BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications académiques et périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 2 (1882), p. 5-292
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_2_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE (¹).

Tome IX; 1880. 2ᵉ série.

Sainte-Claire Deville et *Mascart*. — Sur la construction de la règle géodésique internationale. (9-20).

Cornu (*A*.). — Sur le spectre normal du Soleil, partie ultra-violette. (21-106).

André (*D*.). — Développements par rapport au module des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances. (107-118).

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
\lambda^{2p+1}(x) &= C_0^{(p)} + C_1^{(p)}k^2 + C_2^{(p)}k^4 + C_3^{(p)}k^6 + \ldots,\\
\lambda^{2p}(x) &= D_0^{(p)} + D_1^{(p)}k^2 + D_2^{(p)}k^4 + D_3^{(p)}k^6 + \ldots,\\
\mu^{2p+1}(x) &= E_0^{(p)} + E_1^{(p)}k^2 + E_2^{(p)}k^4 + E_3^{(p)}k^6 + \ldots,\\
\mu^{2p}(x) &= F_0^{(p)} + F_1^{(p)}k^2 + F_2^{(p)}k^4 + F_3^{(p)}k^6 + \ldots,
\end{aligned}$$

(¹) Voir *Bulletin*, IV_2, p. 16.

on aura

$$C_n^{(p)} = \sum G_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum H_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

$$D_n^{(p)} = \sum G_{i,j} x^{2i} \cos 2jx \qquad + \sum H_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

$$E_n^{(p)} = \sum G_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum H_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

$$F_n^{(p)} = \sum G_{i,j} x^{2i} \cos 2jx \qquad + \sum H_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

dans chacune desquelles on désigne par $G_{i,j}$ et $H_{i,j}$ des coefficients indépendants de x, par i et j des entiers quelconques, non négatifs, et dans chacune desquelles on étend le premier $\sum$ à tous les systèmes de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i \leqq n, \quad 2i + j \geqq n + p,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i + 1 \leqq n, \quad 2i + 1 + j \leqq n + p.$$

Appell (P.). — Sur une classe de polynômes. (119-144).

L'auteur s'occupe des polynômes en x, formant une suite $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, telle que l'on ait

$$\frac{dA_n}{dx} = n A_{n-1},$$

polynômes dont la forme générale est

$$A_n = \alpha_n + \frac{n}{1} \alpha_{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha_{n-2} x^2 + \ldots + \frac{n}{1} \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_0 x^n,$$

les α étant arbitraires; dans chaque polynôme figure un de ces coefficients, qui n'entrait pas dans les précédents.

Si l'on considère le développement

$$a(h) = \alpha_0 + \frac{h}{1} \alpha_1 + \frac{h^2}{1.2} \alpha_2 + \ldots,$$

le produit $a(h)e^{hx}$ sera de la forme

$$A_0 + \frac{h}{1} A_1 + \frac{h^2}{1.2} A_2 + \ldots,$$

d'où le nom de *fonction génératrice* des polynômes $A_0, A_1, \ldots$, donné par M. Appell à la fonction $a(h)$.

Si l'on considère deux séries de polynômes

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots,$$
$$B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots,$$

la série de polynômes dont le terme général est $\lambda A_n + \mu B_n$, où λ, μ désignent des constantes, jouit de la propriété fondamentale : elle a pour fraction génératrice $\lambda a(h) + \mu b(h)$.

Si dans le polynôme A_n on remplace $x^0, x^1, \ldots, x^n$ respectivement par $B_0, B_1, \ldots, B_n$, on obtiendra un polynôme $(AB)_n$; la suite des polynômes dont $(AB)_n$ est le terme général jouit encore de la propriété fondamentale, et la fonction génératrice de cette suite est $a(h)\,b(h)$; on en conclut

$$(AB)_n = (BA)_n.$$

Cette propriété s'étend évidemment à un produit symbolique d'autant de facteurs qu'on veut et conduit à la notion des puissances entières symboliques. L'opération inverse de la multiplication conduit à la notion de division symbolique; ainsi les polynômes B, tels que

$$(AB)_n = x^n,$$

ont pour fonction génératrice $\frac{1}{a(h)}$, et on peut les représenter par $\frac{1}{A}$ ou par A^{-1} : par exemple, les polynômes B, inverses des polynômes A, qui ont pour fonction génératrice $1 - h$, sont donnés par la formule

$$B_n = 1.2\ldots n\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right);$$

la considération des polynômes inverses $(P^{-1})_n$ des polynômes P_n, ayant pour fonction génératrice e^{-h^2}, conduit à la formule

$$(P^m)_n = m^{\frac{n}{2}} P_n\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right),$$

où m est un nombre quelconque entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

En désignant par $(d^k A)_n$ les polynômes qui ont pour fonction génératrice $\frac{d^k a(h)}{dh^k}$, on a

$$(d^k A)_n = A_{n+k} - \frac{k}{1} x A_{n+k-1} - \frac{k(k-1)}{1.2} x^2 A_{n+k-2}.$$

Dans le second membre, tous les termes en x de degré supérieur à n se détruisent.

Lorsque la fonction $a(h)$ satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes en h, on en déduira facilement, en vertu de ce qui précède, une relation linéaire entre un certain nombre de polynômes A, (dA), (d^2A), que l'on pourra ensuite transformer en une relation linéaire par rapport aux polynômes A; enfin cette dernière relation permettra de former une équation différentielle linéaire à laquelle devra satisfaire le polynôme A_n. Ainsi les polynômes Q ayant pour fonction génératrice la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, h)$ conduisent à l'équation différentielle

$$x^2 \frac{d^3 Q_n}{dx^3} - x(x + a + 2n - 4)\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + [(n-1)(2x + a + n - 2) + \gamma x + b]\frac{dQ_n}{dx} - n(n + \gamma - 1)Q_n = 0,$$

où

$$a = \alpha + \beta + 1, \quad b = \alpha\beta.$$

Les polynômes $(d^{-1}A)$ ayant pour fonction génératrice $\int a(h)\,dh$ sont donnés par la formule

$$(d^{-1}A)_n = x^n(d^{-1}A)_0 + A_{n-1} + xA_{n-2} + \ldots + x^{n-1}A_0.$$

Si l'on a formé le polynôme inverse $(A^{-1})_n$ du polynôme A_n et que l'on ait

$$(A^{-1})_n = \lambda_0 x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n,$$

la définition même des polynômes inverses donne

$$x^n = \lambda_0 A_n + \lambda_1 A_{n-1} + \ldots + \lambda_n A_0,$$

d'où le moyen de développer un polynôme entier en x en une série procédant suivant les puissances entières et positives de x, suivant ces polynômes : citons, par exemple, la formule

$$\cos x = \frac{1}{e}\left[P_0 - \frac{P_2}{1.2} + \frac{P_4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^n \frac{P_{2n}}{1.2.3.4} + \ldots\right],$$

où le développement procède suivant les polynômes P, déjà considérés, qui ont pour fonction génératrice e^{-h^2}.

Étant donnée une série $F(x)$ procédant suivant les puissances entières et positives de x, si l'on y remplace partout x^n par le polynôme A_n, on obtient ainsi une nouvelle série qui, si elle est convergente, définit une fonction que M. Appell désigne par $F(A)$.

Si $F(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients constants, $F(A)$ satisfait à la même équation. Supposant ensuite que $F(x)$ satisfasse à une équation différentielle linéaire, dont les coefficients et le second membre sont respectivement des polynômes entiers en x et une série $\varphi(x)$ procédant suivant les puissances entières et positives de x, l'auteur traite particulièrement le cas où l'on considère des développements qui procèdent suivant les polynômes P définis plus haut : la même marche conduit au but toutes les fois qu'on a affaire à des polynômes tels qu'un certain nombre de polynômes consécutifs soient liés par une relation linéaire.

Le premier membre de l'équation différentielle que vérifie la fonction $y = F(x)$ est une somme de termes de la forme

$$x^p \frac{d^q y}{dx^q},$$

multipliés par des coefficients constants.

Or, en supposant la série $z = F(P)$ convergente, on reconnaît aisément qu'il existe une fonction linéaire de z et de ses dérivées successives, fonction dont les coefficients sont des polynômes entiers en x, telle que, en y remplaçant z par $F(P)$ et ordonnant suivant les polynômes P, on tombe sur une série dans laquelle le coefficient de P_n soit le même que le coefficient de x^n dans la série obtenue en remplaçant, dans $x^p \frac{d^q y}{dx^q}$, y par $F(x)$; la fonction $z = F(P)$ vérifiera donc une équation différentielle linéaire dont le premier membre se déduit du premier membre de l'équation différentielle linéaire que vérifie la fonction $y = F(x)$ et dont le second membre est $\varphi(P)$.

Ainsi de l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0,$$

que vérifie le polynôme $y=\cos n(\operatorname{arc}\cos x)$, on déduit l'équation

$$4\frac{d^4z}{dx^4}-4x\frac{d^3z}{dx^3}+(x^2-5)\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}-n^2z=0,$$

que vérifie le polynôme

$$z=\cos n(\operatorname{arc}\cos P).$$

Enfin, M. Appell termine par quelques remarques sur ce que deviennent les polynômes considérés lorsque n augmente indéfiniment.

Picard (É.). — Mémoire sur les fonctions entières. (145-166).

L'objet principal de l'important travail de M. Picard est la démonstration de deux théorèmes généraux sur les fonctions entières (au sens de M. Weierstrasss).

1° Il ne peut y avoir plus d'une valeur finie que ne puisse prendre pour une valeur finie de la variable une fonction entière.

2° Il ne peut y avoir plus d'une valeur finie a pour laquelle l'équation $G(z)=a$, $G(z)$ étant une fonction entière, ait seulement un nombre limité de racines, à moins que $G(z)$ ne soit un polynôme.

I. La démonstration repose sur la considération de la fonction

$$\omega=\frac{K'i}{K},$$

où K' et K ont le sens habituel dans la théorie des fonctions elliptiques; ω est regardé comme une fonction de la variable $x=k^2$; l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfont K et K' permet de définir ces quantités dans tout le plan; ω n'admet que les points critiques 0, 1, ∞; dans toute région à contour simple qui n'enferme aucun de ces points, c'est une fonction uniforme et continue de x; si on la met sous la forme ordinaire des quantités imaginaires, le coefficient de i n'est jamais négatif; on en conclut aisément que ce coefficient n'est jamais nul, en dehors des points critiques.

Ceci posé, si la fonction entière $G(z)$ ne peut prendre ni la valeur $a=0$, ni la valeur $b=1$, cette fonction est une constante; en effet, si l'on pose $x=G(z)$, ω devient une fonction de z; si l'on fait décrire à z un chemin fermé, partant de z_0 et y revenant, x décrira un chemin fermé que l'on pourra réduire par des déformations continues au point $x_0=G(z_0)$, et cela sans passer par le point 0 ou par le point 1, puisque la fonction $G(z)$ ne peut atteindre ni la valeur 0 ni la valeur 1.

Si maintenant, z allant du point z_0 au point z_1 par différents chemins, ω, partant toujours d'une détermination ω_0 qui corresponde à $x_0=G(z_0)$, arrivera toujours en z_1 avec la même valeur ω_1; en sorte qu'on peut regarder ω comme une fonction entière de z. Soit $f(z)$ cette fonction; la fonction entière $e^{if(z)}$ aurait son module constamment moindre que 1, puisque le coefficient de i dans ω est constamment positif: $f(z)$ ou $\omega[G(z)]$, est donc une constante; il en est de même de $G(z)$.

M. Picard déduit de là qu'une fonction uniforme n'admettant pas d'autres points singuliers que des pôles et qui ne peut prendre ni la valeur a ni la valeur b, peut prendre toute autre valeur c; il suit en effet des principes posés par M. Weierstrass qu'une telle fonction peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{ae^{Q(z)} - be^{P(z)}}{e^{Q(z)} - e^{P(z)}},$$

$P(z)$, $Q(z)$ désignant des fonctions entières de z : l'équation

$$f(z) = c$$

équivaut donc à une équation de la forme

$$Q(z) - P(z) = \log\frac{b-c}{a-c} + 2m\pi i;$$

mais, le second membre pouvant prendre une infinité de valeurs, il est clair, d'après le théorème précédent, que cette équation peut être vérifiée.

Enfin, la même proposition fournit une démonstration immédiate du théorème fondamental de l'Algèbre.

L'auteur donne ensuite une expression, valable pour tous les points du plan, d'une fonction n'ayant que les trois points critiques 0, 1, ∞.

II. Pour la démonstration du second théorème général, M. Picard se sert de la transcendante $\nu(\omega)$ définie par les deux équations

$$\omega = \frac{K'i}{K}, \quad \nu = \frac{4}{27}\,\frac{(x+\varepsilon)^3(x+\varepsilon^2)^3}{x^2(1-x)^2},$$

où $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; cette transcendante a été étudiée, à divers points de vue, par M. Hermite et par M. Dedekind. La quantité ν, regardée comme fonction de ω, n'est définie que dans une moitié du plan, où elle est uniforme; elle reprend la même valeur pour deux nombres ω et ω_0, liés par la relation

$$\omega = \frac{\nu + \rho\omega_0}{\lambda + \mu\omega_0},$$

où les entiers réels λ, μ, ν, ρ vérifient l'équation

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1.$$

Si l'on regarde ω comme une fonction de ν, on aura comme points critiques les seuls points 0, 1, ∞; le coefficient de i dans ω sera toujours positif; à chaque valeur de ν correspondront une infinité de valeurs de ω liées entre elles par la relation précédente.

Si maintenant les équations

$$G(z) = 0, \quad G(z) = 1$$

avaient un nombre fini de racines, la fonction ω de ν, où l'on remplacerait ν par $G(z)$, deviendrait une fonction $F(z)$ dont les points critiques, autres que le point ∞, étant en nombre fini, pourraient être enfermés à l'intérieur d'un cercle c dont l'origine serait le centre : c'est par une étude approfondie de la fonction

$\omega = F(z)$ ou plutôt de la fonction

$$\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega},$$

à l'extérieur du cercle c, que M. Picard atteint son but : α, β, γ, δ sont des constantes telles que, la variable z ayant fait le tour du cercle et la fonction $F(z)$, pour laquelle on prend tout d'abord une détermination ω, ayant, par suite de la révolution de la variable z, pris la détermination

$$\frac{\nu + \rho\omega}{\lambda + \mu\omega},$$

l'expression

$$\frac{\alpha + \beta F(z)}{\gamma + \delta F(z)}$$

prenne la détermination

$$\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega} \times k,$$

k étant une constante; les constantes α, β, γ, δ, k étant déterminées, il est aisé de former une fonction qui, après une révolution de z autour de c, reprenne la même valeur; l'examen des différents cas conduit toujours à des conclusions inadmissibles (telles, par exemple, que la variation de signe du coefficient de i dans ω), sauf dans le cas où l'on aurait

$$(\lambda + \rho)^2 = 4;$$

dans ce cas, on peut déterminer des entiers α, β, γ, δ, M tels que $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$ et que $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega}$ se change, après une révolution de la variable z, en $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega} + M$. M. Picard parvient alors à établir que le module de $G(z)$ augmente indéfiniment de quelque façon que z se rapproche du point ∞, et cela suffit à prouver que $G(z)$ est un polynôme : c'est ce qui avait été annoncé.

L'auteur termine en montrant comment cette proposition permet de compléter l'étude faite par M. Weierstrass d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel; il établit qu'il existe dans ce voisinage une infinité de valeurs de la variable pour laquelle cette fonction prend telle valeur a qu'on veut; il peut toutefois y avoir exception pour deux valeurs de a.

Elliot. — Sur la transformation des intégrales abéliennes. (107-186).

I. *Transformations réversibles.* — Étant donnée l'équation irréductible

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

à chaque point (x, y) de la courbe définie par cette équation, on fait correspondre un point (x_1, y_1) par les formules suivantes

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \\ y_1 &= \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où M, N, P, Q désignent des polynômes quelconques. A une *solution analytique*

(x, y) correspond toujours un seul point (x_1, y_1), une solution analytique étant définie non seulement par les valeurs de x et y pour le point considéré, mais par le développement en série de y pour la branche considérée qui passe par ce point.

M. Elliot montre comment on peut parvenir à l'équation *irréductible*

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \tag{3}$$

de la courbe lieu des points x_1, y_1.

Pour une solution quelconque de l'équation (3), les équations (2) n'auront, en général, qu'une solution commune en x, y; à cette condition, qui n'exclut pas la possibilité de plusieurs solutions communes pour certains points particuliers (x_1, y_1) de la courbe (2), la transformation sera réversible et l'on pourra exprimer x, y rationnellement en x_1, y_1.

II. *Transformations rationnelles quelconques.* — Si, dans l'équation (1), on remplace x, y par les valeurs

$$x = \frac{M_1(x_1, y_1)}{N_1(x_1, y_1)}, \quad y = \frac{P_1(x_1, y_1)}{Q_1(x_1, y_1)}, \tag{4}$$

où M_1, N_1, P_1, Q_1 sont des polynômes quelconques en x_1, y_1, on tombera sur un résultat de la forme

$$f\left(\frac{M_1}{N_1}, \frac{P_1}{Q_1}\right) = \frac{F(x_1, y_1)}{N_1^\alpha Q_1^\beta}.$$

Pour toute solution (x, y) de l'équation (1), les équations (4) ont une ou plusieurs solutions dont l'ensemble constitue la courbe transformée; si, pour une solution (x, y), les équations (4) avaient une infinité de solutions, celles-ci appartiendraient à une courbe qui aurait le premier membre de son équation en facteur dans l'équation transformée : soit f_1 le quotient de F par ces facteurs, qui donnent des courbes répondant à des points particuliers de $f = 0$; $f_1 = 0$ sera l'équation de la courbe transformée : l'auteur montre que, si cette dernière courbe se décompose en plusieurs autres, chacune d'elles peut être regardée comme la transformée de la courbe (1), ou, en d'autres termes, comme décrite par un ou plusieurs points x_1, y_1 quand le point x, y décrit la courbe (1); pour qu'on ait affaire à une transformation réversible, il faut ainsi que la courbe $f_1 = 0$ se décompose en d'autres courbes dont l'une soit décrite par *une seule* des solutions des équations (4).

III. Transformation des intégrales algébriques.

L'auteur montre comment les notions qui précèdent permettent de préciser le sens d'une telle transformation. Il traite en particulier le cas des intégrales de première espèce mises sous la forme

$$\int \frac{\varphi(x, y)\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}};$$

ces intégrales, par une transformation rationnelle, doivent rester de première espèce, et, en effet, M. Elliot montre comment, après la transformation, on retombe sur la même forme. On n'obtient d'ailleurs, par ce procédé, *toutes* les intégrales de première espèce, que si la transformation est réversible.

