ÉMILE PICARD

Sur une proposition concernant les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 107-116

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_107_0>

SUR UNE PROPOSITION CONCERNANT LES FONCTIONS UNIFORMES D'UNE VARIABLE LIÉES PAR UNE RELATION ALGÉBRIQUE;

Par M. Émile PICARD

Dans un travail sur une classe d'équations différentielles (*voir* t. IV de ce Recueil, 2^e^ série, 1880), j'ai considéré deux fonctions uniformes d'une variable, n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point à l'infini et liées par une relation algébrique. Envisageons ici d'une manière plus générale deux fonctions

$$x = \mathrm{P}(z), \quad y = \mathrm{Q}(z),$$

uniformes dans tout le plan, ayant des pôles en nombre quelconque et un nombre fini de points singuliers essentiels; *je me propose d'établir que, s'il existe entre ces deux fonctions une relation algébrique, le genre de cette relation doit être zéro ou l'unité.* J'indiquerai ensuite la forme générale de deux fonctions uniformes P et Q liées par une relation algébrique.

1. Mon point de départ est dans la proposition suivante, qui résulte des recherches de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1882).

y étant lié à x par la relation algébrique

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

de genre égal ou supérieur à 2, on peut trouver une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y) z,$$

où φ est rationnel, n'ayant d'autres points singuliers que les points analytiques $x = a$, $y = b$, points singuliers de l'équation (1), et jouissant des propriétés suivantes : si l'on prend deux intégrales convenables ω_1 et ω_2, l'équation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$$

donne pour x une fonction fuchsienne de u, fonction qui n'est définie que pour les valeurs de u dans lesquelles le coefficient de i est positif. De plus, dans le voisinage d'un point analytique $x = a$, $y = b$ ($y = b$ faisant partie d'un système circulaire de p racines), le quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ sera fonction uniforme de $(x - a)^{\frac{1}{p}}$, et nous pouvons enfin supposer qu'aucune des substitutions du groupe de l'équation linéaire n'est parabolique.

La fonction u de x, que nous venons de définir, a pour chaque valeur de x une infinité de déterminations; quel que soit x, toutes ces déterminations ont des valeurs finies, et dans ces expressions, mises sous la forme ordinaire des quantités imaginaires, le coefficient de i est toujours positif et différent de zéro : u désignant l'une d'entre elles, toutes les autres sont données par la formule

$$\frac{Au + B}{Cu + D},$$

où A, B, C, D sont réels et satisfont à la relation $AD - BC = 1$.

La substitution (A, B, C, D) est une des substitutions du groupe fuchsien défini plus haut. Ce groupe, comme je l'ai dit, ne renferme pas de substitutions paraboliques.

2. Ces résultats étant admis, supposons maintenant qu'entre deux fonctions uniformes

$$x = P(z), \quad y = Q(z)$$

existe une relation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

de genre égal ou supérieur à deux. Les fonctions P et Q ont des pôles en nombre quelconque et un nombre fini de points singuliers essentiels, que nous pouvons tous supposer à distance finie et que je désignerai par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

J'envisage la fonction u de x qui vient d'être définie. Je remplace dans cette fonction x par $P(z)$: u devient alors une fonction de z dont nous allons faire l'étude. Dans le voisinage de toute valeur de z à laquelle ne correspond pas un système de valeurs de x et y qui donnent un point singulier de la relation algébrique, la fonction u est évidemment uniforme. Soit maintenant $z = z_1$ une valeur de z pour laquelle on ait $x = a$, $y = b$, cette dernière faisant partie d'un système circulaire de p racines; l'équation $P(z) = a$ admettra la racine $z = z_1$ à un degré de multiplicité multiple de p, puisque la valeur de y tirée de l'équation (1) doit être une fonction uniforme de z; or $u(x)$, étant dans le voisinage de $x = a$ fonction uniforme de $(x - a)^{\frac{1}{p}}$, sera par suite une fonction uniforme de z dans le voisinage de z_1 : on voit donc que u est une fonction uniforme de z dans tout contour simple ne comprenant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Nous allons maintenant rechercher la forme de u dans le voisinage d'un tel point a. Traçons autour du point a un certain domaine D ne comprenant aucun autre point essentiel des fonctions P et Q. Soit pour un point de ce domaine une détermination u de la fonction $u(z)$; quand z fait un tour complet autour du point a dans le sens positif, $x = P(z)$ décrit dans son plan une courbe également fermée, et par conséquent la nouvelle détermination de u a la forme

