Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 225-236

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_225_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOSSFELD (C.). — CONSTRUCTION DES KEGELSCHNITTS AUS FÜNF ZUM TEIL IMAGINÄREN CURVENELEMENTEN. *Inaugural-Dissertation*, 27 p. in-4°. Iena, 1882.

L'auteur résout, par des considérations appartenant à la Géométrie synthétique et en se plaçant au point de vue de von Staudt, les problèmes relatifs à la construction d'une conique connaissant cinq éléments; ces éléments sont ou des points ou des tangentes; deux éléments de même nature peuvent d'ailleurs être imaginaires conjugués; l'auteur suppose alors ces éléments donnés, s'il s'agit de points, par une suite de points en involution à points doubles imaginaires, et, s'il s'agit de tangentes, par un faisceau de droites en involution à rayons doubles imaginaires.

LÉON RODET. — LES PRÉTENDUS PROBLÈMES D'ALGÈBRE, OU MANUEL DU CALCULATEUR ÉGYPTIEN. Paris, in-8°, 122 p.; 1882.

Ce travail a été suggéré à l'auteur par les *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik* de M. Cantor. Résumons donc, d'après ce Livre, l'état de la Science égyptienne autant qu'elle est connue aujourd'hui.

Le manuel d'Aahmes est l'unique document mathématique que nous possédons de cette époque; il est connu sous le nom de *Papyrus Rhind* (c'est le nom du premier éditeur) ou de *Papyrus Eisenlohr* (c'est le nom du traducteur). D'après M. Cantor, ce serait un Ouvrage essentiellement pratique, composé pour les marchands, sous le règne de Ra-a-us, l'Apophis des Grecs, appartenant à la dynastie des Hi-Ksos, c'est-à-dire entre 2000 et 1700 avant J.-C. On y verrait une arithmétique des fractions assez singulière. Les Égyptiens calculeraient seulement avec les fractions de l'unité (il faut excepter $\frac{2}{3}$). Étant incapables d'en écrire d'autres, ils seraient forcés de réduire toutes les fractions à numérateurs quelconques en sommes de fractions d'unité, et c'est pour faciliter cette opération, évidemment la plus importante de leur arithmétique des fractions, que l'on avait dressé le tableau par lequel commence le papyrus. Mais, malgré de si grandes difficultés, les Égyptiens auraient su exécuter avec leurs fractions un grand nombre d'opérations; ils les ajoutaient, par exemple, en les réduisant à un dénominateur commun. Ils auraient de même connu les équations du premier degré, et l'on trouverait quelques questions impliquant la connaissance des progressions arithmétique et géométrique. Les calculs simples auraient été faits à l'aide des doigts; pour les cas compliqués, à l'aide d'un instrument quelconque. En Géométrie et en Stéréométrie, ils auraient cherché à transformer le cercle en carré; leur quadrature conduit à la valeur $\pi = 3,1604$. Ils auraient connu aussi la mesure du rectangle; quant au triangle, ils calculaient son aire d'après la formule $\Delta = a\frac{b}{2}$, formule qui, dans certains cas, ne présente pas un très grand écart de $\Delta = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Ils auraient enfin appliqué la théorie des proportions à la section de la pyramide droite : ce seraient les premières traces de la Trigonométrie.

Tel est, en résumé, le contenu du papyrus Aahmes, d'après M. Cantor. Les études que nous allons analyser ne s'attachent qu'à la partie arithmétique et particulièrement aux problèmes qui, d'après MM. Cantor et Eisenlohr, sont déjà de l'Algèbre.

L'idée maîtresse qui a guidé M. Rodet dans ses recherches est celle de la persistance des procédés mathématiques. Il retrouve les traces de la manière du scribe égyptien dans les manuels grecs, arabes, hindous, persans, hébreux, jusque dans Léonard de Pise, et ces écrits, en général plus explicites, lui servent à élucider les points obscurs du livre de Aahmes.

