Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Faculté des Sciences de Paris

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 15-32

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_15_0>

© Gauthier-Villars, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉLANGES.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

SUJETS DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Juillet 1869. — *Mécanique.* — Un point matériel non pesant assujetti à se mouvoir sur un cône de révolution est sollicité par une force dirigée à chaque instant suivant la perpendiculaire abaissée du point mobile sur l'axe du cône et proportionnelle à la longueur de cette perpendiculaire. Trouver le mouvement de ce point.

On appliquera les formules au cas suivant : L'angle que les génératrices du cône font avec l'axe est de 30°, la vitesse initiale est perpendiculaire à l'axe.

Épure. — On donne le rayon d'une sphère, les projections de son centre O et celles d'un autre point A. — Construire la trace horizontale du cône qui a pour sommet le point A, et qui est circonscrit à la sphère.

On ne supposera pas que le point A soit dans le plan horizontal, ni que la droite OA soit verticale.

Analyse. — Trouver la fonction z des deux variables indépendantes x et y, qui se réduit à zéro pour $x = a$ et qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$ax^4 \frac{dz}{dx} + (x^4 z + ax^3 y - ax^2 y^2) \frac{dz}{dy} = 2ax^2 yz - 2a^2 y^3.$$

Mécanique. — Trouver le mouvement d'un point matériel sollicité par deux forces dirigées vers un même centre fixe, l'une attractive et variant proportionnellement à la distance, l'autre répulsive et variant en raison inverse du cube de la distance.

On appliquera les formules en supposant la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial.

Analyse. — Étant donné un cône de révolution, on considère sur sa surface une courbe telle que le plan osculateur à la courbe en l'un quelconque de ses points contienne la normale à la surface en ce même point. Déterminer la projection de cette courbe sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône.

Novembre 1869. — *Analyse.* — Trouver l'équation générale des surfaces qui coupent à angle droit les sphères représentées par l'équation

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha z=0,$$

où α est un paramètre variable.

Déduire du résultat obtenu quelques systèmes formés de trois familles de surfaces triplement orthogonales.

Mécanique. — Un cylindre de rayon a et de moment d'inertie A par rapport à son axe est mobile autour de cet axe supposé fixe et horizontal. Sur ce cylindre s'enroule un fil sans masse supportant à ses deux bouts deux poids cylindriques, de même diamètre, mais de masses inégales m et m'. Ces deux poids éprouvent de la part de l'air une même résistance αv^2, proportionnelle au carré de leur vitesse commune v. Trouver le mouvement de ce système, en négligeant le frottement du cylindre contre l'air et contre ses appuis.

Examiner le cas particulier où les masses m et m' seraient égales et où le cylindre serait animé à l'origine du temps d'une vitesse de rotation donnée ω_0.

Épreuve pratique. — La longitude du Soleil étant 322° 44′ 28″,3 et l'obliquité de l'écliptique 23° 27′ 23″,7, calculer l'ascension droite et la déclinaison du Soleil.

On exprimera, suivant l'usage, l'ascension droite en temps.

Juillet 1870. — *Mécanique.* — Une droite homogène AA′ de masse m' et de longueur $2a$ est assujettie à tourner autour d'un axe vertical auquel elle est perpendiculaire et qui passe par son milieu O. Un point mobile M de masse m, assujetti à rester sur cette droite, est attiré par le point O proportionnellement à sa distance à ce point. On donne la vitesse angulaire initiale ω_0 de la droite, la position initiale du point M sur la droite et sa vitesse initiale relative. Trouver le mouvement du système.

On appliquera les formules au cas où le point M est placé d'abord à l'extrémité A de la droite sans vitesse relative. On supposera en outre $m'=\frac{m}{2}$ et le coefficient d'attraction $f=4\omega_0^2$.

Épure. — Deux circonférences égales dont les plans sont parallèles au plan vertical ont leurs centres O et O′ dans le plan horizontal. Une surface gauche est engendrée par une droite qui glisse sur les deux circonférences et sur la perpendiculaire au plan vertical mené par le point I, milieu de la droite OO′; construire les projections d'une position particulière de la génératrice, ainsi que les traces du plan tangent à la surface en un point quelconque de cette droite.

Analyse. — On propose de trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x} + \mathrm{C}\sin x + \mathrm{D}\cos x,$$

A, B, C, D étant des constantes.