Enfin l'auteur applique ces résultats au cas où l'équation (1) est de la forme

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D;$$

on obtient alors un résultat analogue au théorème de Jacobi sur la transformation des intégrales elliptiques; la courbe étant du genre 1, il n'y a qu'une seule intégrale de première espèce, à savoir

$$\int \frac{dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{2}{3}}}.$$

Si l'on fait la transformation $y = y_1$, $x = \frac{U_1}{V_1}$, et que l'on détermine les polynômes U_1 et V_1 de telle façon que l'on ait

$$AU_1^3 + BU_1^2V_1 + CU_1V_1^2 + DV_1^3 = P_1^3 Q_1,$$

P_1, Q_1 étant des polynômes dont le second est du troisième degré, on aura

$$\int \frac{dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{2}{3}}} = k \int \frac{dx_1}{Q_1^{\frac{2}{3}}},$$

k étant une constante.

Mathieu (É.). — Réflexions sur les principes mathématiques de l'électrodynamique. (187-208).

Admettant, dans les mouvements accomplis par les actions des courants, les principes suivants :

I. Le principe de la conservation vive;

II. Le principe de la réaction égale et directement opposée à l'action;

III. La supposition que les actions mutuelles de deux éléments de courants parallèles, de même sens et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux, varient en raison inverse du carré de cette distance.

IV. La supposition que les actions mutuelles entre deux éléments de courants linéaires, donnés en intensité et en position, ne varient pas avec leurs courbures.

M. Mathieu parvient aux résultats suivants :

Si l'on suppose que chaque courant soit formé par deux mouvements égaux et opposés des deux électricités positive et négative, l'action entre deux molécules de fluide se compose de deux parties : l'une qui donne la force trouvée par Weber, et l'autre qui renferme une fonction arbitraire. Mais cette seconde partie disparaît dans l'action de deux éléments de courants, qui se trouve être celle que donne la loi d'Ampère.

Ensuite, par la condition qu'un courant fermé et constant soit sans action sur de l'électricité statique, la loi de Weber se trouve avoir lieu nécessairement.

Si l'on suppose l'électricité positive seule en mouvement et une même quantité d'électricité négative fixée au corps conducteur, on trouve pareillement que deux molécules électriques ne peuvent agir l'une sur l'autre que suivant la loi de Weber, et deux éléments de courants que suivant la loi d'Ampère. Toutefois, d'après cette théorie, un courant fermé constant agirait sur de l'électricité statique, à moins qu'on n'admette que l'action de l'électricité de courant sur de l'électricité statique ne peut pas se déduire de l'action de l'électricité de courant sur une pareille électricité : ce qui est peu vraisemblable.

Les principes I, II, III paraissent incontestables à l'auteur; le principe IV, au contraire, n'est pas évident *a priori*, en sorte que la fin de ses recherches pourrait seule être modifiée.

André (D.). — Second Mémoire sur la sommation des séries. (209-226).

L'auteur se propose de donner la somme de toutes les séries convergentes où la forme du terme général se définit par l'égalité

$$u_n = \frac{U_n}{n(n+1)\dots(n+p-1)} x^n,$$

où n désigne un entier quelconque supérieur à zéro et où le numérateur U_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite.

On suppose que U_n n'est divisible ni par n, ni par $n+p-1$ et que, en outre, dans l'équation génératrice de la série récurrente dont U_n est le terme général, nulle racine n'est de degré de multiplicité supérieur à p; M. André montre d'ailleurs comment on peut toujours ramener le cas où cette condition ne serait pas remplie a celui où elle le serait.

Après avoir établi la formule

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} = \sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \frac{1}{n+t},$$

l'auteur montre comment U_n peut être décomposé en deux parties :

Designons par a l'une quelconque des racines de l'équation génératrice et par α son degré de multiplicité (inférieur à p); on a

$$\begin{aligned} U_n = & \sum \sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \psi_a(n,t)\, a^n x^n \\ & + \sum \sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{n+t} a^n x^n, \end{aligned}$$

où le premier Σ s'étend à toutes les racines de l'équation génératrice, où les polynômes φ et ψ sont définis par les égalités

$$U_n = \sum \varphi_a(n)\, a^n,$$

$$\frac{\varphi_a(n)}{n+t} = \psi_a(n,t) + \frac{\varphi_a(-t)}{n+t}.$$

En faisant la somme de tous les U_n, les premières parties disparaissent; la somme des secondes parties, ou la somme de la série, est égale à

$$\sum \sum_{t=1}^{t=p-1} \frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t} \left(\frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{2} + \ldots + \frac{a^t x^t}{t}\right)$$

$$+ \sum \sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t} \log(1-ax).$$

M, André donne ensuite quelques applications.

Niewenglowski. — Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné. (227-300).

M. Niewenglowski a cherché dans ce travail à rendre plus aisée la lecture du Mémoire où Riemann a déterminé les surfaces minima dont le contour se compose de lignes droites; il s'est aidé pour cela des travaux de M. O. Bonnet.

On sait que les variables (x, y) dont ce géomètre s'est servi sont définies par les formules

$$e^y = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta, \quad x = \varphi,$$

où φ et θ sont la longitude et la colatitude du point m où une sphère fixe de rayon 1 est rencontrée par une parallèle menée par son centre à la normale en un point quelconque de la surface considérée.

L'équation du plan tangent à cette surface est alors

$$\xi \cos x + \eta \sin x + \zeta i \sin iy = -z,$$

où ξ, η, ζ correspondent à un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine coïncide avec le centre de la sphère et où z est une fonction de x, y qui définit la surface.

Cette équation fournit le moyen d'exprimer en fonction de x et y les coordonnées d'un point (ξ, η, ζ) de la surface; celle-ci est minimum si l'on a

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0.$$

Les variables μ et μ' de Riemann sont définies par les formules

$$\mu = e^{y+xi}, \quad \mu' = e^{y-xi};$$

La variable μ est représentée par la projection stéréographique du point m. De cette remarque que l'expression

$$(d \log \mu)^2 \frac{d\zeta}{d \log \mu}$$

ne change pas quand on fait varier le trièdre des coordonnées, résulte l'introduction de la variable U définie par l'équation

$$\mathrm{U} = \int \sqrt{\frac{i\,d\zeta}{d \log \mu}}\, d \log \mu,$$

et de la conjuguée U'; de ce que ζ est la somme d'une fonction de μ et d'une fonction de μ', il résulte qu'on peut faire

$$\zeta = \int \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} d\mu + \int \frac{\partial \zeta}{\partial \mu'} d\mu',$$

ou

$$\zeta = -i \int \left(\frac{\partial U}{\partial \log \mu}\right)^2 d\log\mu + i \int \left(\frac{\partial U'}{\partial \log \mu'}\right)^2 d\log\mu';$$

par une transformation de coordonnées, on en déduira

$$\xi = -\frac{i}{2}\int \left(\frac{\partial U}{\partial \log \mu}\right)^2 \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) d\log\mu + \frac{i}{2}\int \left(\frac{\partial U}{\partial \log \mu'}\right)^2 \left(\mu' - \frac{1}{\mu'}\right) d\log\mu',$$

$$\eta = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial U}{\partial \log \mu}\right)^2 \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) d\log\mu + \frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial U}{\partial \log \mu'}\right)^2 \left(\mu' + \frac{1}{\mu'}\right) d\log\mu'.$$

Transformant ces formules en y introduisant les variables

$$x_1 = x + iy \quad \text{et} \quad y_1 = y - xi,$$

l'auteur parvient à des formules permettant de trouver une infinité de surfaces minima à contour indéterminé; M. Weierstrass a donné pour le même usage des formules équivalentes.

Si l'on se donne U exprimé au moyen de μ, on voit que la surface minimum est par cela même donnée : pour le problème spécial qu'il avait en vue, à savoir la détermination des surfaces minima dont le contour est formé de lignes droites, Riemann introduit une variable auxiliaire t; la question est ainsi ramenée à exprimer U et μ en fonction de t. Cette variable est assujettie aux conditions suivantes : elle est réelle tout le long du contour; elle y est infinie en un point pour lequel U a une valeur finie; pour les points à l'intérieur du contour son argument est compris entre o et π.

Il est essentiel de remarquer qu'un point (du contour) où passent deux droites non rectangulaires est nécessairement singulier.

Soient $a_1, a_2, \ldots$ les valeurs de t qui répondent aux points multiples relatifs à la variable μ et situés à l'intérieur du contour; soient $b_1, b_2, \ldots$ celles qui répondent aux points multiples non anguleux du contour; soient $c_1, c_2, \ldots$ celles qui répondent aux points anguleux; soient enfin $e_1, e_2, \ldots$ les valeurs de t qui répondent aux secteurs infinis de la surface minimum, on aura

$$\frac{dU}{dt} = \sqrt{\frac{\Pi(t-a)\Pi(t-a')\Pi(t-b)}{\Pi(t-e)}}\,\frac{H}{\Pi(t-e)},$$

où les a' sont les quantités conjuguées des quantités a.

Quant à la détermination de μ en fonction de t, voici le procédé indiqué par Riemann.

V étant une fonction indéterminée de t, on a identiquement

$$\frac{dU}{d\log\mu} = \frac{dU}{dV} k_1 k_2,$$

où

$$k_1 = \sqrt{\frac{dV}{d\mu}}, \quad k_2 = \mu\sqrt{\frac{dV}{d\mu}} = \mu k_1.$$

On en déduit que, en désignant par k l'une quelconque des quantités k_1, k_2, on a

$$\frac{dV}{dt}\frac{d^2k}{dt^2} - \frac{dk}{dt}\frac{d^2V}{dt^2} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^3 \frac{d^2k}{dV^2},$$

en sorte que, si l'on parvenait à exprimer $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dV^2}$ en fonction de t, si cette quantité était, par exemple, égale à $F(t)$, k_1 et k_2 se trouveraient être deux solutions particulières d'une équation différentielle linéaire du second ordre liées par la relation

$$k_1\frac{dk_2}{dV} - k_2\frac{dk_1}{dV} = 1$$

k_1 et k_2 étant supposés connus, le problème s'achèvera facilement par les formules précédemment établies.

Pour trouver la fonction V, on fera en sorte que les points singuliers se trouvent parmi les points a, b, c,.... Riemann indique deux solutions. Dans la première, il pose

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{\chi(t)}},$$

où

$$\varphi(t) = \Pi(t-a)\Pi(t-a')\Pi(t-b),$$
$$\chi(t) = \Pi(t-c)\Pi(t-e)^2,$$

et dans la seconde

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)\chi(t)}}.$$

Les applications de la méthode concernent les cas ou la surface doit contenir deux droites non situées dans un même plan; trois droites non parallèles; trois droites dont deux se coupent et dont la troisième est parallèle au plan des deux autres, enfin les quatre côtés d'un quadrilatère gauche faisant partie d'un tétraèdre régulier.

Duport. — Sur un mode particulier de représentation des imaginaires. (301-362).

Hautefeuille. — Sur la reproduction de quelques minéraux. (363-408).

Picart (A.). — Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes. (409-418).

La détermination du potentiel, lorsque l'on connaît les surfaces de niveau, dépend de l'intégration d'une équation différentielle du second ordre.

Du théorème de Steiner, l'auteur déduit la nature des surfaces de niveau pour une couche ellipsoïdale homogène infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques; il est ensuite mené à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} + \left(\frac{\rho}{\rho^2-b^2} + \frac{\rho}{\rho^2-c^2}\right)\frac{dV}{d\rho} = 0,$$

d'où il déduit l'expression connue de V.

Gohierre de Longchamps. — Sur les intégrales eulériennes de seconde espèce. (419-427).

Démonstration nouvelle de la formule que Gauss a adoptée comme définitive de ces intégrales.

Charve (L.). — De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de son application aux irrationnelles du troisième degré. (3-156 du Supplément.).

Ce travail, qui a fait l'objet d'une Thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, a eté analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. CLEBSCH und C. NEUMANN, gegenwärtig herausgegeben von F. KLEIN und A. MAYER ([1])

Tome XVI; 1880.

Sonine (N.). — Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. (1-80; fr.).

« Ces recherches sont divisées en six Sections. La première est consacrée à l'étude des conséquences auxquelles conduit la propriété récurrente des fonctions cylindriques exprimée par la relation

$$(1) \qquad S_{n+1}(x) + 2\,\frac{d\,S_n(x)}{dx} - S_{n-1}(x) = 0.$$

Comme résultat final on obtient le développement d'une fonction $S_0(\alpha + x)$ en série de la forme

$$(2) \qquad S_0(\alpha + x) = J^0(\alpha),\quad S_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n J^n(\alpha),\quad S_n(x).$$

» Dans la seconde Section, j'adjoins à la propriété (1) cette autre

$$(3) \qquad n\,S_n(x) = \frac{x}{2}\,[S_{n-1}(x) + S_{n+1}(x)],$$

et je considère les intégrales définies d'une forme nouvelle qui possèdent ces deux propriétés caractéristiques des fonctions cylindriques et qui s'expriment linéairement par ces fonctions.

» La troisième Section est consacrée à l'évaluation des intégrales indéfinies contenant les fonctions cylindriques. Le sujet a été traité récemment par M. Lommel, mais à l'aide d'une méthode peu directe et peu générale.

([1]) Voir *Bulletin*, V_2, 139.

» Dans la quatrième Section, j'étudie les intégrales définies contenant les fonctions cylindriques. J'y établis une formule très générale et, je crois, très importante, à savoir

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_3 &= \int_0^\infty J^m(bx).\ x^{m+1}.\ \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,dx \\ &= \frac{b^m}{a^n}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2}),\ \text{pour } a > b \\ &\text{et} = 0,\ \text{pour } a < b;\quad n > m > -1, \end{aligned}\right.$$

et j'en fais plusieurs applications; par exemple, j'en déduis la généralisation d'une formule célèbre d'Abel,

$$(5)\quad F(a) - F(0) = \frac{2a \sin p\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{x^{2p}\,dx}{(1-x^2)^p} \int_0^1 \frac{F'(axt)\,dt}{(1-t^2)^{1-p}},\quad 0 < p < 1.$$

Une formule de M. H. Weber me conduit au développement d'une fonction continue pour chaque valeur réelle positive de la variable, en série procédant suivant des polynômes entiers d'une forme déterminée.

» A la fin de la Section se trouve une expression très élégante de la fonction cylindrique de seconde espèce $Y^0(\varkappa)$, savoir

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} Y^0(\varkappa) &= -2\int_0^\infty J^0(x)\,\frac{\cos(x+\varkappa)}{x+\varkappa}\,dx \\ &= -2\int_0^\infty \frac{J^0(x)\,dx}{x+\varkappa} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varkappa\cos\varphi)\,d\varphi. \end{aligned}\right.$$

» La cinquième Section traite de l'équation différentielle de Bessel, dont on n'a fait aucune mention dans les quatre Sections précédentes. J'y considère la forme symbolique de la solution, donnée par M. Hargreave, et je fais voir sur cet exemple particulier de quelle utilité peut être souvent la forme symbolique, lors même qu'elle n'a pas d'interprétation directe. Je me permets de faire remarquer que c'est par la considération de la forme symbolique de la fonction $Y^0(\varkappa)$ que j'ai trouvé son expression qu'on vient d'écrire.

» Enfin, dans la sixième Section, je présente la généralisation des considérations développées dans la première Section, et j'en fais une application, en me réservant de traiter ce sujet à fond dans un Mémoire spécial. »

Cayley (A.). — Note sur le Mémoire de Riemann : « Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation » (*Werke,* p. 331-344). (81-82; angl.).

Krause (M.). — Sur la transformation du cinquième degré des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (83-88).

Burmester (L.). — Sur le système variable bifocalement. (89-111, 2 pl.).

Si, dans un système plan Σ_1, on donne deux points Φ_1, Ψ_1, et dans un autre système plan Σ_2, deux points Φ_2, Ψ_2; si, en outre, on détermine deux points correspondants P_1, P_2 de ces systèmes de telle sorte que l'on ait les équations

$$\Phi_1 P_1 = \Phi_2 P_2, \quad \Psi_1 P_1 = \Psi_2 P_2,$$

alors les deux systèmes Σ_1, Σ_2 ainsi définis seront appelés *bifocaux*. A un point P_1 de Σ_1, aussi bien qu'au point Q_1 de ce système placé symétriquement à P_1 par rapport à la droite focale $\Phi_1\Psi_1$, correspondent dans Σ_2 deux points P_2, Q_2, symétriquement placés par rapport à la droite focale $\Phi_2\Psi_2$; et réciproquement, à chacun des points P_2, Q_2 de Σ_2 correspond le couple de points P_1, Q_1 de Σ_1. Les deux systèmes sont dans une affinité doublement double (*zwei-zweideutig*), dont les relations fondamentales ont été indiquées aphoristiquement par Jacobi dans une lettre à Steiner (¹).

Dans le présent Mémoire, l'auteur fait voir qu'un système déterminé Σ_{I}, semblable au système Σ_1, peut être considéré comme la projection horizontale, et le système Σ_2 comme la projection verticale d'un hyperboloïde à une nappe, dont deux des axes sont respectivement perpendiculaires aux plans de projection. De cette relation on déduit de la manière la plus simple les théorèmes les plus importants sur les systèmes bifocaux.

Un système plan qui varie de telle sorte que toutes ses phases soient des systèmes bifocaux correspondants est dit un système bifocalement variable. La détermination des vitesses des points d'une phase Σ du système variable fait voir que le système Σ_v des points terminaux de ces vitesses est avec la phase du système Σ en affinité simplement double (*ein-zweideutig*). Un système déterminé Σ_{II}, semblable à Σ_v, peut être considéré comme la projection verticale, et le système Σ comme la projection horizontale d'un hyperboloïde à une nappe, dont deux génératrices sont perpendiculaires à la projection horizontale. De ce théorème découlent avec une grande facilité une série de relations intéressantes des deux systèmes d'affinité simplement-double Σ_v, Σ. L'auteur établit ensuite synthétiquement plusieurs autres théorèmes sur les états de vitesse du système bifocalement variable, et termine par un examen concis du système analogue à trois dimensions, qu'il nomme *système trifocalement variable*.

Du Bois-Reymond (*P.*). — Proposition générale concernant la théorie de l'intégrabilité. (112).

Les fonctions intégrables $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ étant, dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, renfermées entre les limites $\alpha_i \leqq \varphi_i \leqq \beta_i$, et la fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

étant continue dans le domaine $\alpha_i \leqq x_i \leqq \beta_i$, la fonction

$$F[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

sera intégrable dans l'intervalle $a \ldots b$.

Cantor (*G.*). — Remarque sur les séries trigonométriques. (113-

(¹) *Journal de Crelle*, t. 12, p. 137.