C'est sur les problèmes Seghom (M. Cantor écrit Seqem) que les investigations de M. Rodet se portent en premier lieu. Dans ces problèmes, le scribe égyptien se servait, d'après les savants allemands cités, de l'opération que nous nommons aujourd'hui *réduction au même dénominateur*. Or, d'après M. Rodet, il n'en est rien. Tout comme Mahmoud, de Hérat, et Aben Ezra, dont l'auteur cite de nombreux exemples, Aahmes a d'abord cherché un nombre assez grand pour qu'il pût en tirer ses fractions comme nombres entiers ou à peu près entiers ; ce nombre (*môré* en hébreu et *mokhraj* en arabe), l'auteur le nomme *bloc extractif*. Le nombre trouvé, on substituait aux fractions des nombres entiers et l'on procédait en sommant ces derniers. La somme obtenue ainsi était divisée par le bloc extractif et donnait le résultat vrai. Pour faire mieux ressortir la différence qui existe entre ce procédé et celui que nous employons maintenant, l'auteur cite Bhaskâra, contemporain de Aben Ezra, dont les procédés élégants se rapprochent beaucoup des nôtres. Mais son argument principal consiste en ce que les nombres substitués aux fractions n'étaient souvent qu'à peu près entiers, tandis que des fractions avec un numérateur fractionnaire étaient parfaitement inconnues dans l'antiquité.

Il n'y a pas moins de divergence entre MM. Cantor et Rodet quant à la nature même de ces problèmes. Le n° 23 essayait, d'après M. Cantor, de compléter par addition les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{45}$ à $\frac{2}{3}$; Aahmes aurait fait l'addition des fractions données, aurait retranché leur somme $\left(\frac{23\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}}{45}\right)$ du chiffre indiqué $(\frac{2}{3})$ et décomposé le reste $\left(\frac{6\frac{1}{8}}{45}\right)$ en deux fractions $(\frac{1}{9}, \frac{1}{40})$. D'après M. Rodet, au contraire, Aahmes a choisi un bloc extractif (45), substitué aux fractions des nombres entiers $(11\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2}\frac{1}{8}, 4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 1)$, pris leur somme $(23\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8})$ et, pour produire le « manquant » $(6\frac{1}{8})$, fait croître le bloc extractif jusqu'à ce qu'il eût obtenu le chiffre demandé, ce qui lui a donné également pour résultat $\frac{1}{9}\frac{1}{40}$. Le doute est possible dans ce problème, parce que le calcul y est fort peu explicite, par suite d'un manque de place, d'après M. Rodet; mais il nous montre, par l'analyse des problèmes n^{os} 21 et 22, que ces procédés étaient bien ceux du scribe égyptien.

Viennent ensuite les douze premiers calculs du même Chapitre qui, d'après M. Cantor, enseigneraient la complétation par multiplication. Ils servent, nous dit au contraire M. Rodet, à démontrer empiriquement le lemme : « Lorsqu'on fait subir une même opération à diverses quantités, les résultats obtenus varient dans le même rapport que les quantités d'où l'on part. » On fait subir aux quantités multiples ou sous-multiples l'une de l'autre deux opérations : l'une consiste à y ajouter sa moitié et son quart, tandis que dans l'autre on y ajoute ses deux tiers et puis son tiers; au moins c'est ainsi que cette dernière opération se présente sur le papyrus; mais M. Rodet présume que son sens primitif consistait à ajouter les deux tiers et à retrancher le tiers, ce qui a été changé par le copiste.