Mécanique. — Un point matériel P est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe O et qui dépend de la distance du point P au point O; l'action de la force sur l'unité de masse s'exprime par la formule

$$\varphi = \frac{2k^2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3k^2a^2b^2}{r^7}.$$

On suppose le point P placé d'abord en C à une distance a du centre O; on imprime à ce point une vitesse perpendiculaire au rayon OC et égale à $\frac{k}{a}$; déterminer son mouvement.

Août 1871. — *Analyse.* — Trouver les lignes de courbure de la surface développable, enveloppe du plan mobile représenté, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \mathrm{R}\sqrt{1 - \alpha^2 + \varphi^2(\alpha)},$$

où α est un paramètre variable, $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de ce paramètre et R une constante donnée. On fera voir : 1° que les génératrices rectilignes constituent un premier système de lignes de courbure, comme dans toutes les surfaces développables; 2° que les lignes de courbure du deuxième système sont situées sur des sphères concentriques à la sphère qui touche le plan mobile.

Mécanique. — Déterminer le mouvement d'une baguette rectiligne pesante homogène dont les extrémités sont assujetties à glisser sans frottement l'une sur une droite horizontale Ox, l'autre sur une droite verticale Oy.

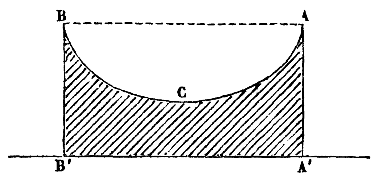
On calculera les pressions exercées par la baguette sur les deux droites.

Novembre 1871. — *Analyse.* — Étant donnés un plan P et un point O dans le plan, trouver l'équation générale de toutes les surfaces telles que si, dans un point quelconque m de l'une d'elles, on mène la normale mn qui rencontre en n le plan P, puis la perpendiculaire mp à ce plan, l'aire du triangle Onp soit égale à une constante donnée.

Déterminer la fonction arbitraire comprise dans l'équation obtenue de manière que la surface passe par une droite Ox située dans le plan P.

Mécanique. — Un prisme AA'BB', de masse donnée m_1, repose, par une surface plane A'B', sur un plan horizontal sur lequel il peut glisser sans frottement; dans ce prisme on a creusé un cylindre ayant ses génératrices horizontales; un point matériel pesant de

Fig. 1.



masse donnée m glisse sur la surface de ce cylindre sans frottement. On suppose que les vitesses initiales du prisme et du point matériel sont nulles.

Trouver le mouvement de ce système.

On appliquera les formules au cas où la section droite ACB du cylindre est une cycloïde engendrée par un cercle roulant sur la droite AB et l'on supposera que le point m a été placé au commencement au point le plus haut A. On effectuera le calcul en supposant que la masse m est très petite par rapport à m_1 et négligeant les puissances du rapport $\frac{m}{m_1}$ supérieures à la première.

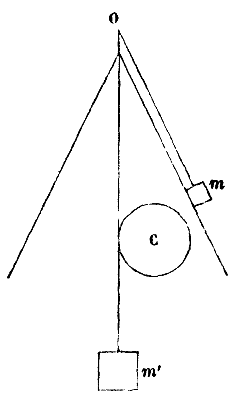
Juillet 1872. — *Analyse.* — Déterminer l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}\left(x - a - b\sqrt{-1}\right) dx.$$

Mécanique. — Trouver le mouvement d'un point matériel pesant assujetti à glisser sans frottement sur la surface d'un paraboloïde elliptique de révolution dont l'axe est vertical et dont la concavité est tournée vers le haut. On supposera la vitesse initiale horizontale.

Mécanique. — Étant donnés un cône circulaire droit dont l'axe est vertical et dirigé de bas en haut, et une poulie homogène, de masse et de rayon connus, située dans un plan méridien du cône en tournant autour d'un axe perpendiculaire à ce plan; un fil

Fig. 2.



flexible et inextensible est enroulé sur la poulie; un des brins du fil passe dans une ouverture infiniment petite pratiquée au sommet du cône et à son extrémité est attaché un point pesant de masse m assujetti à glisser sans frottement sur la surface du cône; l'autre brin descend suivant la verticale et porte à son extrémité un point pesant de masse m'. Trouver le mouvement de ce système en supposant que la vitesse initiale du point m soit horizontale et celle du point m' nulle.

