} = \frac{\Theta^2(\omega)}{H'(0)H(2\omega)} \frac{d}{dx}\left[\frac{H\left(x-\frac{3\omega}{2}\right)}{H\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\right].$$

En faisant usage de cette formule, nous voyons que les deux premiers termes de dX deviennent la différentielle exacte d'un produit, et l'intégrale nous donne

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} X = {} & \frac{\Theta^2(\omega)[x-i(yz'-zy')]}{H(2\omega)H'(0)} \frac{H\left(\frac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} \\ & + \frac{\Theta^2(\omega)[x+i(yz'-zy')]}{H(2\omega)H'(0)} \frac{H\left(\frac{u-iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{aligned}\right.$$

On aurait pour Y et Z des expressions analogues. La question est donc complètement résolue.

VII.

Il nous reste maintenant à donner l'interprétation des formules et la construction géométrique de la surface. En multipliant l'équation (42) par x' et ajoutant les équations analogues, on a

$$x'\mathrm{X} + y'\mathrm{Y} + z'\mathrm{Z} = 0.$$

Les coefficients ne dépendant que de v, cette équation représente les plans des lignes de courbure du premier système. Elle ne contient pas de terme constant, par suite *les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cône.* C'est là une première propriété de la surface. Étudions maintenant les lignes de courbure planes.

Leurs plans sont normaux à la courbe sphérique que nous avons désignée par (Γ). Rapportons la ligne de courbure à deux axes rectangulaires choisis dans son plan, l'un Oy_1 allant au point où le plan coupe la courbe (Γ) et ayant pour cosinus directeurs x, y, z; l'autre Ox_1 perpendiculaire au premier et ayant pour cosinus directeurs

$$yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx'.$$

Appelons x_1 et y_1 les coordonnées relatives à ces axes. On trouvera aisément

$$(43) \qquad x_1 + iy_1 = \frac{\Theta^2(\omega)}{2\mathrm{H}(2\omega)\mathrm{H}'(0)} \, \frac{\mathrm{H}\left(\dfrac{u + iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\dfrac{u + iv_1 + \omega}{2}\right)} \, e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

Les deux équations obtenues en séparant les parties réelles et les parties imaginaires donneront x_1, y_1. On voit donc que *la forme des lignes de courbure planes sera la même pour toutes les surfaces qui correspondent à un même système de valeurs de k et de ω et sera, au contraire, complètement indépendante de la forme de la fonction arbitraire qui entre dans les formules.* C'est la deuxième propriété géométrique assurément très remarquable de la surface.

En troisième lieu, cherchons l'arête du contact des plans des lignes de courbure avec le cône que ces plans enveloppent. Cette arête de contact sera définie par l'équation

$$x''X + y''Y + z''Z = 0,$$

à laquelle on donnera facilement la forme

$$(1 + i\Delta)(x_1 + iy_1) + (1 - i\Delta)(x_1 - iy_1) = 0. \tag{44}$$

Si l'on tient compte des formules (39), cette équation devient

$$M(x_1 + iy_1) + N(x_1 - iy_1) = 0$$

ou, en remplaçant M et N par leurs valeurs,

$$e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\Theta(\omega + iv_1)(x + iy_1) = e^{iv\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\Theta(\omega - iv_1)(x_1 - iy_1). \tag{45}$$

Remarquons, d'ailleurs, que le point situé à la distance 1 sur l'arc Oy_1 décrit la courbe (Γ) normale au plan de la ligne de courbure et, par conséquent, ce plan roule sur le cône qu'il enveloppe. L'équation précédente nous montre que *la droite de contact du plan de la ligne de courbure avec le cône enveloppe ne dépend que des constantes* k, ω *et nullement de la forme de la fonction arbitraire.* C'est la troisième propriété géométrique de la surface.

En réunissant tous ces résultats, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Considérons les coordonnées rectangulaires x_1, y_1 *comme des fonctions des variables* u, v_1 *définies par la double équation*

$$x_1 \pm iy_1 = \frac{\Theta^2(\omega)}{2H(2\omega)H'(0)}\,\frac{H\left(\dfrac{u \pm iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{H\left(\dfrac{u \pm iv_1 + \omega}{2}\right)}\,e^{(u \pm iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

L'équation

$$v_1 = \text{const.}$$

définira une famille de courbes planes isothermes. Faisons correspondre à chaque courbe (v_1) *la droite définie par l'équation*

$$e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\Theta(\omega + iv_1)(x_1 + iy_1) = e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\Theta(\omega - iv_1)(x_1 - iy_1).$$

Faisons rouler le plan qui contient les courbes sur un cône quelconque ayant pour sommet l'origine des coordonnées. Alors la courbe (v_1), *qui dans chaque position du plan correspond à la génératrice de contact du plan et du cône, engendre précisément la surface cherchée.*

Il serait aisé d'établir, à l'aide de quelques considérations géométriques, une partie des résultats précédents et de montrer, en particulier, pourquoi la solution obtenue contient une fonction arbitraire. Je me contenterai de remarquer ici que, dans tout ce qui précède, j'ai seulement étudié le cas le plus général; les calculs se trouveraient en défaut si l'on envisageait ce cas particulier de l'équation de Lamé pour lequel les deux solutions U, U_1 se réduisent à une seule. Alors les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cylindre, et l'on obtient une classe de surfaces qui contient en particulier celles que l'on peut déduire par une dilatation des surfaces à courbure constante de M. Enneper.