$$\frac{Au + B}{Cu + D},$$

cette substitution étant une des substitutions du groupe dont il a été parlé précédemment, et deux cas vont être à distinguer, suivant que cette substitution est hyperbolique ou elliptique.

3. Supposons d'abord que la substitution (A, B, C, D) soit hyperbolique. On a alors $(A + D)^2 > 4$. On peut alors, comme il est bien connu, trouver cinq quantités réelles α, β, γ, δ et k, telles que $\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}$ se reproduise multiplié par k après un tour complet de z autour du point a.

k est d'ailleurs une constante positive différente de l'unité; désignons par μ son logarithme arithmétique. Le quotient

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} : (z - a)^{\frac{\mu}{2\pi}}$$

reprend par suite la même valeur après un tour complet, et l'on peut écrire

$$\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u}=(z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}}\varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ étant uniforme dans le domaine D; $\varphi(z)$ n'aura dans ce domaine d'autre point singulier que le point a, car le dénominateur $\gamma+\delta u$ **ne peut** jamais devenir nul, **puisque** γ **et** δ sont **réels. De** plus $\varphi(z)$ ne s'annulera jamais, puisque $\alpha+\beta u$ ne peut s'annuler; par suite, le quotient $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est uniforme et continu dans D à l'exception de a. On peut alors écrire

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\ldots-\frac{A_2}{(z-a)^2}+\frac{A_1}{z-a}+A+B(z-a)+\ldots,$$

série double procédant suivant les puissances croissantes de $z-a$. En intégrant, on voit de suite que A_1 doit être un entier m positif ou négatif, puisque $\varphi(z)$ est uniforme; on a donc

$$\varphi(z)=(z-a)^m e^{f(z)},$$

$f(z)$ étant uniforme dans D et continue à l'exception du point a. En résumé, nous obtenons

$$\frac{\alpha-\beta u}{\gamma+\delta u}=(z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}+m}e^{f(z)}.$$

Or le coefficient de i dans le premier membre a un signe invariable, puisque dans u le coefficient de i est toujours positif; nous allons montrer que le coefficient de i dans le second membre ne peut avoir un signe constant; écrivons à cet effet

$$(z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}+m}e^{f(z)}=e^{\left(\frac{\mu}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+f(z)}.$$

Si dans cette expression le coefficient de i a toujours le même signe, le signe $+$ pour fixer les idées, le coefficient de i dans

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+f(z)$$

devra rester compris entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$, c'est-à-dire entre deux limites fixes.

Posons

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+f(z)=U+iV.$$

Il est tout d'abord évident que, si m n'est pas nul, V ne peut rester entre deux limites fixes, car une rotation autour du point a augmente V de $2m\pi$.

Supposons donc $m=0$; l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\log(z-a)+\frac{2\pi i}{\mu}f(z)=-\frac{2\pi V}{\mu}+\frac{2\pi i U}{\mu},$$

ou

$$(z-a)e^{\frac{2\pi i}{\mu}f(z)}=e^{-\frac{2\pi V}{\mu}}e^{\frac{2\pi i U}{\mu}}.$$

Mais le module du second membre reste compris entre deux limites déterminées, tandis que le premier peut devenir aussi petit que l'on veut, que $f(z)$ soit continue ou non au point $z=a$.

Il résulte de la contradiction que nous venons de rencontrer que la substitution (A, B, C, D) ne peut être hyperbolique.

