BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

CYPARISSOS STEPHANOS

Sur la définition géométrique des points imaginaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 204-213
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_204_1>

SUR LA DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DES POINTS IMAGINAIRES;

PAR M. CYPARISSOS STEPHANOS.

On sait que les éléments imaginaires ont été introduits en Géométrie, par Poncelet et Chasles, pour les mêmes raisons que l'introduction des quantités imaginaires s'est imposée à l'analyse. Ces illustres géomètres se sont contentés toutefois d'examiner celles des propriétés de deux éléments imaginaires conjugués qui se rapportent d'une manière symétrique à ces deux éléments. De cette manière la question de la *séparation* de deux éléments imaginaires conjugués, question qui consiste à caractériser ces deux éléments par des propriétés *réelles* distinctes, restait intacte jusqu'à ce que von Staudt en eût fait connaître la solution dans ses *Beiträge zur Geometrie der Lage* (1).

Depuis, plusieurs travaux remarquables ont été consacrés à la théorie de Staudt (2). Il est pourtant fort à regretter que cette théorie ne soit pas encore suffisamment connue.

Il semble que, pour présenter cette théorie d'une manière appropriée aux habitudes les plus communes parmi ceux qui s'intéressent à la Géométrie, on ne saurait mieux faire que de l'établir en s'aidant de considérations analytiques. C'est ce que nous avons tâché de faire dans ce qui suit pour donner la définition géométrique des points imaginaires.

Je partirai de la définition analytique d'un point imaginaire,

(1) Nürnberg, 1856, 1857, 1860 (en trois livraisons).

(2) Notamment celui de M. Lüroth : *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen* (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 145-214).

comme un point fictif dont les coordonnées sont imaginaires. Je supposerai, naturellement, que les formules relatives au changement des coordonnées, valables pour les points réels, le sont aussi pour les points imaginaires. Cela étant, je chercherai les propriétés réelles qui se rattachent à un point imaginaire et qui peuvent servir à le caractériser complètement.

Mais, avant d'aborder cette question même, je vais passer en revue certains faits qui rendront notre tâche plus aisée.

I.

1. Une droite doit être considérée, indépendamment de toute notion métrique, comme une ligne fermée pouvant être parcourue en entier par un point suivant deux sens différents.

On peut aller d'un point d'une droite à un autre point en suivant deux chemins continus différents, en se mouvant dans un sens ou dans l'autre, et décrivant ainsi l'une ou l'autre des deux portions de la droite aboutissant à ces deux points. Ainsi l'on ne peut définir un sens sur une droite qu'en donnant trois points A, B, C, qui indiquent trois positions successives d'un point qui se mouvrait toujours dans le même sens et parcourrait celle des deux portions de la droite aboutissant aux points A et C dans laquelle se trouve le point B.

2. Dans tout système réel de coordonnées établies sur une droite et servant à attribuer d'une manière uniforme les diverses valeurs d'un paramètre λ aux divers points de cette droite, il y a à distinguer trois points réels P_0, P_1, P_∞ correspondant respectivement aux valeurs $0, 1, \infty$ du paramètre λ, points qui jouent un rôle principal.

Le paramètre λ correspondant ainsi à un point réel P de cette droite est, comme on sait, égal au rapport anharmonique $(P_\infty P_0 P_1 P)$. Ce paramètre est positif ou négatif suivant que le sens $P_0 P P_\infty$ coïncide avec le sens $P_0 P_1 P_\infty$ ou bien avec le sens $P_\infty P_1 P_0$.

On voit ainsi qu'étant donné un système de coordonnées sur une droite, ayant pour points principaux P_0, P_1, P_∞, on peut appeler *sens positif* de la droite le sens $P_0 P_1 P_\infty$ et *sens négatif* le sens contraire $P_\infty P_1 P_0$. En d'autres termes, on peut désigner par $+$ et $-$

les deux sens $P_0P_1P_\infty$ et $P_\infty P_1 P_0$ respectivement. *Réciproquement* on peut attacher aux deux signes $+$ et $-$ les deux directions $P_0P_1P_\infty$ et $P_\infty P_1 P_0$ respectivement. Ce dernier principe est d'une grande importance pour l'interprétation géométrique des imaginaires, comme nous le verrons bientôt.