On néglige le poids du fil.

Analyse. — 1° Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (ax+b)e^x + ce^{-2x},$$

a, b, c, constantes données; e est la base des logarithmes népériens.

2° x, y, z étant les coordonnées rectilignes, a, b, α, β les fonctions d'un paramètre variable, on demande les conditions pour que la droite $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ engendre une surface développable dont les lignes de courbure normales aux génératrices soient situées sur des sphères concentriques.

Mécanique. — Les axes OX, OY, OZ étant invariablement liés à un corps solide et l'axe OZ étant fixé dans l'espace, on donne par rapport à ces axes les coordonnées x, y du centre de gravité du solide et les valeurs D, E des sommes Σmyz, Σmxz.

Le solide étant supposé tourner autour de l'axe OZ avec une vitesse angulaire ω, sans être sollicité par aucune force extérieure, on demande :

1° De trouver quelle relation il doit y avoir entre les données D, E, x et y pour que les pressions exercées sur l'axe aient une résultante unique;

2° De calculer, quand cette relation est satisfaite, la valeur de la pression résultante;

3° De former, par rapport aux axes mobiles OX, OY, OZ, les équations de la droite suivant laquelle elle est dirigée.

Novembre 1872. — *Mécanique.* — Trouver dans un plan vertical la courbe AMB sur laquelle un point pesant doit être assujetti à se mouvoir pour que le rapport de la pression exercée par ce point sur la courbe à la composante normale de son poids soit égal à un nombre donné n.

On examinera en particulier le cas de $n = 2$.

Analyse et Mécanique. — 1° Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

2° Déterminer le mouvement d'un corps solide pesant dont les molécules sont sollicitées vers un point fixe par des forces proportionnelles à leurs masses et à la distance au point fixe.

Juillet 1873. — *Analyse.* — Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces décrites par une droite qui se meut en rencontrant une droite fixe sous un angle donné.

Intégrer ensuite cette équation aux dérivées partielles.

Mécanique. — Une sphère homogène est posée sans vitesse sur un plan horizontal; trouver le mouvement de cette sphère, en supposant tous les éléments de masse qui la composent attirés proportionnellement à la distance par un point fixe O du plan. L'adhérence de la sphère au plan horizontal est supposée telle qu'elle ne puisse que rouler sans glisser.

Les données sont le rayon R de la sphère, la distance a du point de contact initial au point O et l'attraction u que ce dernier point exerce sur l'unité de masse à l'unité de distance.

Analyse. — Transformer l'intégrale double $\int\int dx\,dy$ qui se rapporte aux aires planes en substituant aux coordonnées rectangulaires x, y les paramètres des deux familles de coniques homofocales représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1.$$

Application à l'aire du cercle de rayon R.

Intégrer l'équation différentielle

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 9x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 37x \frac{dy}{dx} - 64y = x^4[\alpha + \beta \log x + \gamma(\log x)^2],$$

α, β, γ étant des constantes données.

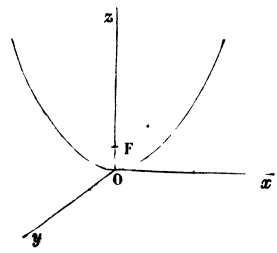
Juillet 1873. — *Analyse.* — Intégrer le système de deux équations différentielles simultanées

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + 5x + y = \cos 2t,\\ &\frac{d^2y}{dt^2} - x + 3y = 0. \end{aligned}\right.$$

Mécanique. — Un point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sur un paraboloïde de révolution dont l'axe est la verticale Oz.

Il est en outre soumis à l'attraction d'un centre placé au foyer F

Fig. 3.



de la parabole méridienne. Cette attraction est proportionnelle à la distance et telle que, si le point matériel était placé en O, elle serait égale au poids de ce point. On donne la masse m du point matériel, la distance $OF = \frac{\mu}{2}$ et l'on demande d'étudier le mouvement du point.

On recherchera, en particulier, les diverses circonstances du mouvement dans le cas où il s'effectue dans un des plans méridiens de la surface.

Novembre 1873. — *Analyse.* — On donne une série de courbes (c) représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$, où a est une constante arbitraire.

On demande :

1° L'équation différentielle qui représente toutes les courbes (c);

2° L'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes (c);

3° L'équation en termes finis des trajectoires orthogonales des courbes (c).