Nous abordons enfin ces problèmes *Hau* ou de la quantité, auxquels les précédents servent simplement d'introduction. C'est ici que M. Cantor a cru trouver des procédés algébriques : les calculs sont, d'après lui, des équations du premier degré à une inconnue, exécutées à peu près comme nous le faisons aujourd'hui, c'est-à-dire qu'on sommait les coefficients de l'inconnue pour ramener l'équation à la forme $\frac{a}{b}x = e$, et l'on divisait par cette somme des coefficients le nombre connu (l'inconnue se trouvant naturellement dégagée dans tous ces problèmes). Ces procédés algébriques, M. Rodet les a vainement cherchés dans les calculs en question; il n'a trouvé que l'application du procédé purement arithmétique de la « fausse position ». On substituait, d'après lui, à l'inconnue un nombre quelconque (en choisissant habilement le mokhraj pour en pouvoir tirer les fractions comme nombres entiers), on faisait subir à ce résultat faux toutes les opérations demandées et le nombre sortant servait à corriger le faux résultat; d'après le lemme démontré, il y avait entre lui et le nombre connu du problème la même relation qu'entre le faux et le vrai résultat. De cette manière, le principe de la proportionnalité se trouvait seul invoqué et, comme le dit M. Rodet, cette sorte de formule, avant que les algébristes de nos jours aient eu l'idée de l'écrire $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, au lieu de $a : b :: c : x$, avait toujours passé pour tout autre chose qu'une équation.

Cette manière d'envisager les procédés que nous venons d'expliquer, M. Rodet l'appuie par des citations des mathématiciens de tous les peuples; l'auteur du *Lilâvâti*, que nous avons vu plus haut s'approcher tant des procédés modernes, fait ses calculs de cette manière.

Aahmes a cependant encore une autre manière de procéder, légèrement différente : c'est celle où la fausse position n'est plus le mokhraj, mais l'unité. Alors la correction qui ressort au cours du calcul, n'ayant à multiplier que l'unité, constitue elle-même le résultat, et ce sont surtout ces procédés qui donnent aux problèmes l'apparence de solutions algébriques.

Le travail de M. Rodet ne se borne pas à des questions purement mathématiques. C'est ainsi qu'il attribue le sens « Chapitre » au mot que M. Eisenlohr a traduit par « précepte » (*Vorschrift*); quant au mot *seghom* ou *seqem*, il ne peut pas, d'après M. Rodet, avoir le sens « d'une addition de fractions qu'on ramène au dénominateur commun »; mais, à cet endroit, ainsi que M. Eisenlohr l'a indiqué ailleurs, il signifie « complément » (*Ergänzung*); de même, M. Rodet rétablit pour le mot *nâh* la signification « croître », au lieu de « multiplier » (*vervielfältigen*).

L'Appendice contient une heureuse découverte. Il y a, dans le papyrus Rhind, un petit tableau des puissances du nombre 7 et, vis-à-vis de chacune d'elles, est un mot qu'on croyait être le nombre de cette puissance; ces noms étaient fort étranges (l'écrit, le chat, la souris, l'orge, le boisseau). Or l'auteur nous montre, grâce à un passage de Léonard de Pise, que ces noms provenaient probablement d'un problème dont les nombres indiqués constituaient la solution. Cette découverte est intéressante, surtout au point de vue de M. Rodet : elle semble établir un vrai lien entre Aahmes et le grand mathématicien du moyen âge.

Le travail de M. Rodet a été vivement critiqué par MM. Revillout, dans une Revue consacrée spécialement à l'égyptologie. Les critiques se sont placés à un point de vue entièrement différent de celui de M. Rodet; d'après eux, aucune analogie n'existe entre les sciences mathématiques de l'ancienne Égypte et les procédés de Léonard de Pise. Pour M. Rodet, les savants allemands attribuent aux Égyptiens des procédés trop modernes; les nouveaux critiques supposent, au contraire, l'état de la Science chez les Égyptiens encore bien plus avancé. D'après eux, les procédés, bien plus élégants en réalité, ont été artificiellement alourdis pour être appropriés à l'entendement du mauvais écolier auquel avait servi ce cahier.