3. Étant données sur une même droite deux séries homographiques de points, on sait que, lorsqu'un point de la première se meut dans un sens déterminé s_1, le point correspondant de la seconde se meut aussi dans un sens déterminé s_2, qui peut coïncider avec le sens $+s_1$ ou bien avec le sens $-s_1$. Pourtant, dans le cas où la correspondance homographique entre les deux séries est singulière, il n'en est plus ainsi. Dans ce cas, intermédiaire entre les deux précédents, à un point arbitraire de la première série correspond un point fixe de la seconde, tandis qu'à un certain point de la première correspond un point arbitraire de la seconde. De cette manière il n'y a plus moyen de lier entre eux par l'homographie considérée deux sens s_1 et s_2 attachés respectivement aux deux séries.

La relation qui existe entre les coordonnées p et q de deux points correspondants dans deux séries homographiques est de la forme

$$q = \frac{k_1 p + l_1}{k_2 p + l_2}.$$

Pour que cette correspondance homographique soit singulière il faut que le déterminant

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1$$

de la substitution précédente soit nul.

On voit par là que, dans le cas où la correspondance homographique n'est point singulière, les deux sens s_1 et s_2 attachés par l'homographie sur les deux séries correspondantes doivent être identiques ou opposés suivant le signe de Δ. Il est du reste aisé de voir, en ayant égard au cas où la substitution précédente se réduit à $q = p$, que c'est le premier ou le second cas qui a lieu suivant que Δ est positif ou négatif.

Ainsi donc :

Si l'on a sur une droite une homographie réelle entre deux *points p et q, définie par la relation*

$$q = \frac{k_1 p + l_1}{k_2 p + l_2},$$

les deux sens s_1 et s_2 de cette droite qui se correspondent, par cette homographie, seront identiques ou opposés suivant que le déterminant

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1,$$

est positif ou négatif.

4. Lorsqu'on a sur une droite deux systèmes différents de coordonnées, il convient de savoir comparer entre eux les sens positifs attachés à ces deux systèmes. La proposition précédente permet de trancher cette question lorsqu'on connaît la substitution

$$(1) \qquad \lambda = \frac{k_1 \mu + l_1}{k_2 \mu + l_2},$$

par laquelle on passe du premier système de coordonnées (λ) au second (μ).

Soient P_0, P_1, P_∞ les points principaux du premier système de coordonnées; Q_0, Q_1, Q_∞ ceux du second.

Il est aisé de voir que :

Le sens positif $P_0 P_1 P_\infty$, *attaché au premier système de coordonnées, coïncide avec le sens positif* $Q_0 Q_1 Q_\infty$, *ou bien avec le sens négatif* $Q_\infty Q_1 Q_0$, *attaché au second système de coordonnées, suivant que le déterminant*

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1$$

de la substitution (1) *par laquelle on passe de l'un à l'autre de ces deux systèmes, est positif ou négatif.*

Considérons en effet la correspondance homographique qui existe entre deux points P et Q liés entre eux par l'égalité des rapports anharmoniques

$$(Q_\infty Q_0 Q_1 Q) = (P_\infty P_0 P_1 P).$$

On voit que dans cette homographie aux points P_0, P_1, P_∞ correspondent respectivement les points Q_0, Q_1, Q_∞. Si maintenant p et q sont les paramètres μ de deux points correspondants P et Q, on aura

$$p = (Q_\infty Q_0 Q_1 P),$$
$$q = (Q_\infty Q_0 Q_1 Q) = (P_\infty P_0 P_1 P).$$

De là on voit que q est égal au paramètre λ du point P dont le paramètre μ est égal à p. La correspondance entre P et Q sera donc définie dans le second système de coordonnées (μ), par la relation

$$q = \frac{k_1 p + l_1}{k_2 p + l_2}.$$

Maintenant on peut remarquer que, d'après le numéro précédent, le sens $P_0 P_1 P_\infty$ attaché à la première série est identique ou opposé au sens $Q_0 Q_1 Q_\infty$ attaché à la seconde, suivant que le déterminant

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1$$

est positif ou négatif. C'est bien cela qu'il nous fallait démontrer (¹).