Mécanique. — Deux points matériels, de masses m et m', réunis par un fil flexible et inextensible qui traverse un anneau infiniment petit a, sont assujettis à se mouvoir sans frottement dans un plan qui passe par a; le point m est sollicité par une force dirigée vers a et qui varie en raison inverse du carré de sa distance à ce point; déterminer le mouvement du système en négligeant la masse du fil.

On examinera, en particulier, le cas où la vitesse initiale du point m' est dirigée suivant la droite qui joint la position initiale au point fixe a.

Juillet 1874. — *Analyse.* — 1° Intégrer les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 13y + \frac{dz}{dx} + 20z = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} + 2y + \frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dz}{dx} + 3z = 0.$$

2° Intégrer les deux équations simultanées

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 13y + \frac{dz}{dx} + 20z = e^x,$$
$$\frac{dy}{dx} + 2y + \frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dz}{dx} + 3z = e^{-x}.$$

Mécanique. — Trouver le mouvement de deux points matériels pesants, qui s'attirent proportionnellement à leur distance et qui sont assujettis à se mouvoir sans frottement, le premier sur une droite verticale donnée, le second sur un plan donné oblique à l'horizon.

On examinera, en particulier, les circonstances du mouvement dans les hypothèses suivantes : 1° les deux points matériels ont des masses égales ; 2° leur position initiale est celle où ils resteraient en équilibre si leurs vitesses étaient nulles ; 3° les projections de la vitesse initiale du second point sur l'horizontale et sur la ligne de plus grande pente du plan sont égales chacune à la vitesse initiale du premier point ; 4° le plan donné fait avec l'horizon un angle, dont le sinus est égal à $\frac{3}{4}$.

Géométrie descriptive. — Une surface est engendrée par la rotation d'une parabole autour de la tangente à son sommet. Déterminer la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, d'une ligne tracée sur la surface, et telle que le rayon de courbure de la vection normale qui correspond à l'une quelconque de ces tangentes soit infinie.

Mécanique — Un point pesant m est assujetti à se mouvoir sans frottement sur un cylindre circulaire droit dont l'axe est vertical, et, en outre, il est soumis à l'attraction d'un point fixe A, attraction proportionnelle à la distance. Déterminer le mouvement du point m.

Novembre 1874. — *Analyse.* — On considère, sur la surface d'un paraboloïde elliptique, les courbes définies par la condition que les normales à la surface menées par les différents points de l'une d'elles fassent un angle constant avec l'axe.

Trouver l'équation des projections de ces courbes sur un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.

Calculer l'aire de la calotte du paraboloïde limitée par une des courbes.

2° Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions données de x, leurs dérivées étant représentées par $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$; on propose d'intégrer les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{dy}{dx} + \varphi'(x)y - \psi'(x)z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} + \psi'(x)y + \varphi'(x)z = 0.$$

Mécanique. — Un point matériel libre, sollicité par une force dirigée vers un centre fixe, se meut de manière à être à chaque instant sur une spirale logarithmique ayant ce centre pour pôle et tournant uniformément autour de lui. On demande la valeur de la force en fonction de la distance du point mobile au centre fixe.

L'expression de la force étant trouvée, on cherchera l'équation générale de la trajectoire d'un point matériel, soumis à l'action de cette force.

Juillet 1875. — *Analyse.* — 1° Déterminer les lignes de courbure de la surface, représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$e^z = \cos x \cos y.$$

2° Intégrer les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}.$$

Épreuve pratique. — Géométrie descriptive. — Un conoïde a pour plan directeur un plan perpendiculaire à la ligne de terre et pour directrices : 1° une droite AA′ parallèle à la ligne de terre et à $0^m,10$ de chacun des plans de projection; 2° une circonférence de $0^m,05$ de rayon située dans le plan horizontal et tangente à la ligne de terre.

Déterminer les projections de la section faite dans la surface par un plan dont les traces seraient les projections de même nom de la droite AA′ ainsi que la tangente en un point de cette section.

Mécanique. — Un point matériel est assujetti à rester sur une sphère, dont un point fixe P est considéré comme pôle, et il est sollicité par une force dirigée, à chaque instant, suivant la tangente, au méridien MP et inversement proportionnelle au carré du cosinus de la latitude. Déterminer le mouvement du point M et trouver l'équation du cône qui a pour sommet le centre de la sphère et pour directrice la trajectoire décrite.