Car c'est bien d'un cahier d'écolier qu'il s'agit d'après MM. Revillout, et non, comme l'avaient supposé MM. Cantor, Eisenlohr et Rodet, d'un livre d'enseignement. Quant à cette circonstance, que le manuscrit a été copié par un scribe (honneur dont les épreuves d'écolier ne jouissent pas toujours), MM. Revillout supposent que l'original avait été retrouvé parmi d'autres écrits par un littérateur qui n'y entendait pas beaucoup, et copié pour un cultivateur qui y entendait encore moins. Ce dernier a été évidemment trompé; les vrais mathématiciens de l'Égypte avaient ri de lui et peut-être le malhonnête scribe aurait-il même été puni pour sa fourberie. Ce qui prouve la réalité de cette supposition, d'après MM. Revillout, ce sont les calculs faux, exécutés par l'élève, qui suivent en général dans le papyrus un calcul juste, donné pour modèle par le maître. Ces erreurs, notées en marge par le maître, ont amené ainsi une répétition des mêmes procédés, jusqu'à ce que l'élève eût compris le calcul. Souvent aussi le maître fournissait, pour ainsi dire en passant, à l'élève des solutions qu'il avait dû chercher préalablement par un procédé bien plus compliqué.

C'est surtout ce dernier point qui pourra nous servir à préciser les vues des critiques de la *Revue égyptologique*.

Dans le n° 40, par exemple, on demande de diviser le nombre 100, en telle sorte, que les cinq parties soient en progression décroissante par différences et que les deux dernières réunies égalent le septième des trois premières. Ce problème est résolu par la substitution d'une fausse position ($5\frac{1}{2}$). Or, d'après MM. Revillout, le maître, avant de fournir ce nombre, aurait exécuté un calcul qui pourrait se traduire ainsi dans le langage moderne :

$$a + a + d = \tfrac{1}{7}(a + 2d + a + 3d + a + 4d),$$
$$14a + 7d = 3a + 9d,\quad 11a + 7d = 9d,\quad 11a = 2d:$$

donc $5\frac{1}{2}\,a = d$, et c'est ce nombre qu'il a dicté à l'élève.

On conçoit que dès lors les résultats auxquels arrivent MM. Revillout doivent être tout à fait différents de ceux que nous avons vus développés par M. Rodet; presque partout les critiques de la *Revue égyptologique* recourent aux hypothèses de MM. Cantor et Eisenlohr.

Ainsi la manière dont les savants allemands ont envisagé l'addition des fractions leur paraît parfaitement justifiée; c'est bien par réduction au dénominateur commun que l'Égyptien procédait. S'il n'écrivait pas le dénominateur, c'est qu'il ne lui était guère possible d'écrire des fractions avec un numérateur autre que l'unité ; mais, dans sa pensée, ces nombres soi-disant entiers qu'il substituait étaient bien de vraies fractions.

Les critiques passent rapidement le chapitre de *Seqem*. L'hypothèse d'un lemme, étant en désaccord avec le titre, leur paraît avoir très peu de chance d'être admise.

Quant au Chapitre de *Hau*, auquel le travail de M. Rodet doit son nom, c'est là un point que ses critiques ont examiné avec le plus de soin et, ici encore, ils sont arrivés à des conclusions diamétralement opposées à celles de M. Rodet.

Il y a bien, dans tout cela encore, une différence de principes. Pour M. Rodet, la « fausse position », comme procédé purement arithmétique, est, pour ainsi dire, plus naturelle, plus conforme à la manière de penser des nations moins civilisées ; donc il incline à la supposer antérieure à l'Algèbre, et c'est aussi notre sentiment. Pour MM. Revillout, au contraire, la fausse position est une forme de la décadence ; elle s'est développée au moyen âge des procédés algébriques, et elle a même partout été précédée par ces derniers. Donc, si nous trouvions dans Aahmes la fausse position, nous serions forcés de supposer une Algèbre encore antérieure. Mais, en vérité, le procédé de l'Égyptien ne ressemblerait que fort superficiellement à la fausse position ; il serait, au contraire, tout à fait conforme à l'Algèbre et surtout presque identique à celui de Diophante. D'ailleurs cette ressemblance des calculs, tant d'Aahmes que de Diophante, à celui de la fausse position ne serait point fortuite, puisque c'est justement des procédés du mathématicien d'Alexandrie que la fausse position se serait développée.