114). — Nouvelle remarque sur les séries trigonométriques. (267-269).

Dans la théorie des séries trigonométriques, il s'agit de la démonstration de ce théorème (1) : « Si, pour toute valeur particulière de x, comprise dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, la condition

$$\lim (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0, \text{ pour } n = \infty,$$

est remplie, alors a_n et b_n, pour n croissant, deviendront infiniment petits ». Une démonstration donnée par M. Appell dans l'*Archiv der Math. und Phys.* t. LXIV, contient implicitement l'affirmation que « si, pour toute valeur particulière de $x \geqq \alpha$ et $\leqq \beta$, on a $\lim f(n, x) = 0$ pour $n = \infty$, $f(n, x)$ désignant pour chaque valeur particulière de n une fonction continue de x, dont le maximum absolu soit B_n, on aura alors $\lim B_n = 0$ pour $n = \infty$ ». Cette affirmation ne peut être admise sans discussion, comme on peut le constater sur l'exemple suivant :

$$f(n, x) = \frac{nx(1-x)}{n^2x^2 + (1-x)^2}, \quad \text{pour } 0 \leqq x \leqq 1.$$

On a ici $\lim f(n, x) = 0$ pour $n = \infty$; mais $B_n = f\left(x, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

Si l'on pose

$$\varphi_\nu(x) = f(\nu, x) - f(\nu + 1, x),$$

il vient

$$\frac{x(1-x)}{x^2 + (1-x)^2} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \varphi_\nu(x),$$

série infinie qui, dans le voisinage de $x = 0$, définit bien une fonction continue, et qui cependant ne converge pas uniformément. Des exemples semblables ont été déjà présentés par MM. Darboux (2) et Du Bois-Reymond (3).

Du Bois-Reymond (P.). — La démonstration du théorème fondamental du Calcul intégral : $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. (115-128.).

Voss (A.). — Sur la théorie de la transformation des expressions différentielles du second degré et de la courbure des *variétés* d'ordre supérieur. (129-179).

Schubert (H.). — Sur la conservation du genre dans deux

(1) Voir Cantor, *Math. Ann.*, t. IV.

(2) *Mémoire sur les fonctions discontinues*. (*Ann. de l'Éc. Norm.*).

(3) *Abh. der bayer. Akad. d. Wiss.*, Bd. XII.

courbes planes liées entre elles par une correspondance uniforme. (180-182).

Nous reproduisons ici la démonstration, fondée sur le principe de correspondance de Chasles. Soient C et C′ deux courbes planes, rencontrées par toute droite du plan en n et n' points respectivement, auxquelles on peut mener par un point quelconque r et r' tangentes respectivement, et qui ont respectivement $\varkappa$ et $\varkappa'$ points de rebroussement. A chaque rayon d'un faisceau du centre P, qui rencontre la courbe C en n points, correspondent n rayons d'un faisceau P′, qui sont les lignes de jonction du point P avec les points correspondants de C′; de même, à chaque rayon de P′ correspondent n' rayons du faisceau P.

Déterminons maintenant, et cela de deux manières différentes, le nombre de fois qu'il arrive qu'un rayon s de P et un rayon s' de P′ soient liés entre eux de telle façon que deux des points d'intersection du rayon s correspondent à deux des points d'intersection du rayon s'. Soit V ce nombre de fois. Un rayon quelconque passant par P coupe C en n points, auxquels correspondent n points sur C′. La ligne qui joint chacun de ces points avec P′ fournit $n'-1$ autres points d'intersection, auxquels correspondent $n'-1$ points sur C. Joignons chacun de ces points avec P. Alors à chaque rayon de P correspondront $n(n'-1)$ autres rayons, et réciproquement aussi, à chacun de ces rayons correspondront pareil nombre de rayons du premier système. Il existe donc en P

$$2n(n'-1)$$

rayons de coïncidence. A ces rayons appartient d'abord deux fois chacun des V rayons cherchés; en second lieu, chacun des r' rayons correspondants aux r' tangentes menées à C′ par P′; en troisième lieu, chacun des $\varkappa'$ rayons menés aux $\varkappa'$ points qui correspondent aux points de rebroussement de C′. On a donc

$$2V = 2n(n'-1) - r' - \varkappa',$$

et de même aussi

$$= 2n'(n-1) - r - \varkappa.$$

Il en résulte l'égalité

$$r + \varkappa - 2n + 2 = r' + \varkappa' 2n' + 2 = 2p.$$

Lommel (*E.*). — Sur la théorie des fonctions de Bessel. (183-208).

I. L'intégrale définie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\omega - z\cos\omega)\,d\omega,$$

par laquelle Bessel a défini la fonction $J^n(x)$ qui porte son nom, dans l'hypothèse de n entier, satisfait, seulement dans cette hypothèse, à l'équation différentielle caractéristique des fonctions de Bessel. L'extension au cas d'une valeur de n quelconque de la relation de cette intégrale avec les fonctions de Bessel est le premier problème résolu dans le présent Mémoire.

II. Le problème des phénomènes de diffraction des ondes sphériques a été ramené par Fresnel aux deux intégrales

$$\int \sin\frac{\pi}{2}v^2.dv \quad \text{et} \quad \int \cos\frac{\pi}{2}v^2.dv.$$

L'auteur fait voir que ces intégrales peuvent se représenter et se calculer sous la forme d'intégrales de Bessel, d'où résulte en même temps la discussion des phénomènes physiques.

III. De même, les intégrales

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz \quad \text{et} \quad \int_z^\infty \frac{\cos z}{z} dz$$

peuvent se représenter au moyen des fonctions de Bessel, et l'on obtient leurs maxima et leurs minima.

Wedekind (*L.*). — Relations de position dans des triangles plans en perspective. (209-244, 12 pl.).

Kraus (*L.*). — Note sur les groupes spéciaux extraordinaires dans les courbes planes. (245-259).

Les courbes spéciales du genre p qui sont ici considérées se distinguent en ce qu'elles possèdent des systèmes d'un nombre simplement ou multiplement infini de courbes, qui touchent la courbe fondamentale en $p-1$ points. Les groupes spéciaux extraordinaires sont les groupes en nombre simplement ou multiplement infini de ces $p-1$ points de contact. Ces courbes se présentent dans les cas où les fonctions thêta, paires ou impaires, et leurs dérivées s'annulent pour une valeur nulle de l'argument.

Cayley (*A.*). — Sur les groupes finis de transformations linéaires d'une variable. (260-263; angl.). — Correction à la Note précédente. (439-440; angl.).

Płaszycki (*J.*). — Extrait d'une lettre à M. Neumann. (264-266; fr.).

Dans son Mémoire intitulé : *Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen* (1), M. Königsberger se propose de chercher « les conditions nécessaires et suffisantes pour que des intégrales hyperelliptiques soient réductibles aux fonctions algébriques et logarithmiques », et il donne une règle pour obtenir la valeur de l'intégrale, quand la réduction est possible. M. Płaszycki cite ici une intégrale qui s'exprime par les logarithmes contrairement à cette règle.

Noether (*M.*). — Sur la théorie des fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments. (270-344).

L'auteur étend ici aux fonctions thêta d'un nombre quelconque p de variables l'exposition du *théorème d'addition* des fonctions thêta et des *relations de thêta,* qu'il a présentée pour les fonctions de quatre arguments, dans le tome XIV des *Mathematische Annalen* (2). Ses recherches reposent essentielle-

(1) *Mathem. Annalen*, Bd. XI.
(2) Voir *Bulletin,* IV_2, 218.

ment sur la considération des rapports de groupement des *caractéristiques*, savoir sur la distinction, signalée principalement par l'auteur, entre les *groupes* et les caractéristiques *proprement dites*.

Ces deux espèces de concepts résultent des 2^{2p} complexes de nombres

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & \dots & n_p^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & \dots & m_p^\alpha \end{pmatrix},$$

où les nombres n_i^α, m_i^α ne doivent être pris que suivant mod. 2.

La première espèce se compose des 2^{2p-1} complexes (α), dont les éléments ne sont pas tous $\equiv 0 \pmod{2}$; ils correspondent aux 2^{2p-1} demi-périodes, et sont tous *gleichberechtigt*.

La seconde espèce se partage en $2^{p-1}(2^p-1)$ caractéristiques paires et $2^{p-1}(2^p-1)$ impaires, suivant que $\sum_i n_i^\alpha m_i^\alpha$ est pair ou impair, et elle correspond respectivement aux deux classes de fonctions thêta, celle des fonctions paires et celles des fonctions impaires. On ajoute les caractéristiques en ajoutant leurs éléments respectifs. A chaque somme quelconque d'un nombre $\left\{\begin{matrix}\text{pair}\\ \text{impair}\end{matrix}\right\}$ de caractéristiques propres, on fait correspondre la

$$\left\{\begin{matrix}\text{caractéristique de groupes}\\ \text{caractéristique propre}\end{matrix}\right\}$$

qui s'y rapporte.

Dans l'étude des systèmes formés au moyen de caractéristiques, M. Noether emploie seulement les propriétés qui sont invariantes dans toutes les substitutions propres. Il parvient ainsi à former tous les systèmes et à discuter leur forme et leur dépendance mutuelle. La marche suivie par l'auteur consiste à démontrer que la théorie des caractéristiques de p séries est identique avec la théorie des caractéristiques de $p-1$ séries. Tel est, en substance, le contenu du premier Chapitre du Mémoire (§§ 1 à 10).

Comme application, l'auteur traite, au § 11, les résolvantes successives des équations dont les racines peuvent correspondre aux systèmes de caractéristiques (par exemple, la bissection des fonctions abéliennes, etc.).

Le Chapitre II a pour objet le théorème d'addition des fonctions thêta. Comme on sait que $\vartheta(u+v+w)\vartheta(u-v)$ peut s'exprimer en fonction linéaire de 2^p produits de ϑ, linéairement indépendants, et de la forme $\vartheta_\alpha(u+w)\vartheta_\alpha(u)$, il ne reste plus maintenant qu'à déterminer les coefficients indépendants des u. L'auteur choisit à cet effet (§ 13), pour les (α), un certain système de caractéristiques propres pour les demi-périodes des u correspondantes à un deuxième système de 2^p caractéristiques de groupes, qui est coordonné au premier système. Alors les coefficients se présentent encore (§ 14) comme des sommes de 2^{p-3} produits, chacune ayant pour arguments $v+w$ et v. Mais l'auteur fait voir (§ 15) que le déterminant des équations linéaires qui donnent les valeurs des coefficients jouit de la propriété remarquable de se décomposer, par exemple, en un produit de facteurs linéaires; et il se sert (§ 16) de cette propriété pour établir, à la place du théorème d'addition ci-dessus, une formule fondamentale pour $p \geqq 3$. Dans cette formule, le premier membre est une somme de 2^{p-3} produits simples, de la forme

$$\vartheta_{(\alpha)}(0)\vartheta_{(\alpha)}(w)\vartheta_{(\alpha)}(u+v+w)\vartheta_{(\alpha)}(u-w);$$

le second membre est également une somme de 2^p produits simple, de la forme

$$\mathfrak{S}_{(\beta)}(v)\mathfrak{S}_{(\beta)}(v+w)\mathfrak{S}_{(\beta)}(u)\mathfrak{S}_{(\beta)}(u+w).$$

Les coefficients sont purement numériques.

Cette formule simple permet aussi de présenter toutes les relations de $\mathfrak{S}$ sous les formes les plus simples (§ 17) : ainsi il existe, par exemple pour $p \geqq 5$, des relations homogènes entre 5.2^{p-4} produits, de la forme

$$\mathfrak{S}_{(\alpha)}(0)\mathfrak{S}_{(\beta)}(0)\mathfrak{S}_{(\alpha)}(u)\mathfrak{S}_{(\beta)}(u);$$

pour $p \geqq 6$, des relations homogènes entre 5.2^{p-5} produits de la forme

$$\mathfrak{S}_{(\alpha)}(0)\mathfrak{S}_{(\beta)}(0)\mathfrak{S}_{(\gamma)}(0)\mathfrak{S}_{(\delta)}(0).$$

L'auteur traite encore des dépendances entre les relations (§ 18). Il termine (§ 19) en discutant les conditions sous lesquelles, pour $p \geqq 5$, les fonctions $\mathfrak{S}$ deviennent *hyperelliptiques*.

Brill (*A.*). — Sur une propriété de la résultante. (345-347).

Soient données deux équations algébriques $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, dont les coefficients dépendent des quantités a, b, c, ..., de telle sorte que, si une rationnelle déterminée de ces quantités $R(a, b, \ldots)$, qui n'est pas elle-même une puissance d'une telle fonction, vient à s'évanouir, il y ait chaque fois n racines des deux équations qui coïncident; alors R est un facteur au moins n-uple de la résultante.

Brill (*A.*). — Sur les singularités des courbes planes algébriques, et sur une nouvelle espèce de courbe. (348-408).

Si, au moyen de l'équation d'une courbe plane algébrique, rapportée à un système de coordonnées cartésiennes et passant par l'origine de ces coordonnées, on développe l'ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'abscisse, on obtiendra, pour un point singulier, plusieurs développements procédant suivant les puissances entières ou fractionnaires. Si une telle série, ordonnée suivant les puissances de $x^{\frac{1}{p}}$, est interrompue à un terme convenable, on aura l'équation d'une courbe dont les coordonnées, par l'introduction d'un paramètre $x = \lambda^p$, sera transformée en une fonction rationnelle de λ.

Pour la détermination des nombres d'équivalence de la singularité considérée, établis pour la première fois par Cayley, il suffit maintenant, comme le fait voir l'auteur, d'étudier la singularité de cette courbe rationnelle; on peut même indiquer des courbes dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de λ, et qui peuvent remplacer non seulement un système cyclique déterminé (singularité unicursale), mais encore toutes les branches. Cette courbe rationnelle peut toujours alors être déformée de telle manière qu'il en résulte une courbe de même ordre et de même classe qui, au lieu de la singularité considérée, possède les singularités élémentaires équivalentes. De cette manière on gagne deux avantages : d'abord le principe de la déformation est précisé algébriquement; en second lieu, on fait voir que les nombres d'équivalence ont en réalité une signification géométrique déterminée.

Cette étude a pour point de départ les propriétés des courbes qui, dans le système cartésien, sont représentées par des fonctions rationnelles et entières d'un paramètre, que l'on appelle « rationnellement entières », et dans lesquelles la propriété de l'égalité de la classe et de l'ordre permet une dualité complète de représentation. Le Mémoire se divise dans les paragraphes suivants : § 1. La courbe rationnelle et entière. — § 2. Les développements en séries définissent une singularité d'ordre supérieur. — § 3. Les singularités unicursales et l'opération de la déformation. — § 4. Les singularités composées. — § 5. L'équation aux points doubles d'une courbe rationnelle et entière, et son discriminant. — § 6. Les facteurs du discriminant. — § 7. L'indice de réalité d'une singularité d'ordre supérieur. — § 8. Détermination des nombres d'équivalence d'une singularité unicursale. — § 9. Détermination des nombres d'équivalence au moyen de la représentation par un paramètre. — § 10. Les nombres d'équivalence d'une singularité composée. — § 11. Forme des courbes adjointes en un point singulier.

Neumann (*C.*). — Nouveaux théorèmes sur le potentiel logarithmique. (409-431).

Neumann (*C.*). — Nouveaux théorèmes sur le potentiel newtonien. (432-438).

Lie (*S.*). — Théorie des groupes de transformations I. (441-528).

Le présent Mémoire est une exposition détaillée de la théorie que l'auteur a publiée dans une suite de travaux, insérés pour la plupart dans l'*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab;* Christiania, 1876-78-79. Le premier Chapitre traite des groupes de transformations d'une variété simplement étendue. Il s'agit du problème suivant : « Une série de transformations $x' = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_r)$, où x' représente la variable primitive, x la nouvelle variable, et les a_i des paramètres, forme un groupe de transformations, quand la succession de deux transformations de la série est équivalente à une seule série de transformations. On veut, d'après cela, déterminer la fonction la plus générale f de x et des r paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$, qui satisfasse à une équation de condition de la forme

$$f[f(x, a_1, a_2, \ldots, a_r), b_1, b_2, \ldots, b_r] = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_r),$$

où l'on suppose que les c_i ne dépendent que des a et des b_2 ». Le groupe est dit de $r =$ termes (r gliedrig), lorsque le nombre des paramètres ne peut pas être abaissé. Étant connu un groupe quelconque de r termes, on trouve facilement de nouveaux groupes de r termes. Soient, en effet, φ et Φ deux fonctions quelconques inverses l'une de l'autre; l'équation

$$x' = \Phi\{f[\varphi(x), a_1, \ldots, a_r]\}$$

déterminera encore un groupe de r termes. Ce groupe est dit *semblable* au premier; des groupes semblables, dans les recherches générales, doivent être, à un certain point, considérés comme identiques. Le résultat général de ces études est exprimé par ce théorème : *Tout groupe de transformations d'une variété simplement étendue est semblable à un groupe linéaire, et contient, par suite, trois paramètres au plus.*

Dans le deuxième Chapitre, relatif à la détermination de tous les groupes de transformations d'une variété doublement étendue, on établit d'abord que tout groupe de r termes dont les transformations peuvent se correspondre deux à deux comme transformations inverses contient ∞^{r-1} transformations infinitésimales, qui sont caractéristiques pour le groupe.

D'après cela, l'étude des transformations infinitésimales est la voie qui conduira à la solution du problème général. On obtient d'abord les théorèmes suivants : *A une transformation infinitésimale déterminée appartiennent des séries de courbes $\varphi(x, y) = a$, en nombre illimité, qui restent invariantes; il en est de même aussi pour chaque groupe à deux termes. Au contraire, à un groupe à trois termes appartient une, et en générale une seule série invariante de courbes. Si un groupe de plus de trois transformations infinitésimales laisse invariante une série de courbes $\varphi = a$, φ devra être alors une intégrale commune d'une série d'équations différentielles.* Pour décider s'il existe une telle intégrale, il suffit de considérer les transformations infinitésimales indépendantes d'ordre zéro ou 1, dans le voisinage d'un point (x_0, y_0). Les transformations finies qui laissent invariante une série de courbes, puisqu'il s'agit ici des transformations d'une variété simplement infinie, se décomposent, en vertu des théorèmes trouvés dans le Chapitre Ier, en transformations qui laissent chaque courbe invariante, et en transformations qui transforment les courbes suivant un, deux ou trois paramètres. Ces transformations peuvent être complètement déterminées au moyen de la transformation infinitésimale qu'elles contiennent. Enfin, on détermine complètement tous les groupes qui ne laissent invariante aucune série de courbes $\varphi = a$, et l'on obtient alors un dénombrement de tous les groupes dans le plan. Finalement, l'auteur expose en peu de mots la manière de s'orienter relativement à la dépendance qui règne entre ses recherches, dont l'importance se rattache essentiellement au domaine des équations différentielles, et la théorie des substitutions de Galois, la théorie des groupes de C. Jordan, et les recherches générales sur la transformation des différentielles quadratiques étudiée par Riemann et Helmholtz.