La vitesse initiale du point M sera supposée tangente au parallèle passant par la position initiale et on la regardera comme donnée.

Analyse. — Déterminer une courbe c telle que si l'on forme une de ces transformées c_1 par rayons vecteurs réciproques, relativement à un pôle donné O, les rayons de courbure en deux points correspondants M et M_1 des deux courbures c et c_1 aient un rapport constant.

(On dit que la courbe c_1 est une transformée par rayons vecteurs réciproques de c, par rapport au pôle O, lorsque le produit $OM.OM_1$ des rayons de même direction, issus du point O, est constant.)

Mécanique. — Un point matériel non pesant est assujetti à se mouvoir sur un cône de révolution, et il est soumis à l'action d'un centre attractif, placé au sommet du cône et qui l'attire en raison inverse du carré de la distance.

On demande d'étudier le mouvement du point matériel et en particulier la projection de la trajectoire sur un plan perpendiculaire à la génératrice du cône sur laquelle se trouve le point matériel.

Novembre 1875. — *Analyse.* — Intégrer l'équation différentielle

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\right]^2 = y\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\right]^2.$$

Déterminer toutes les surfaces qui satisfont à la condition

$$OP.MN = \lambda.\overline{OM}^2,$$

dans laquelle λ désigne une constante donnée, O l'origine des coordonnées, M un point quelconque de l'une des surfaces, P le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent en M et N la trace de la normale en M sur le plan XOY.

(Les axes des coordonnées sont rectangulaires.)

Mécanique. — Un point matériel pesant, assujetti à rester sur une sphère de rayon a, est attiré proportionnellement à la distance par un point fixe B situé sur la verticale Oz du centre de la sphère, à une distance OB $= b$ de ce centre. On donne la valeur μ de l'attraction à l'unité de distance, l'intensité g de la pesanteur, la vitesse initiale k du point mobile, laquelle est supposée horizontale, et enfin la distance initiale h de ce point au plan horizontal Oxy qui passe par le centre de la sphère.

On demande de trouver les limites entre lesquelles variera, pendant le mouvement, l'ordonnée z du point mobile; de déterminer complètement ce mouvement, dans le cas particulier où l'attraction du point fixe B sur le centre de la sphère est égale et contraire à la pesanteur.

Épreuve pratique. — Construire les projections et la longueur d'une normale commune à deux cylindres, qui ont pour bases deux cercles donnés dans le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles à deux droites données.

Juillet 1876. — *Analyse.* — On donne un hélicoïde gauche, dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$z = k \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

On demande de déterminer les projections sur le plan des xy des courbes tracées sur cette surface, de façon que le plan osculateur, en un point quelconque de l'une d'elles, comprenne la normale à la surface en ce même point.

Mécanique. — Trouver le mouvement de deux points matériels, assujettis à glisser sans frottement sur un cercle horizontal, et s'attirant mutuellement en raison inverse du cube de la distance.

Épreuve pratique. — Calcul numérique; l'excentricité d'une planète étant supposée égale à $\frac{1}{4}$, calculer l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne correspondant à une anomalie excentrique égale à $40^{\circ}17'34'',74$.

Analyse. — Les axes d'une ellipse sont $2a$ et $2b$; on suppose $a > b$; cette ellipse sert de directrice à un cylindre droit; calculer la portion du volume de ce cylindre qui est renfermée dans une sphère ayant le centre de l'ellipse pour centre et son demi-grand axe a pour rayon.

Déterminer les trajectoires orthogonales de l'un des systèmes de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Mécanique. — Un point matériel pesant est assujetti à demeurer sur un cône circulaire droit dont l'axe est vertical; il est, en outre, soumis à l'attraction d'un centre fixe placé au sommet du cône et attirant en raison inverse du cube de la distance.

On demande d'étudier le mouvement du point matériel.

Novembre 1876. — *Analyse.* — On donne une sphère et une droite D; déterminer les projections sur un plan perpendiculaire à la droite D des trajectoires orthogonales des sections faites dans la sphère par les plans menés suivant cette droite.

Mécanique. — Mouvement d'un point matériel pesant, assujetti à rester sur la surface d'un cylindre de révolution dont l'axe fait un angle α avec la verticale.