4. Supposons maintenant que la substitution soit elliptique. Nous avons dans ce cas

$$(A+D)^2<4.$$

On pourra encore trouver quatre quantités α, β, γ, δ et k telles que $\frac{\alpha+\beta u}{\alpha+\delta u}$ se reproduise multiplié par k après un tour de z autour de a; mais ici ces quantités ne sont plus réelles. On a pour déterminer le rapport de γ à δ l'équation du second degré

$$B\delta^2+(D-A)\delta\gamma-C\gamma^2=0,$$

et pareillement

$$B\beta^2+(D-A)\beta\alpha-C\alpha^2=0;$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ sont donc racines de l'équation du second degré

$$B+(D-A)x-Cx^2=0,$$

dont les racines sont imaginaires, puisque

$$(A+D)^2<4 \quad \text{et} \quad AD-BC=1.$$

Nous prendrons pour $\frac{\alpha}{\beta}$ la racine dans laquelle le coefficient de i est négatif, et par suite dans $\frac{\gamma}{\delta}$ le coefficient de i sera positif.

Quant au multiplicateur k, il est nécessairement une racine de l'unité, sans quoi le groupe dont fait partie la substitution (A, B, C, D) ne serait pas un groupe discontinu; nous poserons donc $k = e^{\frac{2m\pi i}{n}}$, m et n étant positifs et premiers entre eux.

Ceci posé, considérons le quotient

$$\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u} : (z-a)^{\frac{m}{n}};$$

ce quotient sera une fonction uniforme dans le domaine D.

Écrivons donc

$$\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u} = (z-a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z).$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, le coefficient de i dans $-\frac{\gamma}{\delta}$ est négatif, tandis qu'il est positif dans $-\frac{\alpha}{\beta}$. Le dénominateur $\gamma+\delta u$ ne peut donc s'annuler, puisque dans u le coefficient de i est toujours positif; il y a plus, le module du premier membre reste toujours inférieur à une limite qu'il serait facile d'assigner. On en conclut que le point $z=a$ ne peut être un point singulier essentiel pour $\varphi(z)$. Ce point est donc un pôle ou un point ordinaire pour la fonction φ; dans ces conditions, l'expression

$$(z-a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z),$$

n étant plus grand que 1 et m étant premier à n, ne peut que tendre vers zéro ou augmenter indéfiniment quand z tend vers a; la seconde supposition étant, d'après ce qui précède, inadmissible, cette expression a la valeur zéro pour $z=a$. Nous arrivons donc à cette conclusion:

De quelque manière que z tende vers le point a, la fonction u tend vers $-\frac{\alpha}{\beta}$. Or, pour $u = -\frac{\alpha}{\beta}$, la fonction fuchsienne x de u, définie par la relation (§ 1)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u,$$

possède une valeur parfaitement déterminée; donc, de quelque manière que z tende vers a, la fonction $x = \mathrm{P}(z)$ tend vers une valeur déterminée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que le point a est un point singulier essentiel de $P(z)$.

La substitution (A, B, C, D) ne peut donc être elliptique; or, comme le groupe ne renferme que des substitutions elliptiques et hyperboliques, il ne nous reste plus qu'à supposer que la fonction u de z est uniforme dans le voisinage de a.

5. L'examen de ce cas sera bien facile. On aurait alors

$$u = A(z) + B(z),$$

où

$$A(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots,$$

$$B(z) = \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \ldots.$$

$B(z)$ doit être nulle, sinon le coefficient de i dans la fonction u aurait un signe variable. On a donc

$$u = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots.$$

Dans la constante A_0, le coefficient de i doit être différent de zéro et positif; il ne peut, en effet, être nul, car alors le coefficient de i dans u serait le même que dans

$$A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,$$

et ce dernier dans le voisinage de $z = a$ n'a évidemment pas un signe constant.

On voit donc que, quand z tend vers a, u tend vers une valeur A_0 dans laquelle le coefficient de i est différent de zéro et positif. En raisonnant comme plus haut, nous en concluons que, pour $z = a$, la fonction $P(z)$ a une valeur parfaitement déterminée.

L'hypothèse faite que le genre de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

est supérieur à l'unité est donc inadmissible, puisqu'elle nous conduit à cette contradiction que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ne sont pas des points singuliers essentiels de* $P(z)$. La proposition énoncée est complètement établie.