Les hypothèses linguistiques de M. Rodet ne trouvent pas non plus l'approbation de ses critiques qui, ici encore, préfèrent les traductions données par MM. Eisenlohr et Cantor.

Nous avons désiré mettre sous les yeux du lecteur le pour et le contre, notre incompétence en égyptologie ne nous permettant pas de prendre parti. Toutefois, ces recherches ont porté déjà des fruits : le travail de M. Cantor a inspiré à M. Sylvester (*American Journal of Mathematics*, vol. III, nº 4, p. 332, déc. 1880) un important développement qu'on ne nous saura pas mauvais gré, croyons-nous, de produire en français :

« L'inversion d'un nombre entier s'appellera une *fraction* *simple;* toute autre fraction, rationnelle ou irrationnelle, peut être appelée *complexe;* mais il doit être bien entendu qu'il ne sera question, dans ce qui suit, que de fractions proprement dites de l'une ou l'autre sorte, à savoir, de fractions plus grandes que o et moindres que 1.

» Supposons que Q représente une fraction quelconque; si Q est compris entre $\frac{1}{u_0 - 1}$ et $\frac{1}{u_0}$, nous pouvons poser $Q = \frac{1}{u_0 + \delta_0} + Q'$, expression dans laquelle δ_0 est ou o ou un nombre entier positif, et Q' continuera à former une fraction proprement dite, laquelle pourra de même être résolue en $Q' = \frac{1}{u_1 + \delta_1} + Q''$, et ainsi de suite indéfiniment.

» Mais, si nous faisons $\delta_0, \delta_1, \ldots$ égaux chacun à o, le mode de développement devient déterminé. J'appellerai toute représentation déterminée de ce genre d'une quantité fractionnaire un *sorite.* Il va de soi qu'en développant une fraction donnée sous forme d'un sorite, les dénominateurs successifs, que j'appellerai ses *éléments,* peuvent être obtenus par un procédé de division; si la fraction à développer est rationnelle, le diviseur réel sera un entier continuellement décroissant et, par conséquent, toute fraction complexe rationnelle peut être développée (et seulement d'une manière) sous la forme d'un sorite limité.

» Les éléments d'un sorite sont analogues aux quotients partiels d'une fraction continue régulière; mais il existe entre les deux cas cette différence que, tandis que les dernières quantités sont parfaitement arbitraires, les éléments en question seront soumis à certaines lois que je vais présentement examiner.

» Soient $n, p, q, \ldots, r, s, \ldots, t, u$ les éléments d'un sorite. Il est clair que le dernier reste étant l'inverse de $\frac{1}{t} + \frac{1}{u}$, nous devons avoir $\frac{1}{t} + \frac{1}{u} < \frac{1}{t-1}$, c'est-à-dire $u > t^2 - t$, $u \geqq t^2 - t + 1$. En outre, si nous considérons le reste qui donne naissance à l'élément r, il doit être de la forme $\frac{1}{s-\varepsilon}$, où ε est une fraction quelconque, et nous devons avoir alors

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s-\varepsilon} < \frac{1}{r-1} \quad \text{ou} \quad s - r \geqq r^2 - r,$$

d'où

$$s \overset{=}{>} r^2 - r + t;$$

en sorte que la relation qui existe entre deux éléments consécutifs est la même, qu'ils soient ou non à la fin du développement; et si $u_x\ u_{x+1}$ sont deux entiers consécutifs dans une série, la seule condition nécessaire et suffisante pour la possibilité de l'existence d'un sorite dont ces nombres seraient les éléments est que nous ayons, pour toutes valeurs de x, $u_{x+1} \overset{=}{>} u_x^2 - u_x + 1$.