Meissel. — Considérations sur la Géométrie de la sphère. (529-532).

Korteweg. — Sur la théorie des forces électriques. (533-536).

Court extrait, fait par l'auteur, de son Mémoire intitulé : *Allgemeine Theorie der ponderomotorische Kräften,* et publié dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam, pour l'année 1879.

Bachmann (P.). — Complément d'une étude de Dirichlet. (537-549).

Du Bois-Reymond (P.). — Sur le théorème $f'(x) = \lim \dfrac{f(x)}{x}$. (550).

Noether (M.). — Note sur une classe de déterminants symétriques. (551-555).

Voss (A.). — Interprétation géométrique de l'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$. (556-559).

Voss (A.). — Sur l'étude de la surface des centres. (560-570).

La surface projective des centres d'une surface générale du $n^{\text{ième}}$ ordre $f = 0$ est la surface des foyers du système de rayons qui se compose des droites qui joignent les pôles Q des plans tangents de f par rapport à une surface du second degré $\varphi = 0$ avec leurs points de contact P. L'auteur détermine, par voie algébrique, les nombres suivants :

Ordre de la surface $= 2n(n-1)(2n-1)$;
Classe de la surface $= 2n(n^2-n-1)$;
Rang de la surface $= 6n(n-1)^2$;
Ordre de la courbe de rebroussement $= 2n(n-1)(11n-16)$;
Classe des plans paraboliques $= 2n(n-2)(8n-5)$.

Ces nombres suffisent pour déterminer aussi l'ordre de la courbe double, sa classe et l'ordre de la congruence des tangentes principales et des tangentes doubles.

Voss (A.). — Sur la théorie de la mesure de la courbure de Riemann. (571-576).

Bianchi (L.). — Sur les surfaces de courbure négative constante. (577-582).

Cantor (G.). — Sur la théorie des fonctions arithmologiques. (583-588). Ax. H.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

Tome XCIII; 1881, 4e trimestre.

N° 14; 3 octobre.

Tisserand. — Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. (525).

Dans un Mémoire *Sur le mouvement des nœuds des orbites planétaires* (*Œuvres*, t. IV), Lagrange détermine les expressions analytiques, en fonction du temps, des angles que les plans des orbites de trois planètes font entre eux, mais sans déterminer les positions absolues des orbites. Cette seconde question a depuis été reprise par M. Radau et M. Hübner; M. Tisserand parvient à l'expression des inclinaisons des trois orbites sur un plan fixe; ces expressions contiennent deux intégrales elliptiques de troisième espèce, en outre du sinus d'amplitude qui figure dans les inclinaisons mutuelles.

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 171.

Gyldén. — Sur une application nouvelle de l'équation de Lamé. (537).

Bigourdan (*G.*). — Observations de la comète *d* 1881 (Encke) et *e* 1881 (Barnard), faites à l'Observatoire de Paris. (540).

N° 15; 10 octobre.

Faye. — Sur le premier Volume des « Nouvelles Annales de l'Observatoire de Bruxelles ». (553).

Coggia. — Comète découverte par M. Denning, le 4 octobre 1881; observation faite à l'Observatoire de Marseille. (559).

N° 16; 17 octobre.

Instructions formulées par la Conférence internationale pour l'observation du passage de Vénus sur le Soleil. (569).

Bigourdan (*G.*). — Observations de la comète *b* 1881 (Tebbutt-Gould-Cruls), faites à l'Observatoire de Paris. (575).

Stephanos. — Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace. (578).

Les diverses sphères de l'espace, constituent un système linéaire

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 + \lambda_5 S_5 = 0.$$

On peut considérer comme coordonnées d'un cercle déterminé par deux sphères

$$\Sigma\lambda'_i S_i = 0, \quad \Sigma\lambda''_j S_j = 0$$

les dix quantités

$$p_{ij} = \lambda'_i\lambda''_j - \lambda''_i\lambda'_j,$$

liées entre elles par les cinq relations du type

$$p_{lm}p_{ki} + p_{mk}p_{ln} + p_{kl}p_{mn} = 0.$$

M. Stephanos déduit de là qu'à tout système de quatre cercles de l'espace est attaché un cinquième dont les coordonnées sont composées linéairement avec les coordonnées correspondantes des quatre premiers. Exposant ensuite comment, étant donnés quatre cercles, on peut construire le cinquième cercle (formant avec les quatre premiers un *pentacycle*), il est amené à considérer une figure composée symétriquement de quinze cercles, pouvant être groupés en six pentacycles et situés trois à trois sur quinze sphères; dans une Communication postérieure (24 octobre), il développe les propriétés de cette figure.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (581).

Sur un mode d'expression des fonctions fuchsiennes au moyen de séries.

Sur le genre de la relation algébrique qui a lieu entre deux fonctions fuchsiennes du même groupe.

N° 17; 24 octobre.

Clausius (R.). — Sur une détermination générale de la tension et du volume des vapeurs saturées. (619).

Stephanos. — Sur une configuration de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace. (633).

Mathieu (É.). — Sur la théorie mathématique du mouvement vibratoire des cloches. (636).

N° 18; 31 octobre.

Stéphan. — Observations de la comète Cruls (comète *b* 1881) faites à l'Observatoire de Marseille. (656).

Bigourdan. — Observations des comètes *e* 1881 (Schaeberle), *d* 1881 (Encke), *e* 1881, *f* 1881 (Denning), faites à l'Observatoire de Paris. (657).

Bossert. — Éléments elliptiques de la comète *b* 1881. (659).

N° 19; 7 novembre.

Stéphan. — Observation de la comète *f* 1881 (Denning), faite à l'Observatoire de Marseille. (676).

Schulhof. — Éléments de la comète de Denning (1881 *f*).

Baillaud. — Sur une formule générale pour le développement de la partie principale de la fonction perturbatrice. (694).

Picard (É.). — Sur la réduction des intégrales abéliennes. (696).

Soient

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{Q(x,y)\,dx}{f'_y(x,y)}, \quad \int_{x_0}^{x} \frac{P(x,y)\,dx}{f'_y(x,y)}$$

deux intégrales abéliennes de première espèce relatives à la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

dont le genre est d'ailleurs quelconque.

Supposons que ces intégrales n'aient l'une et l'autre que quatre périodes, et cela de telle manière que, ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 et v_0, v_1, v_2, v_3 représentant quatre couples de périodes correspondantes convenablement choisies, tout autre système de périodes correspondantes ait la forme

$$m_0\omega_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3,$$
$$m_0 v_0 + m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3,$$

où les m sont entiers; le système d'équations différentielles

$$0 = \frac{Q(x_1, y_1)}{f'_{y_1}(x_1, y_1)} dx_1 + \frac{Q(x_2, y_2)}{f'_{y_2}(x_2, y_2)} dx_2 + \frac{Q(x_3, y_3)}{f'_{y_3}(x_3, y_3)} dx_3,$$
$$0 = \frac{P(x_1, y_1)}{f'_{y_1}(x_1, y_1)} dx_1 + \frac{P(x_2, y_2)}{f'_{y_2}(x_2, y_2)} dx_2 + \frac{P(x_3, y_3)}{f'_{y_3}(x_3, y_3)} dx_3$$

a son intégrale générale algébrique.

Il résulte de là que, si l'on considère les équations

$$\int_a^{x_1} \frac{Q(x_1, y_1)}{f'_{y_1}(x_1, y_1)} dx_1 + \int_a^{x_2} \frac{Q(x_2, y_2)}{f'_{y_2}(x_2, y_2)} dx_2 = u,$$
$$\int_a^{x_1} \frac{P(x_1, y_1)}{f'_{y_1}(x_1, y_1)} dx_1 + \int_a^{x_2} \frac{P(x_2, y_2)}{f'_{y_2}(x_2, y_2)} dx_2 = v,$$

$x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ sont des racines d'équations algébriques dont les coefficients sont des fonctions uniformes de u et v.

S'occupant ensuite particulièrement des courbes du troisième genre, l'auteur indique un cas intéressant, où les coefficients de ces équations algébriques s'expriment au moyen des fonctions Θ de deux variables.

Appell. — Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations de la forme

$$F[\varphi(x)] = \psi(x)F(x).$$

(699).

Soit une équation différentielle linéaire d'ordre n,

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + f_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + f_n(x)y = 0;$$

en posant $x = \varphi(t)$, $y = x\psi(t)$ et supposant les deux fonctions φ et ψ telles que l'équation transformée soit

$$\frac{d^n y}{dt^n} + f_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + f_n(t)y = 0,$$

si l'équation (1) admet la solution $y = \Phi(x)$, elle admet aussi les solutions

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\psi(x)} \Phi[\varphi(x)],$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{\psi(x)} \Phi_1[\varphi(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Entre $n+1$ telles intégrales particulières existera une relation de la forme

$$\lambda_0 \Phi_1(x) + \lambda_1 \Phi_1(x) + \ldots + \lambda_n \Phi_n(x) = 0,$$

d'où il suit que, en posant

$$F(x) = \mu_0 \Phi(x) + \ldots + \mu_{n-1} \Phi_{n-1}(x),$$

on pourra déterminer les μ de façon que $F(x)$ vérifie la relation

$$F[\varphi(x)] = A\psi(x) F(x),$$

A étant une constante.

Si maintenant on réduit l'équation proposée en faisant

$$y = F(x) \int_{x_0}^{x} \eta \, dx,$$

on vérifie que, si l'équation en η d'ordre $n+1$ admet une intégrale $\eta = \psi(x)$, elle admet aussi l'intégrale

$$\eta_1 = \varphi'(x) \psi[\varphi(x)],$$

en sorte qu'on pourra répéter les mêmes raisonnements sur cette équation.

Or M. Appell montre que ces circonstances, exceptionnelles en général, se présentent toujours pour les équations différentielles linéaires du second ordre. Si, en particulier, une telle équation est de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) y,$$

$f(x)$ désignant une fonction qui vérifie la relation

$$f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) = (\gamma x + \delta)^4 f(x),$$

où

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

cette équation différentielle admettra une solution $F(x)$ vérifiant l'équation

$$F\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) = \frac{A}{\gamma x + \delta} F(x).$$

Gomes Teixeira. — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. (702).

L'équation

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial z}{\partial y} + \psi\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y, z\right) = 0,$$

où A et B sont des fonctions de $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$, peut être transformée dans une autre du même degré par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Boussinesq. — Comment se transmet dans un solide isotrope (en équilibre) la pression exercée sur une très petite partie de sa surface. (703).

Lévy (L.). — Sur la possibilité de l'équilibre électrique. (706).

La démonstration classique du théorème fondamental de l'électrostatique, que *tout système de corps électrisés admet un état d'équilibre et un seul,* suppose essentiellement qu'un certain déterminant est toujours différent de zéro. M. Lévy comble cette lacune en démontrant le théorème suivant :

Tout déterminant dont tous les éléments sont positifs, sauf deux de la diagonale principale qui sont négatifs, est différent de zéro toutes les fois que la somme des éléments de chaque ligne horizontale est négative.

Lévy (M.). — Sur le rendement et la limite de l'opération du transport de la force par l'électricité. (709).

Gagarine. — Systèmes articulés assurant le mouvement rectiligne ou la courbure circulaire. (711).

L'auteur paraît ignorer les recherches publiées sur les systèmes articulés, et en particulier les solutions dans lesquelles on emploie cinq tiges seulement pour obtenir le mouvement rectiligne, et sept tiges seulement pour obtenir le mouvement d'une droite qui reste parallèle à elle-même, tous ses points décrivant des droites.

N° 20; 14 novembre.

Cruls. — Observations de la comète Schaeberle (e 1881), faites à l'Observatoire impérial de Rio-Janeiro. (777).

Callandreau. — Sur la théorie du mouvement des corps célestes. (779).

Halphen. — Sur certaines séries pour le développement des fonctions d'une variable. (781).

Soit
$$\lambda(\zeta) = A e^{a\zeta} + B e^{b\zeta} + C e^{c\zeta} + \ldots,$$
$A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$ étant des constantes, et prenons pour $P_m(x)$ le coefficient du $(m+1)^{\text{ième}}$ terme dans le développement de $e^{\zeta x}\lambda(\zeta)$ suivant les puissances ascendantes de ζ. Il existe une classe de fonctions $f(x)$ pour lesquelles la série dont le terme général est
$$[A f^{(m)}(a) + B f^{(m)}(b) + C f^{(m)}(c) + \ldots] P_m(x)$$

représente la fonction $f(x)$ elle-même, si toutefois $\lambda(\zeta)$ n'a pas de racine nulle; au cas où $\lambda(\zeta)$ a la racine zéro, multiple d'ordre k, la série représenterait $f^{(k)}(x)$.

Les conditions sous lesquelles le développement s'applique sont indépendantes de x, en sorte que la fonction $f(x)$ est nécessairement synectique dans tout le plan.

Pour que la série s'applique à une fonction $f(x)$, il faut et il suffit : 1° qu'il existe une constante α telle que le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$, pour toute valeur finie de x, ne devienne pas infini avec m; 2° que les racines, autres que zéro, de la fonction $\lambda(\zeta)$ aient leur plus petit module ρ supérieur à celui de $\frac{1}{\alpha}$.

$P_m(x)$ ayant toujours le même sens, la série

$$F(x) = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \mu_2 P_2(x) + \ldots,$$

où les μ sont des constantes, convergera quel que soit x, si la série

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots$$

converge à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à $\frac{1}{\rho}$.

S'il en est ainsi, la série

$$V(x) = \mu_0 + \mu_1 \frac{x}{1} + \mu_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

est synectique dans tout le plan. La fonction $F(x)$ est une solution de l'équation

$$AF(a+x) + BF(b+x) + CF(c+x) + \ldots = V^{(k)}(x),$$

caractérisée par la propriété suivante : $\frac{F^{(m)}(x)}{\rho^m}$ a pour limite zéro avec $\frac{1}{m}$.

On a, en outre, cette conséquence

$$F(x+y) = P_0 V(y) + P_1(x) V'(y) + \ldots + P_k(x) V^{(k)}(y) + \ldots.$$

Boussinesq. — Égalité des abaissements moyens que produisent, chacune, aux points où est déposée l'autre, deux charges égales, arbitrairement distribuées, le long de deux circonférences concentriques, sur un sol horizontal, ou sur une plaque circulaire horizontale ayant même centre que ces circonférences et appuyée ou encastrée sur tout son contour. (783).

Lévy (M.). — Sur le rendement maximum dont sont susceptibles deux machines dynamo-électriques données, lorsqu'on les emploie au transport de la force. (785).

N° 21; 21 novembre.

Callandreau. — Éléments de l'orbite et éphémérides de la planète (217) Eudore. (831).

Halphen. — Sur certains développements en série. (832).

M. Halphen est parvenu, pour le développement de $f(x+y)$ suivant les dérivées d'une fonction quelconque, à la série suivante

$$(1) \qquad P_0 V(y) + P_1(x) V'(y) + P_2(x) V''(y) + \ldots.$$

$P_m(x)$ est le coefficient du $(m+1)^{\text{ième}}$ terme dans le développement suivant les puissances croissantes de ζ de la fonction

$$\frac{e^{\zeta x}}{\int_b^c \theta(x) e^{\zeta x}\, dx},$$

et la fonction $\theta(x)$ doit être déterminée par la condition

$$\int_b^c \theta(x) f(x+y)\, dz = V(y);$$

les limites b et c sont des constantes à volonté.

Il est nécessaire d'ajouter que si, posant

$$T_\mu = \int_b^c \theta(x) x^\mu\, dx,$$

on avait zéro pour $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$, et que T_k fût différent de zéro, la série (1) représenterait $f^{(k)}(x+y)$, au lieu de $f(x+y)$.

Quant à la légitimité de ce développement, voici le résultat qu'énonce M. Halphen.

Supposons que la fonction

$$\varphi(\zeta) = \int_b^c e^{\zeta x} \theta(x)\, dx$$

soit synectique aux environs de $\zeta = 0$, et soit k l'ordre de multiplicité de la racine nulle pour cette fonction, k pouvant d'ailleurs être nul; soit aussi ρ le module minimum des valeurs de ζ, pour lesquelles $\zeta^k : \varphi(\zeta)$ cesse d'être synectique.

Dans ces conditions, formons le développement (1). Pour que ce développement représente $f^{(k)}(x+y)$, il faut et il suffit : 1° qu'il existe une constante α laissant $\alpha^m f^{(m)}(x)$ fini pour m infini; 2° que le module de α soit supérieur à $\frac{1}{\rho}$.

Le cas de ρ infini offre un intérêt particulier; l'énoncé suivant répond à un exemple de ce cas.

Soient les polynômes $P_m(x)$ ainsi définis, savoir :

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m} e^{\zeta x + (-1)^n a \zeta^{2n}}\right)_{\zeta=0} \\ &= \frac{x^m}{m!} + (-1)^n \frac{a}{1} \frac{x^{m-2n}}{(m-2n)!} + \frac{a^2}{2!} \frac{x^{m-4n}}{(m-4n)!} + \ldots \\ &\quad + (-1)^{sn} \frac{a^s}{s!} \frac{x^{m-2sn}}{(m-2sn)!} + \ldots. \end{aligned}$$

Formons, avec une fonction $f(x)$, la série

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m P_m(x)\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega f(x)e^{-a\omega}\omega^m\cos\left(x\omega+\frac{m\pi}{2}\right).$$

Cette série représente $f(x)$ pour les valeurs réelles de x, sous les conditions suivantes : $f(x)$ doit être développable en série trigonométrique dans tout intervalle fini, et en outre être telle que les intégrales, formant les coefficients de la série, puissent être effectivement étendues, par rapport à x, jusqu'à $\pm\infty$.

Par exemple

$$\cos x = e^{-a}(P_0 - P_2 + P_4 - \ldots),$$
$$\sin x = e^{-a}(P_1 - P_3 + P_5 - \ldots).$$

Si l'on suppose que $f(x)$ est une fonction analytique, le résultat se complète ainsi.

Si, entre deux parallèles à l'axe des quantités réelles placées de part et d'autre de cet axe, la fonction f est synectique, elle est, dans cette étendue, représentée par la série précédente.

Si l'on prend $n=1$, on tombe sur la série de M. Hermite.

Picard (*E.*). — Sur une courbe particulière du troisième genre et sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes. (835).