II.

5. Deux points imaginaires conjugués sont toujours situés sur une droite réelle sur laquelle ils définissent une involution quadratique ayant ces deux points pour points doubles. Cette involution suffit évidemment pour déterminer le couple des points imaginaires conjugués dont il est ainsi le représentant géométrique réel.

Si

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2 = 0$$

est l'équation qui fournit les paramètres x des deux points imaginaires conjugués (pris par rapport à un système de coordonnées réelles établi sur la droite réelle qui porte ces points), la correspondance involutive dont il s'agit sera

$$a_0 xy + a_1 x + a_1 y + a_2 = 0.$$

(¹) Aux propositions précédentes (nos 3 et 4) se trouve intimement lié ce fait connu : qu'étant donnés trois points A, B, C d'une droite, correspondant aux valeurs a, b, c du paramètre λ, le sens ABC est identique ou opposé au sens $P_0 P_1 P_\infty$ suivant que la quantité

$$(b-a)(c-a)(c-b)$$

est positive ou négative.

Une pareille involution a cette propriété caractéristique que si l'on considère deux points x et y qui se correspondent dans cette involution, lorsque le point x se meut dans un sens déterminé, le point y se meut aussi dans le même sens.

C'est précisément ce fait qui a été utilisé par Staudt pour la séparation des deux points doubles d'une pareille involution, puisqu'il a défini un point imaginaire comme *représenté par une involution quadratique (entre les points d'une droite réelle) sans points doubles réels, involution supposée décrite dans un sens déterminé.*

Cela revient à dire que, étant donnés deux points imaginaires conjugués, représentés par une involution quadratique sans points doubles réels, on peut séparer ces deux points entre eux en leur attachant respectivement, et cela d'une manière bien tranchée, les deux sens différents suivant lesquels la droite réelle qui les porte peut être décrite.

C'est à la démonstration de ce que, de cette manière, on arrive à séparer entre eux deux points imaginaires conjugués que je passe maintenant. Mais, à côté de cette démonstration, nous aurons à observer certains faits qui permettent de constater la liaison intime qui existe entre le fait de la concordance de deux sens qui se correspondent dans une involution quadratique à points doubles imaginaires et de ce que l'adjonction de sens différents à deux points imaginaires conjugués répond bien à une propriété effective de ces points, liaison qui justifie l'énoncé sous lequel Staudt a présenté la définition des points imaginaires.

6. *Soient deux points imaginaires conjugués* P' *et* P'', *et supposons que ces points aient, dans un système de coordonnées* (P_0, P_1, P_∞) *établi sur la droite réelle qui joint ces points, pour paramètres* λ :

$$\lambda' = a + bi \quad \text{et} \quad \lambda'' = a - bi.$$

Je dis que, si b *est positif, on peut distinguer entre eux les points* P' *et* P'' *en attachant au premier point le sens* $P_0 P_1 P_\infty$ *et au second le sens opposé* $P_\infty P_1 P_0$, et cela par la considération de ce que le coefficient de i dans le paramètre λ du premier point est positif, tandis qu'il est négatif dans le paramètre du second point (conformément au principe du n° 2).

Pour prouver que cette manière d'attacher des sens différents à deux points imaginaires conjugués n'est point arbitraire, mais correspond à une propriété effective de ces points, je vais montrer que *les sens ainsi attachés à deux points imaginaires conjugués sont indépendants du choix des coordonnées.*

Soit

$$\varphi = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0$$

l'équation ayant pour valeurs les deux paramètres $\lambda' = x'_1 : x'_2$ et $\lambda'' = x''_1 : x''_2$. Le premier membre de cette équation doit naturellement conserver un même signe pour tout système de valeurs réelles de x_1 et x_2 ; ce signe sera celui des coefficients a_0 et a_2. Je désignerai par ε l'unité réelle précédée par ce signe.