» Si u_{x+1} est toujours égal à $u_x^2 - u_x + 1$, nous obtiendrons une série qu'on peut appeler un *sorite limite*.

» Il est évident que toute fraction simple $\frac{1}{u_0 - 1}$ peut être développée sous la forme d'un sorite infini dont les éléments seront $u_0, u_1, u_2, \ldots$, soumis aux relations ci-dessus. Un sorite infini dans le cas limitant est, par conséquent, exprimable sous la forme d'une fraction finie, et la même chose sera vraie pour un sorite dont la branche de droite, commençant à un terme quelconque u_i, savoir :

$$\frac{1}{u_i} + \frac{1}{u_{i+1}} + \frac{1}{u_{i+2}} + \ldots,$$

forme un sorite limite.

» Mais, dans tout autre cas, un sorite ne peut être égal à une fraction finie; car une pareille fraction ne peut être développée que d'une manière sous forme d'un sorite, et un pareil sorite est nécessairement limité quant au nombre de ses termes.

» D'où il est impossible que la somme des inverses d'une série ascendante d'entiers positifs, tels que le carré de la différence entre chacun d'eux et celui qui le précède immédiatement est plus grand que la différence entre ce précédent et l'unité, puisse représenter une quantité rationnelle; car, s'il en était ainsi, nous aurions $u_{x+1} - u_x > (u_{x-1} - 1)^2$, c'est-à-dire $u_{x+1} > u_x^2 - u_x + 1$, et la série formerait un sorite qui n'appartiendrait pas au cas limite.

» Je vais maintenant examiner quelques-unes des propriétés de la série de termes définis par la condition $u_{x+1} = u_x^2 - u_x + 1$.

» Tout d'abord, je remarquerai que chaque terme u_{x+i} peut être exprimé sous la forme $P u_x + 1$; car supposons la propriété vraie pour une certaine valeur de i; alors, puisque

$$u_{x+i+1}-1 = z_{x+i}(u_{x+i}-1),$$

la chose est évidemment vraie pour celui qui suit immédiatement; or, la proposition étant vraie pour $i=1$, elle est également vraie en général.

» Il résulte de là que chaque élément d'un sorite limite est premier avec tous ceux qui le suivent et, conséquemment, que deux termes quelconques du sorite sont premiers entre eux.

» Maintenant, pour plus de simplicité, servons-nous de $v_0, v_1, v_2, \ldots$ pour représenter $(u_0-1), (u_1-1), (u_2-1), \ldots$; nous aurons alors

$$v_1 - v_0 = v_0^2,\quad v_2 - v_1 = v_1^2,\quad v_3 - v_2 = v_2^2,\quad \ldots.$$

» Par suite $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$, $v_3 - v_0$, ..., $v_x - v_0$ (ainsi qu'il résulte immédiatement de l'addition des équations ci-dessus) seront tous de la forme $\mathrm{P}v_0^2$, ou P est une fonction rationnelle et entière de v_0, et v_x sera de la forme $\mathrm{P}v_0^2 + v_0$. Cette conclusion amène à une représentation de la somme d'un nombre donné de termes d'un sorite finissant par une fraction de son terme inférieur; car

$$\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_{x+1}} = \frac{v_{x+1}-v_x}{v_x v_{x+1}} = \frac{v_x^2}{v_x v_{x+1}} = \frac{v_x}{v_x + v_x^2} + \frac{1}{v_{x+1}} = \frac{1}{u_x},$$

d'où

$$\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_x} = \frac{1}{v_0}\,\frac{1}{v_{x+1}} = \frac{v_{x+1}-v_0}{v_0 v_{x+1}} = \frac{(v_{x+1}-v_0)+v_0^2}{v_{x+1} \div v_0},$$

qui est de la forme $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}v_0+1}$, et est, par conséquent, une fraction de son terme inférieur.