La considération des périodes d'un système d'intégrales abéliennes correspondant à la courbe

$$v^3 = u(u-1)(u-x)(u-y),$$

où u, v sont les coordonnées, conduit l'auteur à un exemple de fonctions de deux variables indépendantes se reproduisant par la substitution à u et v d'expressions linéaires convenables en nombre infini

$$\frac{m'+n'u+p'v}{m+nu+pv},\quad \frac{m''+n''u+p''v}{m+nu+pv}.$$

Cet exemple même amène l'auteur à un procédé beaucoup plus général pour former de telles fonctions, ce que l'on pourra faire si les équations linéaires aux dérivées partielles

$$s = ap + bq + cz,$$
$$r = a_1p + b_1q + c_1z,$$

où les a, b, c sont fonctions de x et y, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes w, w', w''; les valeurs de x et y tirées des équations

$$\frac{w'}{w} = u,\quad \frac{w''}{w} = v$$

sont racines d'équations algébriques à coefficients uniformes, en u, v.

Pellet. — Méthode nouvelle pour la division du cercle. (838).

Mathieu. — Intégration des équations différentielles du mouvement vibratoire d'une cloche sphérique. (840).

Lévy (M.). — Applications numériques de la théorie du rendement maximum de deux machines dynamo-électriques employées au transport de la force. (842).

N° 22; 28 novembre.

Villarceau (Y.). — Nouvelle méthode pour annuler la flexion astronomique des lunettes. (886).

Bigourdan. — Observation de la nouvelle comète (g 1881), faite à l'Observatoire de Paris. (889).

Laguerre. — Sur les équations algébriques de la forme

$$\frac{A_0}{x-a_0}+\frac{A_1}{x-a_1}+\dots+\frac{A_n}{x-a_n}=0.$$

(890).

Étant donnée une suite

$$A+B+C+D+\dots,$$

l'auteur appelle nombre des *alternances* de cette suite le nombre de variations que présente la série des sommes partielles

$$A,\quad A+B,\quad A+B+C,\quad \dots.$$

Ceci posé, on a la proportion suivante, ξ désignant un nombre entier arbitraire, compris entre a_{i-1} et a_i, de telle sorte que les nombres

$$\dots,\quad a_{i-2},\quad a_{i-1},\quad \xi,\quad a_i,\quad a_{i+1},\quad \dots$$

forment une suite croissante ou décroissante. Le nombre des racines de l'équation proposée, qui sont comprises entre ξ et a_i, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{A_i}{\xi-a_i}+\frac{A_{i+1}}{\xi-a_{i+1}}+\dots+\frac{A_{i-1}}{\xi-a_{i-1}};$$

si ces nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Soient ξ et ξ' deux nombres arbitraires ne comprenant aucune des quantités $a_0, a_1, a_2, \dots$, et tels que les nombres

$$\dots,\quad a_{i-2},\quad a_{i-1},\quad \xi,\quad \xi',\quad a_i,\quad a_{i+1},\quad \dots$$

forment une suite croissante ou décroissante.

Le nombre des racines de l'équation proposée comprises entre ξ et ξ' est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite

$$\frac{A_i}{\xi' - a_i} + \frac{A_{i+1}}{\xi' - a_{i+1}} + \frac{A_{i+2}}{\xi' - a_{i+2}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{\xi' - a_{i-1}},$$

$$\frac{A_i}{\xi - a_i} + \frac{A_{i+1}}{\xi' - a_{i+1}} + \frac{A_{i+2}}{\xi' - a_{i+2}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{\xi' - a_{i-1}},$$

$$\frac{A_i}{\xi - a_i} + \frac{A_{i+1}}{\xi - a_{i+1}} + \frac{A_{i+2}}{\xi' - a_{i+2}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{\xi' - a_{i-1}},$$

....

$$\frac{A_i}{\xi - a_i} + \frac{A_{i+1}}{\xi - a_{i+1}} + \frac{A_{i+2}}{\xi - a_{i+2}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{\xi - a_{i-1}}.$$

Entre ξ et ξ' la valeur du premier nombre de l'équation est comprise entre le plus grand et le plus petit nombre de cette suite.

Deprez (M.). — Distribution de l'énergie par l'électricité. (892).

N° 23; 5 décembre.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes et de la comète *b* de 1881, faites à l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1881. (913).

Resal. — Sur la théorie des boulets ramés. (916).

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (920).

Si l'on écrit l'équation de Lamé pour $n = 2$ sous la forme

$$D_x^2 y = (6k^2 \operatorname{sn}^2 x + 6k^2 \operatorname{sn}^2 a - 4 - 4k^2) y,$$

la solution est donnée par les formules

$$y = C D_x \frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] x} + C' D_x \frac{H(x-\omega)}{\Theta(x)} e^{-\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] x},$$

et l'on a pour la détermination des constantes ω et λ les relations

$$\operatorname{sn}^2\omega = \frac{\operatorname{sn}^4 a\,(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\operatorname{cn}^2\omega = \frac{\operatorname{cn}^4 a\,(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\operatorname{dn}^2\omega = \frac{\operatorname{dn}^4 a\,(2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\lambda^2 = \frac{(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2)(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1)(2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2\omega}.$$

Après avoir rappelé ces résultats, l'auteur se propose d'examiner ce qui arrive quand la constante λ est nulle ou infinie.

On a $\lambda = 0$ si $\omega = 0$, K, $K + iK'$; on obtient alors aisément, suivant les cas, les solutions

$$y = D_x \operatorname{sn} x, \quad y = D_x \operatorname{cn} x, \quad y = D_x \operatorname{dn} x.$$

Soit maintenant le cas de λ infini : en désignant par α une solution de l'équation en a

$$3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1 = 0,$$

l'auteur pose $a = \alpha + \eta$, $\omega = iK' + \varepsilon$, η et ε étant des infiniment petits; celle des formules précédentes qui donne $\operatorname{sn}^2\omega$ conduit au développement

$$\varepsilon^2 = p\eta + q\eta^2 + \ldots,$$

où p et q sont des constantes, et la dernière, qui donne λ, fournit de même le développement

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{1 + k^2}{3}\right)\varepsilon + \ldots.$$

L'équation

$$\frac{\Theta'(iK' + \varepsilon)}{\Theta(iK' + \varepsilon)} = \frac{H'(\varepsilon)}{H(\varepsilon)} - \frac{i\pi}{2K} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{i\pi}{2K} + \left(\frac{J}{K} - \frac{1 + k^2}{3}\right)\varepsilon + \ldots$$

donne ensuite

$$\lambda - \frac{\Theta'(iK' + \varepsilon)}{\Theta(iK' + \varepsilon)} = \frac{i\pi}{2K} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{J}{K}\right)\varepsilon + \ldots,$$

et il en résulte

$$\frac{H(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x} = i e^{\frac{\pi x}{2iK}} \frac{\Theta(x + \varepsilon)}{\Theta(x)} e^{gx},$$

où

$$g = -\frac{i\pi}{2K} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{J}{K}\right)x;$$

d'ailleurs

$$\frac{\Theta(x + \varepsilon)}{\Theta(x)} e^{gx} = 1 + \left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + g\right]\varepsilon + \ldots.$$

On obtiendra donc la limite cherchée en remplaçant e par $\frac{e}{\varepsilon}$: la limite, pour $\varepsilon = 0$, de

$$\frac{1}{\varepsilon} D_x \left| \frac{\Theta(x + \varepsilon)}{\Theta(x)} e^{gx} \right|$$

sera

$$D_x \left| \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + g \right| = k^2 (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 x)$$

où la constante $\operatorname{sn}^2\alpha$ est déterminée par l'équation

$$3k^2 \operatorname{sn}^4 \alpha - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 \alpha + 1 = 0.$$

Le pendule conique fournit une application intéressante de ces résultats : l'étude de son mouvement dépend, comme on sait, de l'intégration des équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{N}x = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{N}y = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \mathrm{N}z = g, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

d'où l'on tire d'abord

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(z+e), \quad y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = l,$$

puis

$$(x - iy)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right) = -z\frac{dz}{dt} + il,$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z+e)(1-z^2) - l^2.$$

L'avant-dernière équation, divisée membre à membre avec l'équation

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2,$$

conduit à la formule

$$x - iy = e^{-\int \frac{z\,dz - il\,dt}{1-z^2}}$$

qui permet d'obtenir les expressions explicites de x et y données par M. Tissot (*Journal de M. Liouville*, t. XVII, p. 88). M. Hermite procède d'une manière différente : la formule $\mathrm{N} = g(3z + 2c)$ conduit en effet, pour la détermination de $x + iy$, à l'équation

$$\frac{d^2(x+iy)}{dt^2} = -g(3z+2c)(x+iy),$$

qui n'est autre qu'une équation de Lamé dans le cas de $n = 2$.

En posant en effet

$$2g(z+c)(1-z^2) - l^2 = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma),$$

$$1 > \alpha > \gamma, \quad \alpha > 0, \quad -1 < \beta, \quad -1 < \gamma < 0,$$

$$k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}, \quad n = \sqrt{\frac{g(\alpha - \gamma)}{2}},$$

$$u = n(t - t_0),$$

$$z = \alpha - (\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2(u, k),$$

cette équation devient

$$\mathrm{D}_u^2(x+iy) = \left(6k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 2\,\frac{\alpha - 2\beta - 2\gamma}{2 - \gamma}\right)(x+iy),$$

et la formule

$$x + iy = e^{-\int \frac{z\,dz - il\,dt}{1-z^2}},$$

rapprochée de la solution générale de l'équation de Lamé, montre qu'on doit prendre

$$x + iy = \mathrm{AD}_u\,\frac{\mathrm{H}'(\omega)\,\mathrm{H}(u+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u};$$

il reste à déterminer les constantes A, λ, ω; c'est ce que fait M. Hermite dans une Communication postérieure (26 décembre); on a d'abord les formules

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}^2\omega &= -\frac{\alpha^2(\beta+\gamma)}{\alpha-\beta},\\
\mathrm{cn}^2\omega &= \frac{\beta^2(\alpha+\gamma)}{\alpha-\beta},\\
\mathrm{dn}^2\omega &= \frac{\gamma^2(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta},\\
\lambda^2 &= -\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha-\gamma}.
\end{aligned}$$

On voit que $\mathrm{sn}^2\omega$, $\mathrm{dn}^2\omega$ sont positifs et que $\mathrm{cn}^2\omega$ est négatif; on est donc amené à faire

$$\omega = \pm K + iv;$$

une analyse plus approfondie montre qu'il est permis de prendre

$$\omega = +K + iv,$$

v étant compris entre $-K'$ et $+K'$ et déterminé par les expressions

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}^2(v, k') &= \frac{\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)}{\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)},\\
\mathrm{cn}^2(v, k') &= \frac{\gamma^2(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)},\\
\mathrm{dn}^2(v, k') &= \frac{\beta-\alpha}{\alpha^2(\beta+\gamma)}.
\end{aligned}$$

On trouve ensuite

$$\lambda^2 = -\frac{l^2}{4n^2}.$$

Les quantités λ, v sont déterminées par ces formules au signe près; l'auteur établit qu'on doit prendre

$$\lambda = -\frac{il}{2n},$$

et que v aura le signe de l ou un signe contraire, suivant que la racine moyenne β sera positive ou négative. Quant à A, on devra prendre

$$A = (\alpha-\gamma)e^{i\varphi},$$

φ désignant un angle arbitraire.

Brioschi. — Sur la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre. (941).

M. Kummer a démontré (*Journal de Crelle*, t. 15) que, étant données deux équations différentielles linéaires du second ordre,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy &= 0,\\
\frac{d^2z}{dt^2} + P\frac{dz}{dt} + Qz &= 0,
\end{aligned}$$

en posant

$$y = wz$$

et en supposant t fonction de x, on a

$$(t)_x = \mathrm{T}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \mathrm{X},$$

où

$$(t)_x = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2,$$

$$\mathrm{T} = \frac{d\mathrm{P}}{dt} + \frac{1}{2}\mathrm{P}^2 - 2\mathrm{Q}, \quad \mathrm{X} = \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2}p^2 - 2q.$$

Si P et Q peuvent s'exprimer en t comme p, q en x, et que $y = \mathrm{F}(x)$ soit une intégrale de la première équation, $z = \mathrm{F}(t)$ sera pareillement une intégrale de la seconde équation, et l'on aura

$$\mathrm{F}(x) = w\,\mathrm{F}(t).$$

La théorie des fonctions hypergéométriques et elliptiques donnent des exemples de cette propriété des fonctions P, Q, p, q, dont le plus important est dû à Legendre : les recherches de MM. Schwarz, Klein, Cayley, Fuchs, Brioschi ont pour point de départ le système d'équations ci-dessus.

Tacchini. — Observations des taches et facules solaires, faites à l'Observatoire du Collège Romain pendant le troisième trimestre de 1881. (948).

Tacchini. — Sur le spectre de la comète d'Encke. (949).

Tacchini. — Sur la comète Wendell, g 1881. (949).

Duponchel. — Rectification et addition à une Note précédente concernant la courbe des taches solaires. (950).

Poincaré. — Sur les courbes définies par les équations différentielles. (951).

Dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques* (1881), et qui a été analysé dans le *Bulletin*, l'auteur a étudié les courbes définies par une équation différentielle

$$\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}}.$$

Il étend les résultats précédemment obtenus aux équations de la forme

$$\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

F étant un polynôme entier.

En posant

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta),$$

où les φ sont des fonctions rationnelles, il en résultera, à cause de l'équation différentielle,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Cette équation définit une surface, et l'équation différentielle définit certaines caractéristiques tracées sur cette surface. Si l'on suppose que cette surface se compose d'un certain nombre de nappes fermées, on aura pour une de ces nappes la relation

$$N + F - C = 2 - 2p,$$

où N, F, C sont les nombres de nœuds, de foyers et de cols (*voir* le Mémoire cité), et où p est le genre de la nappe, c'est-à-dire le nombre des cycles séparés que l'on peut tracer de cette nappe sans la séparer en deux régions distinctes.

Deprez. — Distribution de l'énergie par l'électricité. (952).

N° 24; 12 décembre.

Stephanos. — Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne. (994).

L'auteur présente à l'Académie un Mémoire, dans lequel il étudie les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne par les seules ressources de l'Algèbre binaire.

Dans la première Partie, après une Introduction concernant les systèmes linéaires de formes binaires et les invariants et covariants de ces systèmes (*combinants* des formes binaires), il examine les relations qui ont lieu entre les formes d'un faisceau et sa jacobienne, ainsi que les relations qui existent entre deux faisceaux ayant une même jacobienne.

Dans la deuxième Partie, il étudie d'une manière détaillée le problème de la détermination des faisceaux de formes biquadratiques, ayant une jacobienne donnée, problème qui acquiert un intérêt particulier, par ce fait qu'on peut y ramener la recherche des substitutions linéaires qui font disparaître le second et l'avant-dernier terme d'une équation du dixième degré.

Laguerre. — Sur les équations de la forme

$$\sum \int_a^b e^{-zx} F(z)\, dz = 0.$$

(1000).

Une telle équation peut toujours se mettre sous la forme

$$\int_{b_0}^{b_0} e^{-z_1} F_0(z)\, dz + \ldots + \int_{a_n}^{b_n} e^{-zx} F_n(z)\, dz = 0,$$

où les quantités $a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n$ sont rangées par ordre de grandeur, ou sous la forme

$$\int_{a_0}^{b_n} e^{-zx} F(z)\, dz,$$

$F(z)$ étant une fonction discontinue qui s'annule dans des intervalles convenables.

Le nombre de ses racines positives est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$\int_{a_0}^{x} F(x)\,dx = 0,$$

qui sont comprises entre a_0 et a_n.

En supposant que les quantités F_0, F_1 se réduisent à des constantes, on a le théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} = 0,$$

où les nombres $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ *vont en croissant, si l'on forme les quantites* .

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 + a_1, \quad \ldots, \quad p_n = a_0 + \ldots + a_\iota,$$

le nombre des variations des termes de la suite

$$\begin{array}{l}
p_0(\alpha_1 - \alpha_0),\\
p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1),\\
p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1) + p_2(\alpha_3 - \alpha_2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + p_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1}),\\
p_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

est au plus égal au nombre des racines de l'équation proposée, qui sont supérieures à l'unité.

L'équation

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots = 0,$$

où les exposants sont positifs, a, au plus, autant de racines positives que l'équation

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha} + \frac{B}{\Gamma(\beta+1)}x^{\beta} + \frac{C}{\Gamma(\gamma+1)}x^{\gamma} + \ldots = 0.$$

L'équation

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0$$

a, au plus, autant de racines positives que l'équation

$$A + \frac{B}{1+\omega}x + \frac{C}{(1+\omega)(2+\omega)}x^2 + \ldots = 0,$$

ω étant une quantité positive quelconque.

On peut toujours déterminer une valeur de z telle que, pour cette valeur et les valeurs plus grandes, le nombre de variations que présente le développement de $f(x)e^{zx}$ suivant les puissances ascendantes de x soit exactement égal au nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, chacune de ces racines étant comptée avec son degré de multiplicité.

Halphen. — Sur une série d'Abel. (1003).

Il s'agit de la série

$$f(x) = f(0) + xf(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{2} f''(2\beta) + \dots$$
$$+ \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\dots n} f^{(n)}(n\beta) + \dots,$$

indiquée par Abel (t. II, p. 82).

Voici les conditions dans lesquelles cette formule est légitime :

Pour qu'il existe des quantités β rendant exacte cette formule, il faut et il suffit qu'il existe aussi des quantités α laissant fini le produit $\alpha^n f^{(n)}(x)$ quand n est infini.

Soit a le plus grand module des quantités α, et soit u la racine positive de $ue^{1+u} = 1$ ($u = 0,27\dots$); la formule est exacte pour les valeurs de β dont le module est moindre que le produit ua.

Soit p tout nombre compris entre 0 et n. Les produits $z^n e^p f^{(n)}(pz)$ restent finis, pour n infini, tant que le module de z reste inférieur à ua. Mais si z conserve un même argument ω et que son module croisse d'une manière continue au delà de ua, ces produits restent encore finis jusqu'à une autre limite $\varphi(\omega)$, dont la forme dépend de $f(x)$.

La condition nécessaire et suffisante à l'existence de la formule d'Abel consiste en ce que le point β soit à l'intérieur de la courbe $\rho = \varphi(\omega)$.

M. Halphen considère comme exemples les fonctions e^x, $e^{\lambda x}$. Un exemple curieux du cas où la série converge sans représenter la fonction est fourni par Abel lui-même à son insu. L'illustre géomètre l'applique en effet à la fonction $\log(1+x)$, et alors la série définit une transcendante nouvelle, tout autre que le logarithme, dont M. Halphen indique quelques propriétés intéressantes.

Appell et *Janaud*. — Remarques sur l'introduction de fonctions continues, n'ayant pas de dérivée, dans les éléments de la Mécanique. (1005).

