BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

J. TANNERY

Sur une décomposition en carrés

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 103-106
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_103_1>

G. D.

MÉLANGES.

SUR UNE DÉCOMPOSITION EN CARRÉS;

PAR M. J. TANNERY.

I. *Soient*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0, \quad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0$$

les équations de trois plans perpendiculaires deux à deux; si l'on fait

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z) &= (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) \\ &= x^2(px + p'y + p''z) + y^2(q''x + qy + q'z) \\ &\quad + z^2(r'x + r''y + rz) + hxyz, \end{aligned}\right.$$

on aura identiquement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) \\ &\quad = 6(p^2 + q^2 + r^2) + 2(p'^2 + q'^2 + r'^2 + p''^2 + q''^2 + r''^2) + h^2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on considère en effet les expressions des coefficients p, p', ..., qui résultent de l'égalité (1), et si l'on désigne par p_2,

$p'_2, \ldots$ ce que deviennent ces quantités quand on y remplace α, $\beta, \ldots$ par $\alpha^2, \beta^2, \ldots$, on aura évidemment

$$(3) \qquad K = p_2 + q_2 + r_2 + p'_2 + q'_2 + r'_2 + p''_2 + q''_2 + r''_2 + h_2,$$

où K désigne le premier membre de l'égalité (2); d'ailleurs, on obtient de suite les égalités suivantes :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} p_2 = p^2, \quad q_2 = q^2, \quad r_2 = r^2, & \\ p'_2 = p'^2 - 2pq'', & p''_2 = p''^2 - 2pr', \\ q'_2 = q'^2 - 2qr'', & q''_2 = q''^2 - 2qp', \\ r'_2 = r'^2 - 2rp'', & r''_2 = r''^2 - 2rq', \\ \delta^2 = h_2 + 2M - 2N, & \\ h^2 = h_2 + 2M + 2N; & \end{array} \right.$$

dans les deux dernières égalités, δ désigne le déterminant

$$\Sigma \pm \alpha\beta'\gamma'',$$

$2M$ représente l'ensemble des six doubles produits qui, dans le carré de ce déterminant, figurent avec le signe $+$, et $-2N$, l'ensemble des neuf doubles produits qui, dans ce même carré, figurent avec le signe $-$; ces quantités N et M sont liées aux coefficients de $f(x, y, z)$ par la relation

$$(5) \qquad N + 3M = r'q'' + p'r'' + q'p'';$$

des équations (3), (4) et (5) on tire

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} 3K - \delta^2 = {} & 3(p^2 + q^2 + r^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2 + p''^2 + q''^2 + r''^2) \\ & - 6[p(q'' + r') + q(r'' + p') + r(p'' + q')] \\ & + 2h^2 - 2(r'q'' + p'r'' + q'p''). \end{aligned} \right.$$

Jusqu'ici on n'a pas supposé que les plans fussent rectangulaires; cette supposition entraîne les égalités

$$\begin{aligned} 3p + q'' + r' &= 0, \\ 3q + r'' + p' &= 0, \\ 3r + p'' + q' &= 0, \\ \delta^2 &= K; \end{aligned}$$

les trois premières égalités permettent de faire disparaître du second membre de l'égalité (6) tous les doubles produits : on parvient ainsi soit à l'égalité (2) que j'avais en vue, soit à l'égalité équivalente

$$(2\ bis)\quad K = 15(p^2 + q^2 + r^2) + h^2 + (q'' - r')^2 + (r'' - p')^2 + (p'' - q')^2.$$

Ces identités offrent ceci d'intéressant, qu'elles conduisent immédiatement à la décomposition en carrés du discriminant de l'équation du troisième degré que l'on rencontre dans la théorie des plans principaux des surfaces du troisième degré. Cette décomposition a été effectuée, comme on sait, par M. Kummer; Borchardt, pour l'équation aux inégalités séculaires de degré quelconque, a, de même, décomposé en carrés l'ensemble des fonctions qui, par leur caractère positif, assurent la réalité des racines d'une telle équation; sa belle analyse épuise, en quelque sorte, la question au point de vue analytique; toutefois, il semble qu'il y ait encore quelque intérêt à relier la formule de décomposition de M. Kummer à des considérations géométriques qui se présentent naturellement dans la théorie des surfaces du second degré.

Soit

$$\varphi(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation d'un cône du second degré, et soit

$$\Phi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

la forme adjointe de la fonction $\varphi(x, y, z)$: on reconnaît de suite que l'équation du troisième degré qui représente l'ensemble des trois plans principaux du cône considéré s'obtient en éliminant α, β, γ entre les trois opérations

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y \ + \gamma z \ &= 0, \\ \alpha\varphi'_x + \beta\varphi'_y + \gamma\varphi'_z &= 0, \\ \alpha\Phi'_x + \beta\Phi'_y + \gamma\Phi'_z &= 0. \end{aligned}$$

On peut représenter le résultat de l'élimination par

$$f(x, y, z) = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} p &= b''B' - b'B'', \quad \ldots, \\ p' &= B'(a' - a) - b'(A' - A) - (bB'' - b''B), \\ p'' &= B''(a - a'') - b''(A - A'') - (b'B - bB'), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h &= a'A'' + a''A + aA' - a''A' - aA'' - a'A. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si, étant donnée une fonction quelconque F des coefficients a, a', a'', b, b', b'', on désigne par F_s ce que devient cette fonction quand on y remplace a, a', a'' par $a-s$, $a'-s$, $a''-s$; si enfin on désigne par s_1, s_2, s_3 les trois racines de l'équation

$$\begin{aligned}\Delta_s = (a-s)(a'-s)(a''-s)-(a-s)b^2\\ -(a'-s)b'^2-(a''-s)b''^2+2bb'b''=0,\end{aligned}$$

les équations des trois plans principaux du cône seront respectivement

$$\begin{aligned}X &= x\sqrt{A_{s_1}}+y\sqrt{A'_{s_1}}+z\sqrt{A''_{s_1}}=0,\\ Y &= x\sqrt{A_{s_2}}+y\sqrt{A'_{s_2}}+z\sqrt{A''_{s_2}}=0,\\ Z &= x\sqrt{A_{s_3}}+y\sqrt{A'_{s_3}}+z\sqrt{A''_{s_3}}=0,\end{aligned}$$

pourvu que l'on prenne les signes des radicaux de manière à satisfaire aux équations

$$\sqrt{A'_{s_1}}\sqrt{A''_{s_1}} = B_{s_1}, \quad \ldots.$$

Le produit XYZ sera donc égal à $f(x, y, z)$, à un facteur près, indépendant des quantités x, y, z; on reconnaît sans peine, en formant directement, par exemple, le coefficient de x^3, que ce facteur est égal à ± 1. En appliquant les formules (2) ou (2 *bis*), on obtiendra donc une décomposition en carrés du discriminant

$$K = (A_{s_1}+A'_{s_1}+A''_{s_1})(A_{s_2}+A'_{s_2}+A''_{s_2})(A_{s_3}+A'_{s_3}+A''_{s_3})$$

de l'équation $\Delta_s = 0$; l'application de la formule (2 *bis*) conduit à la décomposition de M. Kummer :

$$\begin{aligned}K = 15[(b''B'-b'B'')^2+(bB''-b''B)^2+(b'B-bB')^2]\\ +[B(a'+a''-2a)-b(A'+A''-2A)]^2\\ +[B'(a''+a-2a')-b'(A''+A-2A')]^2\\ +[B''(a+a'-2a'')-b''(A+A'-2A'')]^2\\ +(a'A''+a''A+aA'-a''A'-aA''-a'A)^2.\end{aligned}$$