En supposant maintenant qu'au point P' correspond, d'après ce qui précède, le sens positif $P_0 P_1 P_\infty$ et au point P'' le sens opposé, on devra avoir

$$\left\{\begin{aligned} \lambda' &= \frac{x'_1}{x'_2} = -\frac{a_1}{a_0} + i\frac{\varepsilon}{a_0}\sqrt{D}, \\ \lambda'' &= \frac{x''_1}{x''_2} = -\frac{a_1}{a_0} - i\frac{\varepsilon}{a_0}\sqrt{D}, \end{aligned}\right.$$

où

$$D = a_0 a_2 - a_1^2,$$

pour que le coefficient de i dans la valeur de λ' soit positif.

Rapportons maintenant les deux points P' et P'' à un second système de coordonnées $\left(\mu = \frac{y_1}{y_2}\right)$. Soit

$$\lambda = \frac{k_1 \mu + l_1}{k_2 \mu + l_2}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= k_1 y_1 + l_1 y_2, \\ x_2 &= k_2 y_1 + l_2 y_2, \end{aligned}\right.$$

la substitution qui permet de passer du premier système de coordonnées au second. Le déterminant de cette substitution sera

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1.$$

L'équation quadratique $\varphi = 0$, transformée par cette substitution, deviendra

$$\Phi = A_0 y_1^2 + 2 A_1 y_1 y_2 + A_2 y_2^2 = 0,$$

étant posé

$$A_0 = a_0 k_1^2 + 2 a_1 k_1 k_2 + a_2 k_2^2,$$
$$A_1 = a_0 k_1 l_1 + a_1 k_1 l_2 + a_1 k_2 l_1 + a_2 k_2 l_2,$$
$$A_2 = a_0 l_1^2 + 2 a_1 l_1 l_2 + a_2 l_2^2.$$

Quant aux deux racines λ' et λ'' de l'équation $\varphi = 0$, elles sont transformées respectivement par la même substitution en

$$(3) \qquad \begin{cases} \mu' = \dfrac{y_1'}{y_2'} = -\dfrac{A_1}{A_0} + i\dfrac{\varepsilon\Delta}{A_0}\sqrt{D}, \\ \mu'' = \dfrac{y_1''}{y_2''} = -\dfrac{A_1}{A_0} - i\dfrac{\varepsilon\Delta}{A_0}\sqrt{D}. \end{cases}$$

Comme maintenant $\dfrac{\varepsilon}{A_0}$ est toujours positif, on voit que ce n'est que lorsque Δ devient négatif qu'il arrive que les signes des coefficients de i dans ces valeurs de μ' et μ'' ne soient pas les mêmes que les signes des coefficients correspondants dans les valeurs de λ', λ''. Or, en ayant égard au résultat du n° 4, d'après lequel c'est seulement lorsque Δ devient négatif que le sens positif $Q_0 Q_1 Q_\infty$, relatif au système de coordonnées μ, cesse d'être le même que le sens positif $P_0 P_1 P_\infty$, relatif au système λ, pour devenir identique avec l'opposé de celui-ci, on voit que les sens que nous avons attachés respectivement à deux points imaginaires d'une droite, quoique définis nécessairement par une propriété de leurs coordonnées, restent les mêmes de quelque manière que l'on change le système de coordonnées. Ainsi se trouve démontrée la proposition très importante énoncée au commencement du présent numéro.