Considérant, par exemple, une force discontinue dans tout intervalle, agissant sur un point mobile suivant une droite Ox et toujours dirigée suivant cette droite, les auteurs admettent que l'accroissement de vitesse pendant un intervalle de temps est au plus égal à celui qui se serait produit si la force avait constamment conservé sa plus grande valeur et au moins égal à celui qui se serait produit si la force avait constamment sa plus petite valeur : on en déduit la continuité de la vitesse; si la fonction $\varphi(t)$, qui représente la forme, est susceptible d'intégration, l'expression $\int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt$ représente les variations de vitesse pendant l'intervalle de temps $t_0 = t$.

Réciproquement, si l'on se donne la vitesse $v = f(t)$, et si la fonction $f(t)$ admet une dérivée $\varphi(t)$ susceptible d'intégration, la force $F = \varphi(t)$ produira le mouvement considéré; mais on ne changera pas le mouvement en modifiant cette force pour un nombre limité et même pour une infinité de valeur de t.

Elliot. — Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Θ. (1008).

Soient $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(p)}$ les p intégrales normales de première espèce relatives à une équation $F(x, y) = 0$, $w^{(k)}$ une intégrale normale de deuxième espèce,

$v^{(k)}$ une intégrale normale de troisième espèce, l'auteur apprend à former une fonction $\Theta\left\{\begin{smallmatrix} q \\ r \end{smallmatrix}\right\}$ qui ne dépend de la variable x que par l'intermédiaire de p intégrales $u^{(i)}$, des q intégrales $v^{(k)}$, des r intégrales $w^{(h)}$ et qui est une fonction holomorphe de ces $p+q+r$ quantités considérées comme variables indépendantes, et il indique quelques propriétés de ces fonctions.

N° 25; 19 décembre.

Le Cordier (P.). — Recherches sur les lois fondamentales de l'électrodynamique. (1055).

Laguerre. — Sur l'introduction des logarithmes dans les critériums qui déterminent une limite supérieure du nombre des racines d'une équation qui sont comprises entre deux nombres donnés. (1061).

Considérons l'équation

$$A_0 F(a_0 x) + A_1 F(a_1 x) + \ldots + A_n F(a_n x) = 0,$$

où $F(x)$ désigne une fonction quelconque de x telle que, dans son développement, tous les coefficients soient positifs, et où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des quantités positives rangées par ordre de grandeur; si l'on pose

$$p_0 = A_0,\quad p_1 = A_0 + A_1,\quad p_2 = A_0 + A_1 + A_2, \ldots,\quad p_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_n;$$

le nombre m des racines positives de cette équation est au plus égal au nombre de variations de la suite

$$p_0,\quad p_1,\quad p_2, \ldots,\quad p_n,$$

ou de la suite

$$\begin{array}{l}
p_0 \log \dfrac{a_0}{a_1}, \\[2ex]
p_0 \log \dfrac{a_0}{a_1} + p_1 \log \dfrac{a_1}{a_2}, \\[2ex]
p_0 \log \dfrac{a_0}{a_1} + p_1 \log \dfrac{a_2}{a_1} + p_2 \log \dfrac{a_3}{a_2}, \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[1ex]
p_0 \log \dfrac{a_0}{a_1} + p_1 \log \dfrac{a_2}{a_1} + \ldots + p_{n-1} \log \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \\[1ex]
p_n, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Fuchs (L.). — Sur une équation différentielle de la forme

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0.$$

(1063).

La recherche du cas où les équations

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = F(u) = (u - a_1)^{\alpha_1}(u - a_2)^{\alpha_2} \ldots$$

s'intègrent par des fonctions uniformes et doublement périodiques a été complètement effectuée par MM. Briot et Bouquet. L'auteur montre comment la méthode exposée par M. Hermite, dans son *Cours d'Analyse,* pour intégrer les équations de la forme $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$, conduit aux résultats obtenus par MM. Briot et Bouquet.

Pellet. — Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier. (1065).

Weill (*M.*). — Théorème d'Arithmétique. (1066).

N° 26; 26 décembre.

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (1099).

Voir plus haut.

Bigourdan. — Éléments et éphémérides de la comète g 1881 (Swift). (1122).

Darboux. — Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables indépendantes. (1123).

Picard (*É.*). — Sur quelques exemples de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. (1126).

Si l'on considère la courbe du second genre

$$y^2 = x(x-1)(x-a)^2,$$

l'intégrale de première espèce

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(1-m\lambda)(x-a)+(1-m\lambda^2)y}{y^2}\,dx,$$

où

$$\lambda = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

et où m est un nombre réel et commensurable, n'a que deux périodes.

Il en est de même de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \frac{b^{\frac{1}{4}}(m+i)-(m-i)x^2}{\sqrt{x^8+ax^4+b}},$$

relative à la courbe du troisième genre

$$y^2 = x^8 + ax^4 + b,$$

en supposant m commensurable.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS (1).

Tome XVI; 1879.

Cayley. — Sur la cinématique du plan. (1-8).

Un plan variable se meut sur un plan fixe. Chaque point du plan variable décrit une courbe sur le plan fixe; chaque courbe de ce plan a une enveloppe sur le plan fixe. Réciproquement chaque point du plan fixe trace sur le plan variable une courbe et chaque courbe de ce plan fixe donne lieu à une enveloppe sur le plan variable. Enfin, le mouvement relatif peut être produit par le roulement d'une courbe du plan variable sur une courbe du plan fixe. M. Cayley reprend la théorie analytique de cette question et en fait l'application au cas le plus simple.

Muir (*Th.*). — Sur le développement de l'expression

$$(x+y)^n+(-x)^n+(-y)^n.$$

(9-14).

Cet article se relie à celui de M. Glaisher sur le théorème, dû à Cauchy, que $(x+y)^n-x^n-y^n$ est divisible par x^2+xy+y^2 si n est de la forme $6m\pm 1$ et par $(x^2+xy+y^2)^2$ si n est de la forme $6m+1$.

L'auteur se propose de généraliser cette proposition et il obtient en particulier le théorème suivant :

Posons

$$\beta = x^2+xy+y^2,$$
$$\gamma = xy^2+x^2y.$$

L'expression $(x+y)^n+(-x)^n+(-y)^n$ *n'est divisible ni par* β *ni par* γ *si* $n=6p$; *elle est divisible par* $\beta^2\gamma$ *si* $n=6p+1$, *par* β *si* $n=6p+2$, *par* γ *si* $n=6p+3$, *par* β^2 *si* $n=6p+4$, *par* $\beta\gamma$ *si* $n=6p+5$.

Considérant de même le polynôme

$$(x+y+z)^{2m+1}-x^{2m+1}-y^{2m+1}-z^{2m+1},$$

M. Muir montre qu'il est toujours divisible par

$$\frac{1}{3}[(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3].$$

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur un déterminant de forme spéciale sur certaines fonctions de n variables analogues au sinus et au cosinus. (15-33).

Ce Mémoire peut être considéré comme la suite d'un travail précédent : « Sur les facteurs d'une forme spéciale de déterminant » inséré au t. XV, p. 347-356

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 137.

du *Quarterly Journal*. L'auteur y considère les n fonctions

$$\begin{aligned}
\Phi_0\ (x) &= 1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\\
\Phi_1\ (x) &= x + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Phi_{n-1}(x) &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,
\end{aligned}$$

et il en montre l'analogie avec le sinus et le cosinus hyperboliques, les formules d'addition, les relations différentielles, la généralisation de la formule de Moivre, etc.

Mais il faut remarquer qu'elles ne donnent pas la véritable généralisation du sinus et du cosinus. Il faudrait avoir n fonctions de $n-1$ variables liées par une seule relation. M. Glaisher rappelle que ces n fonctions ont été en effet obtenues par M. Appell dans un intéressant Mémoire publié en 1877 dans les *Comptes rendus* et il reprend, en les développant, les résultats de ce travail.

Tanner (H.-W.-Lloyd). — Sur certaines fonctions analogues au Pfaffian. (34-45).

Considérons n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$. Si l'on forme le déterminant

$$\left|\begin{array}{cccc}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
y_1 & y_2 & \ldots & y_n\\
\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n}\\
y_1 & y_2 & \ldots & y_n\\
\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right|$$

et que l'on suppose que, dans chaque terme, les différentiations portent sur la partie qui les suit, alors, si le déterminant se termine par une ligne

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial x_n},$$

il indique une opération que l'auteur désigne par le symbole $\{1, 2, \ldots, n\}$; si, au contraire, le déterminant se termine par une ligne

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

il acquiert un sens quantitatif; mais on peut le transformer en un opérateur si on multiplie la dernière ligne par une fonction u. On désigne cette opération par le symbole $[1, 2, \ldots, n]$. L'auteur développe différentes propriétés relatives à ces deux symboles, dont nous venons de faire connaître la définition.

Tanner (H.-W.-Lloyd). — Sur la transformation d'une expression différentielle linéaire. (45-64).

Dans ce Mémoire, l'auteur considère l'expression différentielle

$$y_1\,dx_1 + \ldots + y_n\,dx_n,$$

où $y_1, \ldots, y_n$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, et il donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle puisse être ramenée à l'une des formes canoniques

$$du_1 + v_2\,du_2 + \ldots + v_r\,du_r,$$
$$v_1\,du_1 + \ldots + v_r\,du_r.$$

La méthode suivie par l'auteur repose sur la considération de certains déterminants symboliques dont l'étude fait l'objet du présent Mémoire.

Jeffery (*H.-M.*). — Sur les courbes planes de troisième classe à trois foyers singuliers. (65-81).

Continuation des études de l'auteur publiées dans le Volume précédent. Dans les articles antérieurs, l'auteur avait classé les cubiques de troisième classe qui ont un triple ou un double foyer. Il traite maintenant le cas de trois foyers simples et effectue la classification d'après la position de ces trois foyers relativement à la droite de l'infini. Pour chaque position des trois foyers, M. Jeffery donne l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles. Il discute en détail les différents cas et examine en particulier ce qui concerne les tangentes doubles.

Coates (*C.-V.*). — Sur le mouvement tourbillonnaire à l'intérieur et à l'extérieur d'un cylindre elliptique. Seconde Partie. (81-88).

L'auteur étend les résultats connus relativement à un cylindre circulaire au cas d'un cylindre elliptique. Il emploie pour cela les coordonnées elliptiques qu'il substitue aux coordonnées polaires employées dans le cas du cylindre circulaire. La difficulté de la question consiste dans la discontinuité qui se présente pour le cas du mouvement à l'intérieur. L'auteur surmonte cette difficulté en employant des fonctions et il montre que, même aux foyers, les vitesses demeurent finies et continues.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le théorème de Cauchy relatif aux facteurs de $(x+y)^n - x^n - y^n$. (89-98).

Extension des résultats déjà donnés par l'auteur et par M. Muir. L'auteur démontre différentes identités et en fait des applications.

Jeffery (*H.-M.*). — Sur la classification des courbes planes du troisième ordre. (98-109).

Ces courbes ont déjà été classées par Plücker d'après la nature de leurs asymptotes et par M. Cayley [*On the classification of cubic curves* (*Cambridge Phil. Trans.*, 1866)].

L'auteur se propose de compléter ces recherches en cherchant l'enveloppe de la droite satellite (droite passant par les points de rencontre des asymptotes et de la courbe), quand les cubiques sont assujetties à des conditions déterminées. En particulier, l'enveloppe de cette droite est déterminée quand, les asymptotes restant fixes, la cubique est assujettie à avoir un rebroussement.

Cayley (*A.*). — Note sur la théorie des surfaces apsidales. (109-112).

L'illustre géomètre donne un système de formules analytiques qui permet d'établir d'une manière réellement simple que les surfaces apsidales de deux surfaces polaires réciproques sont elles-mêmes polaires réciproques.

Hicks (*W.-M.*). — Sur le mouvement de deux cylindres dans un fluide. (113-140 et 193-219).

L'auteur suppose que les axes des deux cylindres sont indéfinis et demeurent toujours parallèles, que le mouvement est le même dans tous les plans perpendiculaires à ces axes; en sorte que le problème dépend de deux dimensions seulement et, au lieu des cylindres, on peut prendre les cercles qui leur servent de base. Il s'agit d'abord de déterminer le potentiel des vitesses du fluide incompressible dans lequel se meuvent les deux cercles. Cette détermination s'effectue sans difficulté, si l'on prend des coordonnées curvilignes correspondantes au système formé de cercles orthogonaux; on est alors ramené à un problème antérieurement traité par l'auteur. L'auteur discute d'abord le cas où les deux cercles se touchent; puis il examine et développe en détail tout ce qui concerne le cas général.

Townsend (*R.*). —Sur l'équation de M. Jellett dans la théorie du potentiel et sur son application à la détermination de l'attraction d'un disque circulaire, quand l'attraction est en raison inverse d'une puissance quelconque de la distance. (140-151).

La proposition de M. Jellett, dont l'auteur fait usage, est la suivante :

Soit, pour k variables $x, y, z, \ldots,$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \ldots,$$

et soit

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + \ldots;$$

alors

$$V_n = \Sigma\mu\,\frac{r^{n+1}}{n+1}$$

peut être appelé le potentiel des points (a, b, c) de masses μ dans un espace à k dimensions, quand l'attraction est proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de r.

L'équation de M. Jellet est

$$\Delta V_n = (n-1)(n+k-1)V_{n-2}.$$

Ce théorème élégant conduit l'auteur à une solution simple de la question proposée.

Lewis (*T.-C.*). — Application de la Géométrie à quatre dimensions à la détermination, sans aucune intégration, des moments d'inertie des solides. (152-159).

L'auteur considère successivement le tétraèdre, le parallélépipède et l'ellipsoïde.

Roberts (*S.*). — Sur l'impossibilité d'une extension générale du théorème d'Euler sur le produit de deux sommes de quatre carrés au produit de deux sommes de 2^n carrés, où n est plus grand que 3. (159-170).

Il s'agit ici d'une question très intéressante et sur laquelle ont été émises les opinions les plus contradictoires. On sait, depuis Euler, que le produit d'une somme de quatre carrés par une somme de quatre carrés est encore une somme de quatre carrés. Ce théorème a été généralisé par Lagrange, qui a substitué à la forme $x^2+y^2+z^2+t^2$ la suivante : $x^2+ay^2+bz^2+abt^2$. On a reconnu également que le produit d'une somme de huit carrés par une somme de huit carrés est encore une somme de huit carrés, ce qui a porté quelques personnes à penser que le théorème d'Euler peut s'étendre aux sommes composées de 2^m carrés, m étant quelconque. L'induction était séduisante, le théorème étant démontré pour toutes les valeurs de m inférieures à 4. Cependant elle est inexacte et M. Roberts montre qu'il est impossible de généraliser le procédé qui réussit dans les cas que nous venons d indiquer.

L'étude de cette question est d'autant plus importante qu'elle joue un rôle essentiel dans toutes les équations relatives à la généralisation de la méthode des quaternions.

Coates (*C.-V.*). — Sur le vortex annulaire. (170-178).

L'auteur considère un filet tourbillonnaire de petite section. On a à développer une intégrale elliptique complète de première et de seconde espèce dont le module est très voisin de 1. L'auteur effectue ce développement en conservant seulement les termes qui sont proportionnels au carré du module complémentaire, et il compare les résultats ainsi obtenus avec ceux que l'on connaît relativement au mouvement d'un filet tourbillonnaire rectiligne.

Cayley (*A.*). — Application de la méthode de Newton-Fourier aux racines imaginaires d'une équation. (179-186).

M. Cayley considère l'équation du second degré

$$x^2 = n^2,$$

et il cherche quelle est la condition pour que, en partant d'une valeur approchée x_0 et en appliquant la méthode de Newton, on s'approche indéfiniment de l'une des racines. La solution de cette question est fournie par la relation

$$\frac{x_p - n}{x_p + n} = \left(\frac{x_{p-1} - n}{x_{p-1} + n}\right)^2,$$

qui existe entre deux valeurs approchées consécutives.

Sharp (*W.-C.-J.*). — Sur les courbes du troisième ordre. (186-192).

Démonstrations élémentaires de quelques propriétés fondamentales des cubiques par l'emploi de l'équation réduite

$$ax^3 + 3c_1 xz^2 + cz^3 + 3b_3 y^2 z = 0.$$

Warren (*J.-W.*). — Sur une forme particulière de la formule de Gauss, donnant la mesure de la courbure. (219-224).

La courbure k peut être mise sous la forme

$$Bk = \frac{\partial^2 \omega}{\partial p \partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p},$$

où ω est l'angle sous lequel se coupent les courbes $p = c$, $q = c'$.

Cayley (*A.*). — Sur une formule covariante. (224-226).

M. Cayley remarque que, si l'on considère la formule de Newton

$$x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

on a

$$x_1 - a = \frac{(x-a)f'(x) - f(x)}{f'(x)}.$$

Le numérateur de cette expression admet la racine double $x = a$ et par conséquent le discriminant de l'expression

$$(x - x_1)f'(x) - f(x)$$

contiendra $f(x_1)$ en facteur. Cela le conduit à considérer le covariant

$$(\xi y - \eta x)\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta}\right) f(\xi, \eta) - (\alpha y - \beta x) f(\xi, \eta),$$

dont le discriminant par rapport à ξ, η est une fonction d'ordre $2n - 2$, soit en x, y, soit en α, β. Ce discriminant contiendra $f(x, y)$ en facteur, et il restera un polynôme du degré $n - 2$ en x, y, $2n - 2$ en α, β, et $2n - 3$ par rapport aux coefficients de $f(\xi, \eta)$. M. Cayley vérifie ces résultats dans les cas les plus simples, où f est du second et du troisième degré.

Greenhill (*A.-G.*). — Mouvement d'un fluide compris entre des cylindres elliptiques confocaux et entre des ellipsoïdes homofocaux. (227-256).

Un fluide est compris entre deux cylindres elliptiques indéfinis confocaux. L'un des deux cylindres commence à se déplacer soit parallèlement à l'un des axes de la section droite, soit à tourner autour de l'axe commun, pendant que l'autre reste fixe. L'auteur détermine le potentiel des vitesses relatif au mouvement initial du fluide. La solution a exactement la même forme que dans le problème connu du mouvement d'un seul cylindre dans un fluide indéfini. L'auteur examine ensuite le même problème dans le cas du mouvement simultané des deux cylindres. Il résout des questions analogues relativement à deux ellipsoïdes confocaux. En terminant, il discute très en détail, par le moyen des fonctions elliptiques, le mouvement d'un ellipsoïde de révolution allongé ou aplati dans un fluide indéfini.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur certains théorèmes symboliques du professeur Crofton. (227-256).

Ces théorèmes concernent certains opérateurs exponentiels.