» Maintenant, si nous représentons le produit des éléments u_0, u_1, u_2, ..., u_x par Πu_x et la somme de leurs combinaisons $x-1$ à $x-1$ par $\Pi' u_x$, le rapport $\frac{\Pi' u_x}{\Pi u_x}$ sera aussi la même fraction de son terme inférieur, puisque (comme on l'a fait voir) tous les éléments du sorite sont premiers entre eux.

» De là nous pouvons déduire les équations

$$u_{x+1} = u_0 + (u_0-1)^2\,\Pi' u_x,$$
$$u_{x+1} = 1 + (u_0-1)\,\Pi u_x,$$

dont la seconde servira à donner une limite inférieure du degré de convergence d'un sorite quelconque.

» En effet, dans le cas d'un sorite limite, nous avons

$$\begin{aligned} u_1 &> (u_0^2 - u_0), \\ u_2 &> (u_0 - 1)\, u_0 u_1 \quad > (u_0^2 - u_0)^2, \\ u_3 &> (u_0 - 1) u_0 u_1 u_2 > (u_0^2 - u_0)^4, \end{aligned}$$

et de même, en général,

$$u_x > (u_0^2 - u_0)^{2\_x1},$$

parce que la solution de l'équation

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \theta_{i-2} + \ldots + \theta_0 \quad \text{est} \quad \theta_i = 2^{i+1}\,\theta_0.$$

» Dans tout autre sorite, dans lequel l'élément initial est toujours u_0, la valeur de l'élément distant de x rangs doit être *a fortiori* plus grande que la valeur $(u_0^2 - u_0)^{2x-1}$ qui vient d'être obtenue pour le cas limite.

» Les considérations qui précèdent m'ont été suggérées par le Chapitre de la *Geschichte der Mathematik* de M. Cantor, qui traite de la singulière méthode en usage chez les anciens Égyptiens pour opérer avec les fractions. Ils avaient la curieuse habitude de résoudre toute fraction en une somme de fractions simples, en suivant pour cela une certaine méthode traditionnelle, qui ne conduirait pas, je me hâte de le dire, excepté dans un petit nombre de cas très simples, au développement sous la forme spéciale à laquelle, dans ce qui précède, j'ai donné le nom de *sorite fractionnel*.

» J'ajoute quelques exemples du développement d'une fraction rationnelle sous forme de sorite.

» Soit $\frac{4699}{7320}$ la fraction à développer. L'opération peut être disposée comme suit :

(2).	(8).	(60).	(3660).
4699	2078	1984	1920
7320	14640	117120	7027200
9398	16624	119040	7027200

(2) est le nombre supérieur d'une unité à $E\,\frac{7320}{4699}$;

$$9398 = 2 \times 4699;\quad 2078 = 9398 - 7320;\quad 14640 = 2 \times 7320.$$

» Un élément (2) est maintenant déterminé et il reste à développer la fraction $\frac{2078}{14640}$.

» (8) est un nombre supérieur d'une unité à E $\frac{14640}{2078}$;

$$16624 = 8 \times 2078; \quad 1984 = 16624 - 14640; \quad 117120 = 8 \times 14640.$$

» Un second élément, (8) est maintenant trouvé, et il reste $\frac{1984}{117120}$ à développer. En continuant de cette manière et avec des numérateurs 4699, 2078, 1984, 1920, qui diminuent nécessairement à chaque opération, nous arrivons enfin à l'élément 3660 avec un reste 0. Le sorite demandé est donc

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60} + \frac{1}{3660}.$$

» Comme second exemple, prenons la fraction $\frac{335}{336}$.

» L'opération peut être disposée d'une façon analogue à celle de l'exemple précédent, savoir :

2.	3.	7.	48.
335	334	330	294
336	672	2016	14112
670	1002	2310	14112

et, par suite, on trouvera que

$$\frac{335}{336} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{48}. \text{ »}$$

C'est là un intéressant exemple de l'utilité de l'histoire des Mathématiques.

CH. HENRY et EM. MEYERSON.