7. On peut aussi interpréter d'une autre manière les formules du numéro précédent, relatives à la transformation par une substitution linéaire des paramètres de deux points imaginaires conjugués. On peut en effet supposer que cette substitution représente, non plus un changement de coordonnées, mais une correspondance homographique entre deux points dont les paramètres (dans un même système ou dans des systèmes différents de coordonnées) sont λ et μ. On arrive ainsi au résultat important suivant :

Si l'on considère deux séries homographiques de points (pouvant être situés sur deux droites différentes) et que l'on *envisage le sens s_2 dans lequel la seconde série est décrite lorsque la première série est décrite dans un sens déterminé s_1, à tout point imaginaire de la première série attaché au sens $+s_1$ (ou au sens $-s_1$) correspondra dans la seconde un point imaginaire attaché au sens $+s_2$ (ou au sens $-s_2$).*

La proposition précédente ne saurait évidemment avoir une signification bien précise, sans la démonstration préalable de l'indépendance des sens attachés, d'après ce qui précède, à deux points imaginaires conjugués du choix particulier du système de coordonnées. Il est pourtant à remarquer que cette indépendance ne saurait non plus exister sans que la proposition dont il s'agit eût lieu en même temps, puisqu'on a là deux faits qui ne constituent que deux interprétations différentes d'un même fait analytique.

A la proposition précédente on peut rattacher ce fait, que *lorsqu'on a sur une droite deux séries homographiques dont les deux points communs sont imaginaires, les deux sens s_1 et s_2 correspondants de ces deux séries coïncident.* Dans le sens où les deux séries sont en situation involutive, on obtient précisément la propriété utilisée par Staudt dans sa définition des points imaginaires (n° 5).

8. Étant données deux séries homographiques de points, considérons un couple de points imaginaires conjugués de la première et le couple des points correspondants de la seconde. Il est clair que l'involution ayant pour points doubles les points du second couple sera la *transformée,* par l'homographie considérée, de l'involution déterminée par le premier couple, c'est-à-dire que deux points associés de cette seconde involution seront les transformés (les correspondants), par l'homographie, de deux points associés de la première involution.

D'après cela, étant donnée une homographie réelle à points fondamentaux (points se correspondant à eux-mêmes) imaginaires, chercher ces points fondamentaux, c'est chercher les involutions à points doubles imaginaires, qui sont échangeables avec cette homographie, qui, en d'autres termes, sont *transformées* en elles-mêmes par cette homographie. Il n'y a naturellement qu'une seule involution ayant cette propriété, c'est l'involution ayant pour points doubles les points fondamentaux de l'homographie proposée [1].

9. Il peut paraître arbitraire de vouloir employer, pour la représentation géométrique de deux points imaginaires conjugués, l'involution quadratique ayant ces points pour points doubles, plutôt que toute autre homographie ayant ces mêmes points pour points fondamentaux. Un tel procédé de représentation, en dehors d'autres inconvénients, présenterait encore celui-ci, que l'homographie ayant deux points imaginaires conjugués pour points fondamentaux serait transformée en son inverse par toute involution qui échange entre eux ces deux points imaginaires. Cependant, si cette homographie était *cyclique*, c'est-à-dire si, répétée un certain nombre k de fois ($k > 2$), elle donnait l'homographie identique, qui fait correspondre chaque point à soi-même, on pourrait définir le couple des points imaginaires non plus par cette homographie, mais par un quelconque des groupes de k points obtenus par l'application répetée de cette homographie à un même point réel. En prenant les points successifs d'un pareil groupe dans un sens ou dans l'autre, on aurait la représentation de l'un ou de l'autre des deux points imaginaires conjugués. Ce procédé a été indiqué par M. F. Klein (*Göttinger Nachrichten,* 1872, p. 373), et exposé géométriquement par M. Lüroth (*Math. Annalen,* vol. XI, 1877, p. 84-110) [2].

---

[1] On sait que dans le cas où une homographie est involutive, en dehors de l'involution ayant pour points doubles les points fondamentaux de l'homographie, il y a encore une infinité d'autres involutions réelles qui lui sont échangeables. Toutefois, ces involutions ont leurs points doubles réels et constituent des points associés dans l'homographie involutive proposée.

[2] En dehors des travaux déjà cités, on pourra aussi consulter, au sujet de la définition géométrique des éléments imaginaires, le Mémoire de M. Stolz : *Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytische Geometrie* (*Math. Annalen,* Vol. IV, 1871), ainsi que le travail de M. August : *Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie* (*Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin,* 1872).