Extrait d'une lettre de M. Selivanof à M. Hermite

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 246-247
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_246_1>

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. SELIVANOF A M. HERMITE.

Pour résoudre l'équation du quatrième degré (¹), Ferrari ramène son premier membre à la différence de deux carrés, d'où la résolution de l'équation proposée est immédiate. La manière la plus simple d'y parvenir me semble la suivante :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

nous introduisons pour l'homogénéité y,

$$f(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6ex^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Cette forme biquadratique se transforme en une forme quadratique, en posant

$$x^2 = z_1, \quad 2xy = z_2, \quad y^2 = z_3$$

et l'on trouve

$$F(z_1, z_2, z_3) = az_1^2 + 2bz_1z_2 + (6c + 4u)z_1z_3 - uz_2^2 + 2dz_2z_3 + ez_3^2,$$

(¹) Voir aussi à ce sujet le Mémoire de M. Darboux *Sur l'équation du quatrième degré*, dans le *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. XVIII, p. 220.

ou, en remplaçant $4cz_1z_3$ par cz_2^2,

$$F(z_1, z_2, z_3) + az_1^2 = 2bz_1z_2 + 2(c+2u)z_1z_3 + (c-u)z_2^2 + 2dz_2z_3 + ez_3^2.$$

D'après la méthode de Ferrari, cette forme se transforme en

$$A(z_1 + mz_2 + mz_3)^2 + B(z_2 + pz_3)^2 + Cz_3^2.$$

Pour avoir la somme de deux carrés, il faut déterminer u de manière que

$$ABC = 0.$$

Quelle que soit la valeur de u, la forme $F(z_1, z_2, z_3)$ se transforme en $f(x,y)$ en passant de z_1, z_2, z_3 à x et y. La forme $F(z_1, z_2, z_3)$, contenant la quantité arbitraire u, est identique avec la forme $f(x,y)$.

Le produit ABC est égal au déterminant de la forme quadratique $F(z_1, z_2, z_3)$. Nous avons donc l'équation résolvante de Ferrari sous cette forme élégante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2u \\ b & c-u & d \\ c+2u & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Ce résultat est dû à M. Aronhold. Il est publié dans le t. 52 du *Journal de Crelle*, p. 95, mais la voie par laquelle on y parvient n'y est pas indiquée.

Quelques indications de M. Kronecker m'ont donné le moyen d'éclaircir cette voie.