Analyse. — Trouver une courbe, telle que le triangle, ayant pour sommet un point quelconque M de la courbe, le centre de courbure correspondant et le pied de l'ordonnée du point M ait une surface constante. On fera voir que l'une des coordonnées s'exprime en fonction de l'autre par une quadrature et que l'on peut se faire une idée de la forme de la courbe, sans en avoir l'équation en termes finis.

Nota. — Les axes des coordonnées sont supposés rectangulaires.

Épure. — Contour apparent horizontal d'une surface réglée déterminée :

1° Par une ellipse, contenue dans le premier plan bissecteur, se projetant horizontalement suivant une circonférence ayant $0^m,03$ de rayon, tangente à la ligne de terre et ayant son centre sur le grand axe de la feuille ;

2° Par une parallèle à la ligne de terre à $0^m,06$ en avant du plan vertical et $0^m,03$ en dessus du plan horizontal;

3° Par une perpendiculaire au plan vertical dans le plan horizontal, placée sur le grand axe de la feuille.

Déterminer un point quelconque du contour apparent.

Mécanique. — I. Trouver le mouvement d'un point matériel M de masse m, sollicité par une force dirigée vers un point fixe O et égale à $\frac{m\mu\sin^2\theta}{r^2}$, r étant la distance OM et θ l'angle que fait ce rayon vecteur avec le rayon vecteur initial $OA = a$. On supposera la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial OA et égale à $\sqrt{\frac{2\mu}{3a}}$; on donnera une formule, permettant de calculer la position du mobile à chaque instant; on cherchera la durée de la révolution et on la comparera à celle qui aurait lieu si le mobile, placé dans les mêmes conditions initiales, était sollicité par la force $\frac{m\mu}{r^2}$.

II. Un mobile M, assujetti à se mouvoir sur une sphère donnée, sans frottement, est sollicité par une force dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point M sur un diamètre fixe AB. Suivant quelle loi doit varier la force, pour que la trajectoire décrite par le mobile soit une conique sphérique dont le diamètre AB est l'un des axes ?

Épreuve pratique. — Calculer l'heure d'après la hauteur du Soleil. Données : latitude du lieu, 48°50′11″ boréale; déclinaison du Soleil, 15°12′25″ boréale; hauteur observée corrigée de la réfraction, 30°28′50″.

Analyse. — 1° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées en coordonnées par l'équation

$$\rho^2 = a^2 \log \frac{\tang \omega}{c},$$

dans laquelle c est un paramètre variable; le signe log désigne un logarithme népérien.

2° L'angle α étant supposé compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, soit

$$\rho^2 = a^2 \log \frac{\tang \omega}{\tang \alpha}$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires; on demande si l'aire du secteur limité par cette courbe et par les rayons vecteurs correspondants à $\omega = \alpha$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$ a une valeur finie ou infinie.

Mécanique. — On considère la surface de révolution, engendrée par une hyperbole équilatère ayant une asymptote verticale et tournant autour de cette asymptote. On demande le mouvement d'un point pesant assujetti à demeurer sur l'une des deux nappes de cette surface.

Novembre 1877. — *Analyse.* — Étant donnée un ellipsoïde à trois axes inégaux représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on considère l'ellipse E résultant de l'intersection de cette surface par le plan des xz. En un point quelconque M de cette ellipse, il existe deux sections normales principales de l'ellipsoïde dont chacune a pour ce point son rayon et son centre de courbure. Cela posé on demande :

1° Les expressions, pour chaque point M, des rayons de courbure R_1, R_2 des deux sections principales;

2° La relation qui existe entre R_1 et R_2;

3° Le lieu des positions qu'occupent les centres de courbure des sections principales, lorsque le point M se déplace sur l'ellipse E.

Mécanique. — Mouvement de deux points matériels de masses m et m', s'attirant proportionnellement à la distance et assujettis à se mouvoir sans frottement sur deux cercles concentriques de rayons a et a' situés dans un même plan horizontal. On suppose les deux mobiles en repos à l'origine du temps.

Cas des oscillations infiniment petites.

Épreuve pratique : La déclinaison du Soleil étant supposée égale à $18^\circ 27' 16''$, calculer la distance zénithale de cet astre à 6^h de temps vrai à Paris.

On prendra pour latitude de Paris la valeur de $48^\circ 59' 13''$.

