BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

M. FALK

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 137-139

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_137_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

PAR M. M. FALK.

Monsieur,

Voici une démonstration élémentaire et, je l'espère, rigoureuse du théorème fameux de votre illustre Cauchy, laquelle j'ose soumettre à votre critique bienveillante.

De la définition ordinaire

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n=1} f\left(\alpha + \lambda\,\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\frac{\beta-\alpha}{n},$$

où α, β, t sont réelles, mais $f(t)$ est supposée complexe, on déduit sans peine le théorème :

THÉORÈME I. — *Si α et β sont finies et que $f(t)$ soit uniforme et continue, depuis $t=\alpha$ jusqu'à $t=\beta$, l'intégrale définie $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ a une valeur finie et parfaitement déterminée.*

On a, de plus, le théorème connu : *Si, dans une certaine partie du plan des coordonnées (ρ, t), $f(\rho, t)$ est fonction uniforme et continue des deux variables indépendantes ρ et t, et que la courbe décrite par le point mobile (ρ, t), pour une certaine valeur donnée de ρ, quand t varie de $t=\alpha$ à $t=\beta$, soit située tout entière dans l'intérieur de cette partie du plan, on peut, après avoir choisi à volonté une quantité positive σ, trouver une autre quantité positive δ, telle que, pour toutes les valeurs de t entre $t=\alpha$ et $t=\beta$,*

$$[f(\rho+h,t)-f(\rho,t)] \leqq \sigma \quad \text{pour} \quad (h) \leqq \delta.$$

En s'appuyant sur ce théorème, on démontre très aisément le théorème :

THÉORÈME II. — *Si $f(\rho, t)$ et $\frac{\partial f(\rho,t)}{\partial\rho}$ sont fonctions uniformes et continues des deux variables réelles ρ et t, dans l'intérieur d'une certaine partie du plan des coordonnées (ρ, t), et que la courbe décrite par le point mobile (ρ, t) pour une certaine va-*

leur de ρ, t allant de $t=\alpha$ à $t=\beta$, soit tout entière située dans l'intérieur de cette partie du plan, on a

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\alpha^\beta f(\rho,t)\,dt=\int_\alpha^\beta\frac{\partial f(\rho,t)}{\partial\rho}\,dt,$$

pourvu que α et β soient indépendants de ρ.

Soit maintenant z une variable complexe et $F(z)$ une fonction qui, dans une certaine partie du plan à contour *simple,* est uniforme, continue et douée d'une dérivée. Si, de plus,

$$z=\varphi(t)+\rho\,\psi(t),$$

φ et ψ étant deux fonctions complexes uniformes et continues de la variable *réelle* t, pour chaque valeur donnée de ρ depuis $\rho=0$ jusqu'à $\rho=1$, représente une courbe située tout entière dans l'intérieur de la partie du plan et joignant les deux points fixes $z=z_0$ et $z=z_1$, déterminés par $t=\alpha$ et $t=\beta$, on doit avoir

$$\psi(\alpha)=\psi(\beta)=0.$$

On démontre maintenant très simplement le théorème fondamental :

Théorème III. — *Lorsqu'une fonction* $F(z)$ *est uniforme, continue et douée d'une dérivée dans une partie du plan à contour simple, les intégrales définies* $\int_{z_0}^{z_1}F(z)\,dz$ *relatives aux différentes lignes qui vont d'un point* z_0 *à un autre point* z_1 *dans cette partie du plan, sont égales.*

En effet, soient $z=\varphi(t)$ et $z=\varphi(t)+\psi(t)$ deux quelconques de ces courbes et supposons d'abord que $F'(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ soient continues. Posons maintenant dans l'intégrale définie

$$z=\varphi(t)+\rho\psi(t);$$

ce qui donne

$$\int_{z_0}^{z_1}F(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi)(\varphi'+\rho\psi')\,dt.$$

En vertu du théorème II, nous avons ici

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{z_0}^{z_1}F(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi)\psi'dt+\int_\alpha^\beta F'(\varphi+\rho\psi)\psi(\varphi'+\rho\psi')\,dt.$$

Mais de l'identité évidente

$$\frac{d}{dt}[F(\varphi+\rho\psi)\psi] = F'(\varphi+\rho\psi)\psi(\varphi'+\rho\psi') + F(\varphi+\rho\psi)\psi',$$

il suit

$$\int_\alpha^\beta F'(\varphi+\rho\psi)\psi(\varphi'+\rho\psi')\,dt = I_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi)\psi - \int_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi)\psi'\,dt;$$

donc nous avons

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz = I_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi) = 0,$$

à cause de $\psi(\alpha) = \psi(\beta) = 0$.

L'intégrale est par suite indépendante de la valeur de ρ, ce qu'il fallait bien prouver. On étend maintenant très facilement la démonstration au cas où $F'(z)$ est discontinue et les courbes le long desquelles on prend l'intégrale sont brisées en un nombre fini quelconque de points. Le reste de la démonstration du théorème de Cauchy se fait comme à l'ordinaire.