Rappelons les notations $D = \frac{d}{dx}$, $\exp. u = e^u$, on aura

$$\exp.\left(\frac{1}{2}a^2 D^2\right) f(x) = \exp.\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right) F(a^2 D) . \exp.\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$\exp.\left(\frac{1}{2}x^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}D^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}x^2\right)F(x)$$
$$= \exp.\left(\frac{1}{2}D^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}x^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}D^2\right)F(x),$$

$$\exp.\left(-\frac{1}{2}x^2\right) f(D) \exp.\left(\frac{1}{2}x^2\right) F(x) = \exp.\left(\frac{1}{2}D^2\right) f(x) \exp.\left(-\frac{1}{2}D^2\right) F(x),$$

$$\exp.\left(\frac{1}{2}a^2 D^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}b^2 x^2\right)F(x)$$
$$= \frac{1}{(1-a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}\exp.\left(\frac{\frac{1}{2}b^2x^2}{1-a^2b^2}\right)\exp.\left[\frac{1}{2}a^2(1-a^4b^2)D^2\right]F\left(\frac{x}{1-a^2b^2}\right)$$
$$= \frac{1}{(1-a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}\exp.\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)F(a^2D)\exp.\left[\frac{\frac{1}{2}x^2}{a^2(1-a^2b^2)}\right],$$

$$\varphi\left(\frac{d}{dD}\right) f(D) F(x) = \varphi(x - x') f(D) F(x).$$

Dans le développement de cette dernière formule x' désigne x précédant l'opérateur $f(D)$ et x désigne cette variable suivant l'opérateur.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur certains théorèmes symboliques dérivés de la série de Lagrange. (263-268).

Cet article contient différentes formules symboliques dont quelques-unes avaient été déjà données par M. Cayley.

Cayley (*A.*). — Note sur une série hypergéométrique. (268-270).

Vérification de ce résultat de M. Schwarz : l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\frac{2}{3} - \frac{7}{6}x}{x(1-2)}\frac{dy}{dx} + \frac{\frac{1}{48}}{x(1-x)}y = 0,$$

admet l'intégrale algébrique

$$y^2 = \sqrt{\alpha - \alpha^5 x^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{-\alpha^5 + \alpha x^{\frac{1}{8}}},$$

α étant une racine de l'équation $\alpha^4 - \alpha^2 + 1 = 0$.

Stearn (*H.-T.*). — Sur les couches tourbillonnaires. (271-278).

Un fluide a ses particules animées d'un mouvement de rotation à l'intérieur d'un cylindre infiniment mince de rayon a, de telle manière qu'un mouvement tourbillonnaire est dirigé suivant l'axe de ce cylindre, pendant que le cylindre est entouré extérieurement de fluide en repos. Le fluide en repos et le fluide en mouvement sont séparés par une cloison infiniment mince. L'auteur recherche quel effet l'éloignement brusque de cette enveloppe a sur le mouvement du fluide en repos.

Pour que ce fluide demeure encore en repos, il faut remplacer la cloison solide par une couche infiniment mince de filets tourbillonnaires. Si $2r$ est l'épaisseur de cette couche, la surface cylindrique doit tourner avec une vitesse déterminée $\frac{K}{2a^2}$ autour de l'axe, pendant que ses génératrices tournent sur elles-mêmes avec la vitesse $-\frac{K}{2ar}$, a désignant le rayon du cylindre. Une telle couche de filets tourbillonnaires a donc pour effet de supprimer, comme la cloison, tout effet de tourbillon central sur le liquide qui l'environne. L'auteur termine en généralisant ces résultats.

Townsend (*R.*). — Sur le moment d'inertie d'un anneau circulaire solide engendré par la révolution d'une courbe à centre fermée. (279-280).

L'auteur fait connaître une proposition générale sur ces moments.

Cayley (*A.*). — Sur la fonction octaédrique. (280-281).

Il s'agit de la fonction U du sixième ordre considérée par M. Klein et qui est caractérisée par cette propriété que le covariant $(UU)^4$ est identiquement nul.

Supposant que, par une substitution linéaire, U ait été débarrassé de ses termes extrêmes, M. Cayley montre comment cette condition fera connaître U.

Cayley (*A.*). — Sur certaines identités algébriques. (281-282).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur un lieu géométrique relatif à l'ellipsoïde. (283-294).

Le lieu des milieux des cordes de longueur constante dans l'ellipse est une courbe du quatrième ordre. Pour l'ellipsoïde, ce lieu se compose d'une portion de l'espace comprise entre les nappes d'une surface du sixième ordre. C'est l'étude de cette surface qui est l'objet principal du Mémoire de M. Glaisher. L'auteur en trouve différentes équations, il en étudie la forme, les sections par les plans principaux, etc.

Greenhill (*A.-G.*). — Sur l'équation de Riccati et l'équation de Bessel. (294-298).

L'équation de Riccati

$$\frac{du}{dx} + bu^2 = cx^m,$$

qui, comme on sait, se transforme par la substitution

$$u = \frac{1}{bw}\frac{dw}{dx},$$

dans l'équation linéaire

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = bcx^m w,$$

se transforme encore, si l'on pose

$$\frac{4bc}{(m+2)^2} = -k^2, \quad \frac{1}{m+2} = n, \quad \omega = y\sqrt{x}, \quad x^{m+2} = r^2,$$

dans l'équation

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r\frac{dy}{dr} + (k^2 r^2 - n^2)y = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction de Bessel $j_n(kr)$. La condition que la série qui détermine j_n soit limitée équivaut, en ce qui concerne l'équation de Riccati, à la condition bien connue $m = -\frac{4i}{2i+1}$, où i désigne un nombre entier quelconque.

De la même manière, l'équation plus générale

$$x^2 w'' + axw' + (bx^m + c)w = 0$$

peut se ramener à l'équation de Bessel, et la condition pour qu'elle soit intégrable en termes finis se traduit par la condition

$$m = \frac{2}{2i+1}\sqrt{(a-1)^2 - 4c}.$$

Sharp (*W.-J.-C.*). — Sur les cubiques planes. (298-305).

Suite du Mémoire signalé plus haut; étude des invariants et des covariants; analogie de cette théorie et de celle des quartiques binaires, etc.

Hill (*J.-M.*). — Du mouvement permanent de l'électricité dans un courant laminaire sphérique. (306-323).

L'écoulement de l'électricité dans les surfaces d'épaisseur très petite et partout la même a déjà été traité par divers auteurs. M. Hill forme d'abord l'équation fondamentale du potentiel pour le cas d'une couche sphérique mince; si l'on détermine un point par sa longitude φ et sa latitude χ, l'équation du potentiel sera, dans le cas d'un courant constant,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \cos\chi \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\cos\chi \frac{\partial V}{\partial \chi}\right) = 0,$$

ou, en posant $\mu = \log\frac{1+\sin\chi}{\cos\chi}$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} = 0.$$

Cette équation sert de base aux recherches ultérieures de l'auteur.

Crofton. — Théorèmes relatifs au calcul des opérations. (323-329).

L'auteur part des équations données par Boole

$$f[\mathrm{D}+\varphi'(x)]\mathrm{X} = \exp.[-\varphi(x)]f(\mathrm{D})\exp.\varphi(x)\mathrm{X},$$
$$f[x+\varphi'(\mathrm{D})]\mathrm{X} = \exp.[\varphi(\mathrm{D})]f(x)\exp.[-\varphi(\mathrm{D})]\mathrm{X},$$

et en déduit seize autres formules semblables, dont quelques-unes ont été aussi données par Boole et M. Glaisher.

Glaisher (J.-W.-L.). — Addition au Mémoire « Un Théorème de Trigonométrie. » (329-337).

Le théorème auquel se reporte l'auteur est le suivant : si l'on a

$$\left(1+\frac{ix}{a}\right)\left(1+\frac{ix}{b}\right)\cdots = \mathrm{A}+i\mathrm{B},$$

on a aussi

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}+\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{b}+\ldots = \operatorname{arc\,tang}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

M. Glaisher indique de nouvelles applications de cette proposition. Nous citerons par exemple les suivantes :

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{2q\cos 2x}{1-q^2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{2q^3\cos 2x}{1-q^6} + \operatorname{arc\,tang}\frac{2q^5\cos 2x}{1-q^{10}}$$
$$= \operatorname{arc\,tang}\frac{2q\cos 2x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1+2q^4\cos 4x + 2q^{16}\cos 8x + \ldots}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{\dfrac{4q\cos 2x}{1-q^2} - \dfrac{4q^3\cos 6x}{1-q^6} + \ldots}{1 - \dfrac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} + \ldots}.$$

Lewis (T.-C.). — Sur les images des tourbillons par rapport à une sphère. (338-347).

On donne un filet tourbillonnaire circulaire et une sphère dont le centre se trouve sur l'axe du filet. On doit déterminer un second filet circulaire de même axe par la condition que sous l'action des deux filets la vitesse du liquide à la surface de la sphère soit tangente à la sphère. On trouve que le second filet doit être l'image du premier, par rapport à la sphère. L'auteur traite ensuite la même question en supposant l'existence de plusieurs filets circulaires, et il montre que la solution n'est possible que si ces filets sont sur une même sphère concentrique à la sphère donnée. M. Lewis est ainsi conduit à étudier le mouvement d'un filet circulaire à l'intérieur d'une sphère fixe. Il termine en donnant quelques résultats approchés, obtenus par le développement en série des formules connues.

Jeffery (H.-M.). — Sur les cubiques planes de la troisième classe à trois foyers singuliers. (348-374).

Dans le Mémoire antérieur, l'auteur avait considéré les cas où un ou plusieurs foyers sont à l'infini, ceux où un ou plusieurs foyers se confondent en un foyer multiple; il examine maintenant l'hypothèse dans laquelle ils sont distincts et forment soit un triangle équilatéral, soit un triangle isoscèle, soit un triangle scalène. A la considération des foyers, l'auteur joint celle du point satellite ou point de concours des trois tangentes menées des trois foyers à la courbe.

Pearson (*K.*). — Sur la déformation d'une sphère solide élastique. (375-381).

On doit rechercher la forme que prend une sphère élastique sous l'action de forces agissant normalement sur la surface et variant d'un point à un autre. L'auteur montre que le problème inverse peut aussi être résolu, et il fait deux applications intéressantes de ses formules.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une formule de la théorie des fonctions elliptiques. (382-383).

L'auteur donne des expressions de

$$\mathrm{cn}^2(u+v)\,\mathrm{cn}^2(u-v), \quad \mathrm{dn}^2(u+v)\,\mathrm{dn}^2(u-v).$$

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, diretti dal prof. FRANCESCO BRIOSCHI (¹).

2ᵉ Série. — Tome IX; 1878-1879.

Pepin. — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (1-10).

Rectifications de quelques résultats contenus à la fin du Mémoire de l'auteur, inséré dans les *Annali di Matematica* (t. V, p. 185).

Brioschi. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre. (11-20).

Les recherches que nous résumons ci-après peuvent être regardées comme la suite de celles qui sont contenues dans la lettre à M. Klein, publiée dans les *Mathematische Annalen* (t. XI, p. 401) sous ce titre : *La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre.*

Partant de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

désignant par $f(y_1, y_2)$ une forme binaire d'ordre m, et regardant dans cette forme y_1 et y_2 comme des solutions particulières de l'équation (1), on pourra poser

$$f(y_1, y_2) = \mathrm{F}(x);$$

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 9.

un calcul facile, fondé sur l'identité bien connue

$$y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = Ce^{-\int p\,dx},$$

conduit à la relation

$$(2)\quad h(y_1, y_2) = \frac{e^{\int p\,dx}}{m^2(m-1)C^2}[mFF'' - (m-1)F'^2 + mpFF' + m^2qF'^2],$$

où

$$h(y_1, y_2) = f_{11}f_{22} - f_{12}^2$$

est la hessienne de la forme f. En désignant ensuite par $P(x)$ le second membre de l'équation (2) et par $\theta(y_1, y_2)$ le covariant d'ordre $3(m-2)$

$$\theta(y_1, y_2) = 2(f_1 h_2 - f_2 h_1),$$

on parvient à la relation

$$(3)\quad \theta(y_1, y_2) = \frac{e^{\int p\,dx}}{m(m-2)C}[2(m-2)F'(x)P(x) - mP'(x)F(x)].$$

Si l'on pose

$$z = y_1 y_2,$$

et que l'on prenne $f = z^r$, puis que l'on suppose

$$p = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad q = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont des polynômes entiers en x de degrés $s, s-2$, la relation (3) donnera

$$(4)\quad \begin{cases} 2\varphi[3r(r-1)FF'F'' - (r-1)(2r-1)F'^3 - r^2F^2F'''] \\ \quad + 3rF\varphi'[(r-1)F'^2 - rFF''] - r^2(\varphi'' + 8\psi)F^2F' - 4r^3\psi'F^3 = 0, \end{cases}$$

équation qui, pour $r = 1$, se réduit à

$$(5)\quad 2\varphi F''' + 3\varphi' F'' + (\varphi'' + 8\psi)F' + 4\psi' F = 0.$$

Or une première remarque essentielle relative à cette équation consiste en ce qu'elle peut être vérifiée, si l'on choisit convenablement le polynôme $\psi(x)$, en remplaçant $F(x)$ par un polynôme en x du degré n; ce qui se voit immédiatement en comptant les équations qui résultent de l'hypothèse que le polynôme $F(x)$ vérifie l'équation et le nombre des coefficients arbitraires dont on dispose : s'il en est ainsi, on aura, sous forme d'un polynôme, le produit $F(x)$ de deux solutions y_1, y_2 de l'équation (1), et l'équation

$$y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = Ce^{-\int p\,dx}$$

permettra d'effectuer l'intégration.

En prenant

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad \psi(x) = \alpha x + \beta,$$

et posant ensuite

$$x - e_1 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{sn}^2 u,$$
$$x - e_2 = (e_1 - e_2)\,\mathrm{cn}^2 u,$$
$$x - e_3 = (e_1 - e_3)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

où

$$k^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1},$$

et où e_1, e_2, e_3 sont les racines du polynôme $\varphi(x)$, M. Brioschi montre que l'équation (1) revient à l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{du^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u + h].$$

Un examen analogue de l'équation (4) conduit maintenant à ce résultat : En prenant pour $\varphi(x)$ le même polynôme, et pour $\psi(x)$ une expression de la forme $\alpha x + \beta$, où α, β sont des coefficients convenables, on peut faire en sorte que le produit

$$y_1^2 y_2^2 = \mathrm{F}(x)$$

soit un polynôme qui vérifie l'équation (4), et ce polynôme est de la forme

$$\mathrm{F}(x) = (x - \xi)\mathrm{P}^2,$$

où ξ est une racine de $\varphi(x)$ et P un polynôme en x à coefficients convenables.

On parvient ainsi, pour l'équation (1), à la forme

$$\frac{d^2y}{du^2} = \left[\frac{n(n+2)}{4} k^2 \operatorname{sn}^2 u + h\right] y,$$

et cela par le même changement de variables que précédemment. Cette équation se réduit à celle de Lamé pour n pair, et pour n impair il suit de ce qui précède que le produit $y_1 y_2$ peut se mettre sous la forme

$$y_1 y_2 = \mathrm{P}(\operatorname{sn}^2 u) \operatorname{sn} u;$$

M. Brioschi montre que les intégrales exprimées en x sont algébriques.

Le cas de $n = 1$ est particulièrement intéressant : l'équation différentielle prend alors la forme

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y' - \frac{3}{4}\frac{x}{\varphi(x)} y = 0;$$

les intégrales y_1, y_2 rendent alors égale à la constante $4\mathrm{C}^2$ la forme biquadratique

$$f(y_1, y_2) = \eta_2 y_1^4 - 6\xi y_1^2 y_2^2 + \eta_1 y_2^4,$$

où

$$\eta_1 = 3\xi - \sqrt{\varphi'(\xi)}, \quad \eta_2 = 3\xi + \sqrt{\varphi'(\xi)},$$

et dont les invariants sont g_2 et g_3.

Puis l'équation (2) donne

$$h(y_1, y_2) = -4\mathrm{C}^2 x.$$

L'équation étudiée contient comme cas particulier (pour $g_2 = 0$) l'équation hypergéométrique du tétraedre

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{6}\frac{4 - 7z}{z(1-z)}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{48}\frac{1}{z(1-z)} y = 0,$$

rencontrée par M. Schwarz dans son Mémoire sur la série hypergéométrique.

Enfin considérons l'équation

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y' + \frac{\alpha t(x) + \beta}{\varphi(x)}y = 0,$$

où la fonction $\varphi(x)$ et les constantes α, β ont la même signification que précédemment, et où $t(x)$ vérifie l'équation

$$\frac{dt}{\sqrt{\Phi(t)}} = \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

en posant

$$\Phi(t) = 4t^3 - G_2 t - G_3.$$

M. Brioschi montre que l'équation différentielle se transforme dans l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\frac{dy}{dt} + \frac{\alpha t + \beta}{\Phi(t)}y = 0,$$

qui appartient à la classe considérée.

Hermite. — Sur l'équation de Lamé. (21-24).

M. Hermite était parvenu, de son côté, à l'équation différentielle du troisième ordre, que vérifie le produit de deux solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

Partant de l'équation du second ordre

$$(1)\qquad 2Ay'' + A'y' = By,$$

on parvient à l'équation du troisième ordre

$$(2)\qquad 2Az''' + 3A'z'' + A''z' = 4Bz' + 2B'z,$$

et, en faisant dans l'équation de Lamé

$$t = \mathrm{sn}^2 x,$$

on aura pour transformée l'équation (1), où

$$A = t(1-t)(1-k^2t),$$
$$2B = n(n+1)k^2t + h.$$

L'équation (2) admet comme solution un polynôme $F(t)$ de degré n; cette remarque et l'égalité

$$y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt} = \frac{C}{\sqrt{A}}$$

conduisent à l'intégrale générale

$$(3)\qquad y = Ge^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{C}{\sqrt{AF(t)}}\right]dt} + G'e^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)} - \frac{C}{\sqrt{AF(t)}}\right]dt},$$

où G, G′ sont des constantes arbitraires.