6. Dans le cas (¹) où les fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ n'ont qu'un seul point singulier essentiel que nous pouvons supposer être le point ∞, la démonstration est immédiate. En substituant, en effet, dans u à la place de x la fonction $P(z)$, on obtient une fonction $u(z)$ uniforme et continue dans tout le plan; d'ailleurs dans $u(z)$ le coefficient de i est toujours positif; par conséquent la fonction $e^{iu(z)}$, uniforme et continue dans tout le plan, a un module toujours moindre que *un*, ce qui est impossible.

7. Cherchons maintenant la forme générale de deux fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ ayant les points singuliers essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et liées par la relation algébrique

$$f(x, y) = 0.$$

Cette relation sera, d'après ce qui précède, du genre zéro ou du genre un.

Dans le premier cas, on pourra exprimer x et y rationnellement en fonction d'un paramètre λ, et cela de telle manière qu'à un système de valeurs ne corresponde en général qu'une valeur de λ.

On aura alors

$$x = F(\lambda), \quad y = F_1(\lambda) \quad \text{et} \quad \lambda = \varphi(x, y),$$

F, F_1 et φ étant des fonctions rationnelles : en remplaçant x et y par $P(z)$ et $Q(z)$, λ sera une fonction $R(z)$ ayant les points singuliers essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et l'on a

$$x = F[R(z)], \quad y = F_1[R(z)].$$

Supposons, en second lieu, que la relation algébrique soit du genre un. Considérons l'intégrale abélienne de première espèce correspondant à cette relation

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)},$$

(¹) Ce cas est celui que j'ai considéré dans le travail rappelé au début; pour être rendue entièrement rigoureuse, la démonstration qui s'y trouve indiquée aurait besoin d'être complétée. J'avais donné auparavant une démonstration à l'abri de toute objection, en supposant que la relation entre x et y était hyperelliptique (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, juillet 1880).

et faisons, dans l'expression

$$\frac{F(x, y)\,\frac{dx}{dz}}{f'_y(x, y)},$$

$x = P(z)$ et $y = Q(z)$; nous aurons une fonction uniforme de z et continue pour toute valeur de z distincte de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cette expression aura donc les seuls points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et nous pouvons alors écrire

$$\frac{F(x, y)\,\frac{dx}{dz}}{f'_y(x, y)} = \sum_{p=1}^{p=n} G_p\left(\frac{1}{z - a_p}\right),$$

en désignant par $G_p(z)$ une fonction entière de z. Multiplions par dz les deux membres de cette relation et intégrons, il vient

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)} = \sum_{p=1}^{p=n} G_p\left(\frac{1}{z - a_p}\right) + \sum_{p=1}^{p=n} A_p \log(z - a_p) + Bz,$$

en désignant par les mêmes lettres G de nouvelles fonctions entières, les B et A étant des constantes. Or l'équation

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F\,dx}{f'_y} = u$$

donne $x = \varphi(u)$, φ étant une fonction uniforme doublement périodique de u; on a donc

$$x = \varphi\left[Bz + \sum_{p=1}^{p=n} A_p \log(z - a_p) + R(z)\right],$$

$R(z)$ n'ayant d'autres points singuliers (pôles ou points essentiels) que $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

x devant être une fonction uniforme de z, on aura, en désignant par ω et ω' les périodes de φ,

$$2\pi i A_p = m_p \omega + n_p \omega' \quad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

les m et n étant des entiers. D'autre part, le point $z = \infty$ étant un point ordinaire pour la fonction x, on aura

$$B = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{p=n} A_p = 0,$$

et nous avons, en résumé,

$$x = \varphi\left[R(z) + \sum_{p=1}^{p=n} A_p \log(z - a_p)\right],$$

$$y = \varphi_1\left[R(z) + \sum_{p=1}^{p=n} A_p \log(z - a_p)\right],$$

φ et φ_1 étant des fonctions doublement périodiques aux périodes ω et ω'.