Juillet 1878. — *Mécanique.* — On considère deux points matériels non pesants, de masses m et m', assujettis à se mouvoir sans frottement dans deux plans différents, mais parallèles, et maintenus à une distance invariable l'un de l'autre par une tige dont on négligera la masse. Ces deux points sont soumis uniquement à l'action d'un centre fixe qui les attire proportionnellement à leur masse et à leur distance. On demande : 1° le mouvement du centre de gravité ; 2° on indiquera pour quelles conditions initiales le mouvement des deux points sera le même que s'ils n'étaient pas reliés l'un à l'autre par la tige solide.

Astronomie. — Connaissant pour un astre, à une certaine époque, les coordonnées écliptiques

$$\lambda = 2^\circ 51' 4'',45, \quad \mathcal{L} = 9^\circ 33' 38'',386,$$

on propose de trouver les coordonnées équatoriales correspondantes.

On supposera l'obliquité de l'écliptique

$$\omega = 23^\circ 27' 32'',935.$$

Analyse. — 1° Trouver les courbes dont les coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires satisfont à l'équation différentielle

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \frac{dy}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} = \left[3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right] \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2,$$

dans laquelle dx est supposée constante.

2° On demande de démontrer qu'en posant

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx,$$

puis successivement

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} xy\,dx,$$

$$y_2 = \int_{x_0}^{x} xy_1\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_n = \int_{x_0}^{x} xy_{n-1}\,dx,$$

l'expression de y_n sera donnée par la formule suivante :

$$y_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\int_{x_0}^{x} (x^2 - z^2)^n f(z)\,dz.$$

Épure.— Un conoïde est engendré par une droite s'appuyant :

1° Sur une sphère tangente aux deux plans de projection, ayant son centre à $0^m,4$ à droite du centre de la feuille et à $0^m,6$ de chacun des plans de projection ;

2° Sur une verticale menée par l'extrémité du rayon horizontal de la sphère inclinée de 45° sur le plan vertical et dirigée vers la gauche en avant.

Déterminer la section du conoïde par le plan vertical.

Analyse. — Déterminer les surfaces de révolution telles que, en chacun de leurs points, les rayons de courbure des sections principales soient dirigés dans le même sens et aient une somme constante a.

On indiquera la figure du méridien de la surface.

Calcul astronomique. — La déclinaison du Soleil étant supposée boréale et égale à $16°32'48''$, et la latitude du lieu égale à $52°26'17''$, calculer à $0'',1$ près la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon à $4^h 28^m 15^s$ de temps vrai.

Mécanique. — 1° Un point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sur un cylindre circulaire droit dont l'axe est vertical. Il est soumis en outre à l'action d'un centre fixe qui l'attire proportionnellement à la distance. On demande d'étudier le mouvement que prendra le point matériel, les conditions initiales de ce mouvement étant quelconques.

2° Le mouvement d'un point matériel est défini par les formules

$$x = a + b\,t + c\,t^2,$$
$$y = a' + b'\,t + c'\,t^2,$$
$$z = a'' + b''\,t + c''\,t^2.$$

Indiquer la nature de la trajectoire et la grandeur de l'accélération à un instant quelconque.

Novembre 1878. — *Analyse.* — Une surface de révolution autour de l'axe des z est définie en coordonnées rectangulaires par l'équation $z = f(\rho)$, dans laquelle ρ désigne la distance d'un point de la surface à l'axe.

1° Trouver l'équation différentielle en coordonnées polaires, le pôle étant l'origine des coordonnées rectangulaires, des projections sur le plan des xy, des courbes tracées sur la surface qui jouissent de la propriété que le plan osculateur en chaque point de l'une d'elles comprenne la normale à la surface en ce même point;

2° Intégrer l'équation différentielle obtenue.

Mécanique. — Un point matériel de masse égale à 1 est attiré par un centre fixe; l'attraction à la distance x est égale à $\frac{M}{x^7}$, M étant une constante. On suppose qu'à l'origine du temps ce point matériel est situé à une distance a du centre fixe et qu'il est animé perpendiculairement au rayon vecteur d'une vitesse égale à $\sqrt{\frac{M}{3a^6}}$. On demande de déterminer la trajectoire du point mobile, d'assigner sa position et sa vitesse à l'époque t et d'exprimer l'arc parcouru depuis l'origine du temps par une intégrale de la forme

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

(*A suivre.*)