Maintenant, l'équation (2) conduit aisément à l'équation

$$(4)\qquad A(2zz'' - z'^2) + A'zz' = 2Bz^2 - N,$$

où N est une constante, et l'on trouve que cette constante est liée à C par la relation

$$C = \sqrt{N};$$

lorsque N est différent de zéro, le polynôme $F(t)$ n'a que des racines simples en désignant par τ l'une de ses racines et faisant

$$\frac{1}{F(t)} = \sum \frac{1}{F'(\tau)(t-\tau)},$$
$$T = A(\tau),$$

l'équation (4) donne

$$TF'^2(\tau) = N,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{N}}{F(t)} = \sum \frac{\sqrt{T}}{t-\tau};$$

si maintenant l'on fait $t = \operatorname{sn}^2 x$, $\tau = \operatorname{sn}^2 \omega$, en prenant

$$\sqrt{T} = \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega,$$

on effectuera sans difficulté les quadratures qui figurent dans l'équation (3), et l'on trouvera pour les deux parties de l'intégrale générale

$$\frac{H(x-\omega_1)\,H(x-\omega_2)\ldots H(x-\omega)}{\Theta^n(x)}\, e^{x\sum \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$
$$\frac{H(x+\omega_1)\,H(x+\omega_2)\ldots H(x+\omega)}{\Theta^n(x)}\, e^{-x\sum \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

où $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont les diverses valeurs de ω.

Fuchs. — Sur une classe d'équations différentielles qui s'intègrent au moyen des fonctions abéliennes ou elliptiques. (25-34).

M. Fuchs a donné, dans un Mémoire inséré dans le t. LXXXI du *Journal de Borchardt,* les résultats suivants :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py$$

admette une intégrale de la forme

$$y = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{4}}\int \frac{dz}{\varphi(z)}},$$

où $\varphi(z)^2$ est une fonction rationnelle de z et λ une constante, consiste en ce que P ait la forme

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{d\log\varphi}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\log\varphi}{dz^2} - \frac{\lambda}{4\varphi^2}.$$

Si λ est différent de zéro, l'équation admet deux intégrales de cette forme qui ne diffèrent que par le signe du radical qui figure en exposant : ces deux intégrales forment un système fondamental y_1, y_2; si $\lambda = 0$, un tel système est donné par les formules

$$y_1 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} \int \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

P est infini en même temps que $\varphi(z)$; pour une racine b de $\varphi(z)$, P n'est infini que si l'on a

$$\varphi'(b)^2 = -\lambda.$$

Considérons maintenant l'équation

$$(1)\qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} + H(z)u = 0,$$

où $R(z), H(z)$ sont des polynômes entiers en z de degrés m et $m-2$, et où $R(z)$ n'a que des racines simples; on la ramènera au type considéré par la substitution

$$u = R(z)^{-\frac{1}{4}}y,$$

et on posera

$$\varphi = GR^{\frac{1}{2}};$$

en ayant égard à ce que, pour les différents points singuliers de l'équation différentielle (1), l'équation déterminante admet les racines $0, \frac{1}{2}$, on voit que cette équation (1) admettra une intégrale de la forme

$$u = G^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{-\frac{1}{4}}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},$$

dans le cas (et seulement dans le cas) où G est un polynôme entier en z tel que, pour chacun de ces zéros b, on ait

$$G'(b)^2R(b) = -\lambda,$$

et où

$$H(z) = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\log G}{dz^2} - \frac{1}{4}\frac{d\log G}{dz}\frac{d\log R}{dz} + \frac{\lambda}{4G^2R}\right]R.$$

Si λ est différent de zéro, $G(z)$ n'a pas de racines doubles, ni de racines communes à $R(z)$; si $\lambda = 0$, le zéro b est double ou simple selon que $R(b)$ est différent de zéro ou nul; dans le premier cas, on a

$$\frac{G'''(b)}{G''(b)} = -\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)};$$

enfin, si $\lambda = 0$, $\sqrt{G}$ satisfait à l'équation (1), sous les conditions précédentes, $G(z)$ vérifie l'équation

$$(2)\qquad R\frac{d^3w}{dz^3} + \frac{3}{2}R'\frac{d^2w}{dz^2} + \left(\frac{1}{2}R'' + 4H\right)\frac{dw}{dz} + 2H'w = 0.$$

L'auteur déduit de là le moyen de déterminer les coefficients de H, qui s'expriment tous en fonction de l'un d'eux; dans le cas où $\sqrt{G}$ doit satisfaire à l'équation (1), aux équations qui déterminent les coefficients de H s'adjoint une équation exprimant que G est divisible par un facteur carré : on obtient ainsi, pour ce cas, une équation algébrique que doit vérifier le coefficient restant.

Si G n'a pas de racines doubles ni de racines communes à R, λ est différent de zéro, et l'on a le système fondamental d'intégrales de l'équation (1)

$$u_1 = G^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},\quad u_2 = G^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}};$$

$\int \frac{dz}{G\sqrt{R}}$ est une intégrale abélienne de troisième espèce; en introduisant les fonctions abéliennes, y_1 et y_2 s'expriment au moyen de fonctions θ à ρ arguments, en supposant $m = 2\rho + 1$, ou $2\rho + 2$.

Laissant de côté le cas de $\lambda = 0$, M. Fuchs passe à l'examen de l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \mathrm{sn}^2 x + h]y;$$

la substitution

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{R(z)}, \quad R(z) = (1 - z^2)(1 - k^2z^2)$$

permet de lui donner la forme

$$(3) \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} - [n(n+1)k^2z^2 + h]u = 0;$$

c'est un cas particulier de l'équation (1); pour toute valeur de h, il existe alors une fonction $G(z)$ entière en z^2, du degré $2n$ en z, qui vérifie l'équation (2); l'application de la méthode précédemment décrite fournit ensuite l'expression de l'intégrale générale sous une forme équivalente à celle qu'a donnée M. Hermite.

Dans le cas exceptionnel qui a été signalé plus haut, en général, l'équation (3) doit admettre une intégrale de l'une des formes

$$F_{00}, \quad F_{10}\sqrt{1 - z^2}, \quad F_{01}\sqrt{1 - k^2z^2}, \quad F_{11}\sqrt{R(z)},$$

où $F_{\alpha\beta}$ est un polynôme en z du degré $n - \alpha - \beta$; l'auteur apprend alors à former l'équation algébrique

$$\psi(h) = 0,$$

que doit vérifier h; c'est, au fond, l'équation donnée par Lamé et Heine, pour l'existence de solutions entières; l'examen des différents cas conduit encore l'auteur, de la façon la plus simple, aux résultats de M. Hermite.

Geiser. — Sur la théorie des courbes planes du quatrième ordre. (35-40).

Ce postulatum de la théorie des courbes algébriques, « la hessienne de la courbe générale du n^{ieme} ordre n'admet ni point double ni point de rebroussement », n'a été démontré que pour les courbes du troisième degré (Clebsch, *Vorles. üb. Geom.*, p. 361); M. Geiser établit qu'il est vrai pour la courbe du quatrième degré; sa démonstration se relie à la recherche des conditions sous lesquelles l'équation homogène d'une courbe du quatrième degré peut être, par une substitution linéaire, ramenée à la forme

$$x_1^4 + ux_1^2 + v = 0,$$

u et v étant des formes du deuxième et du quatrième degré en x_2, x_3, x_4; si cette réduction est possible, la hessienne admet un point double non situé sur la courbe, et réciproquement.

Casorati. — Recherches sur les équations algébrico-différentielles. (41-53).

Considérant une équation de la forme

$$f(\Omega) = a\Omega^m + b\Omega^{m-1} + c\Omega^{m-2} + \ldots + s\Omega + t = 0,$$

où $a, b, c, \ldots, s, t$ sont des fonctions entières de degré n des deux variables u et v, en éliminant Ω entre cette équation et l'équation différentielle

$$da\,\Omega^m + db\,\Omega^{m-1} + \ldots + dt = 0,$$

on est conduit à une équation de la forme

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}\,du^m + \mathrm{B}\,du^{m-1}dv + \ldots + \mathrm{T}\,dv^m = 0.$$

A, B, ..., T sont des fonctions entières de u et v, dont le degré est en général $m(2n-1)$. Mais cette équation différentielle, tout en restant du degré m par rapport aux différentielles, relativement aux variables u, v, peut s'abaisser à un moindre degré; une telle réduction peut provenir de la suppression de facteurs communs à tous les coefficients A, B, ..., T; elle peut aussi provenir de ce que, dans ces mêmes coefficients, les termes de plus haut degré en u, v disparaissent; M. Casorati donne les conditions pour que cette circonstance se présente.

Henneberg. — Détermination de la classe minimum des surfaces minima algébriques. (54-57; all.).

Voir *Bulletin*, IV_1, 385.

Henneberg. — Sur les oscillations infiniment petites d'un fil dont une extrémité est fixe, dont l'autre extrémité porte un poids, sous l'influence de la pesanteur et d'une percussion initiale. (58-67; all.).

L'auteur examine successivement le cas où la masse du fil est quelconque et celle où elle est très petite; il montre que, dans ce dernier cas, la masse du fil tend à augmenter la durée des oscillations.

Halphen. — Sur les lignes singulières des surfaces algébriques. (68-105; fr.).

Voici le résumé que l'auteur donne lui-même au début de son Mémoire :

« Aux environs d'un point singulier, une courbe algébrique peut être envisagée comme la superposition de plusieurs courbes élémentaires distinctes, dont l'ordonnée de chacune est représentée par un développement en série. Ces courbes élémentaires, nommées par M. Cayley *branches superlinéaires,* je les appelle, pour abréger, des *cycles*.... Dans beaucoup de problèmes, chaque cycle est suffisamment caractérisé par deux nombres entiers n, ν, que l'on peut appeler l'*ordre* et la *classe* de ce cycle. Le premier est l'ordre de multiplicité du point simgulier sur le cycle; quant au second, il est ainsi défini : le quotient $\frac{\nu}{n}$ est l'ordre commun de contact de chaque branche du cycle avec sa tangente au point singulier. Les nombres n, ν suffisent notamment à déterminer leurs analogues pour une figure corrélative : ce sont les mêmes nombres en ordre inverse.

» On ne manquera pas de remarquer qu'un point simple d'une courbe est un cas particulier d'un point singulier ainsi envisagé.

» Sur une surface S, considérons à la fois une ligne (a), une section plane arbitraire (S) et un point de rencontre a de ces deux lignes.

» La surface S, aux environs du point a, est caractérisée dans une certaine mesure par l'ordre et la classe de chacun des cycles en lesquels (S) se décompose au point a. Quels éléments faut-il connaître en outre pour pouvoir trouver les nombres analogues et relatifs à une surface corrélative de S? Telle est la question qui s'offre tout d'abord. Les résultats suivants fournissent la réponse.

» 1. Aux environs d'une courbe algébrique (a) tracée sur une surface algébrique S, cette surface est la superposition de surfaces élémentaires dont chacune jouit de la propriété suivante : au point de rencontre avec (a), une section plane faite arbitrairement dans une surface élémentaire se compose d'un seul cycle. Je donne aux surfaces élémentaires le nom de *cycles de nappes*. L'ordre n et la classe ν du cycle unique que possède, en un point de rencontre avec (a), une section plane de cette surface élémentaire, je les appelle l'*ordre* et la *classe du cycle des nappes*. J'appelle (a) la *ligne origine* du cycle.

» 2. En chaque point de la ligne-origine, toutes les nappes d'un même cycle ont un même plan tangent, qui contient la tangente de la ligne-origine.

» 3. Ce plan tangent peut être constant le long de la ligne-origine, ou bien variable. Dans le premier cas, la ligne est plane, et il y correspond, dans une figure corrélative, un point singulier. Dans le second cas, il y correspond une ligne. C'est à ce dernier cas que se rapporte tout ce qui suit.

» 4. La classe ν d'un cycle de nappes (dont le plan tangent est variable) est égale ou inférieure à l'ordre n de ce cycle.

» 5. Quand la classe est égale à l'ordre, la théorie de l'indicatrice est applicable.

» 6. Tout cycle de nappes a pour corrélatif un cycle de nappes. Les classes de deux cycles corrélatifs sont égales.

» 7. Tout cycle de nappes dont l'ordre égale la classe, et dont l'indicatrice n'est pas parabolique en chaque point de la ligne-origine, a pour corrélatif un cycle du même ordre que le proposé.

» Pour les autres cas, il est nécessaire de distinguer trois groupes principaux et des sous-groupes.

» 8. *Groupe* A. Le plan tangent en chaque point de la ligne-origine n'est pas osculateur de cette ligne.

» *Sous-groupe* $A_1(\nu, \nu)$. Cette notation indique que l'ordre et la classe sont égaux à ν, mais avec cette particularité que l'indicatrice est parabolique en chaque point de la ligne-origine. En chaque point de cette ligne, une droite unique a, avec chaque nappe, un contact d'ordre supérieur au premier; soit $1+\lambda$ cet ordre.

» *Sous-groupe* $A'_1(n, \nu)$, $n > \nu$.

» Un cycle A_1, défini par les nombres ν, λ a pour corrélatif un cycle A'_1, défini par les nombres $n = (1+\lambda)\nu$ et ν.

» Réciproquement un cycle $A'_1(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $A_1(\nu_1, \nu)$ pour lequel $\lambda = \frac{n-\nu}{2}$.

» 9. *Groupe* B. Le plan tangent en chaque point de la ligne-origine est osculateur de cette ligne.

» *Sous-groupe* $B_1(n, \nu)$, $\nu < \frac{n}{2}$.

» *Sous-groupe* $B'_1(2\nu, \nu)$, avec cette particularité que la tangente de la ligne-origine a, avec chaque nappe, un contact d'ordre supérieur à 2; soit $2 + \theta$ l'ordre de ce contact.

» *Sous-groupe* $B_2(2\nu, \nu)$, avec cette circonstance que l'ordre de ce dernier contact est égal à 2.

» *Sous-groupe* $B_3(n, \nu)$, $\nu > \frac{n}{2}$.

» Un cycle $B_1(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B'_1(2\nu, \nu)$, avec $\theta = \frac{n-2\nu}{2\nu}$. Réciproquement, un cycle $B'_1(2\nu, \nu)$ défini, en outre, par le nombre θ a pour corrélatif un cycle $B_1(n, \nu)$, avec $n = 2(1+\theta)\nu$.

» Un cycle $B_2(2\nu, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B_2(2\nu, \nu)$.

» Un cycle $B_3(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B_3(n, \nu)$.

» 10. *Groupe* C. La ligne-origine est droite.

» Un pareil cycle (n, ν) a pour corrélatif un cycle de même définition (n, ν).

» La question indiquée plus haut se trouve résolue par l'ensemble des résultats dont je viens de donner le tableau synoptique. Je consacre une seconde Partie de ce Mémoire à montrer qu'entre les éléments précédemment définis et relatifs aux diverses lignes singulières d'une même surface les éléments analogues et relatifs aux lignes le long desquelles le plan tangent est constant, et entre le degré et le rang de la surface, il existe une relation. Cette relation, je la forme dans toute sa généralité. C'est celle qui fournit le degré du lieu des points à indicatrice parabolique sur une surface à singularités quelconques.

» Enfin je termine ce Mémoire par quelques applications aux surfaces de révolution et aux surfaces gauches.

» Les éléments si simples et si peu nombreux, que j'ai été conduit à envisager ici suffisent à caractériser les lignes singulières dans une catégorie importante de questions. Par exemple, ils suffisent pour traiter, dans toute sa généralité, le problème de *trouver le degré du lieu des points qui, sur une surface algébrique, satisfont à une équation algébrique aux dérivées partielles du second ordre*. Cette nouvelle question fera l'objet d'un autre Mémoire.

» En terminant ce préambule, je dois signaler à l'attention du lecteur les recherches antérieures de M. Zeuthen sur le même sujet, principalement celles dont les résultats sont contenus dans son Mémoire : *Sur une classe de points singuliers de surfaces* (*Mathematische Annalen*, t. IX). »

Casorati. — Recherches sur les équations algébrico-différentielles (suite et fin). (106-118).

Kiepert. — Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. (119-123; all.).

Si 2ω, $2\omega'$ constituent un couple de périodes de la fonction pu (Weierstrass) définie par l'équation

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

et si l'on pose

$$f = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega}{5}\right)},$$

$$f_r = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega' + 16r\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega' + 32r\omega}{5}\right)},$$

les quantités f et f_r ($r = 0, 1, 2, 3, 4$) sont racines de l'équation du 12° degré

$$f^{12} + \frac{10}{\Delta} f^6 - \frac{12 g_3}{\Delta^2} + \frac{5}{\Delta^2} = 0,$$

où

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Ces quantités f, f_r peuvent aussi se calculer par les formules

$$f = h^{\frac{1}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt{5} \prod_\nu \left(\frac{1 - h^{10\nu}}{1 - h^{2\nu}}\right),$$

$$f_r = -\varepsilon^{2r} h^{-\frac{1}{15}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \prod_\nu \left(\frac{1 - h^{\frac{2\nu}{5}} \varepsilon^{8r\nu}}{1 - h^{2\nu}}\right),$$

où $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ et où $h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ est connue quand on connaît l'invariant $\frac{g_2^3}{\Delta}$,

En posant

$$y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} [(f^2 - f_r^2)(f_{r+2}^2 - f_{r+3}^2)(f_{r+4}^2 - f_{r+1}^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

les y sont les racines de l'équation du cinquième degré

$$\Delta^3 y^5 + 10 \Delta^2 y^3 + 45 \Delta y - 216 g_3 = 0.$$

Or cette équation se ramène à l'équation générale du cinquième degré

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

par la substitution

$$x^2 - ux + v = -\frac{\alpha + \beta y}{3 + \Delta y^2};$$

les quantités u, v, α, β^2, $\frac{g_2^3}{\Delta}$ se trouvent déterminées par la résolution de deux équations du second degré.

Brioschi. — Note sur le Mémoire précédent. (124-125).

L'auteur montre le lien des résultats obtenus par M. Kiepert et de ses propres recherches sur les équations modulaires.

Weber. — Sur la théorie de la transformation des fonctions ϑ, en particulier dans le cas de trois variables. (126-166; all.).

I. Transformation des fonctions $2p$ fois périodiques.
II. Connexion entre deux transformations.
III. La multiplication complexe.
IV. La transformation des fonctions ϑ.
V. Les transformations linéaires.
VI. La transformation du $n^{\text{ième}}$ degré.
VII. La transformation du deuxième degré.

Brioschi. — Sur une classe d'équations modulaires. (167-172).

Tonelli. — Sur un théorème de la théorie des fonctions. (173-192).

Il s'agit de ce théorème :

Une fonction quelconque monodrome S *des points d'une surface* $2p+1$ *fois connexe* T *qui représente la ramification d'une fonction s de z définie par l'équation algébrique*

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$$

s'exprime rationnellement au moyen de s et de z, et, si elle devient m' fois infinie du premier ordre, contient

$$m' - p + 1$$

constantes arbitraires.

Ce théorème a été énoncé et établi pour la première fois par Riemann dans le § 9 de son Mémoire sur les fonctions abéliennes, mais en supposant la position des points pour lesquels la fonction S devient infinie, soumise à certaines restrictions : ainsi sont exclus les points pour lesquels s ou z deviennent infinis. M. Prym en a donné récemment (*Journal de Borchardt,* t. 83) une démonstration élégante et générale, mais sans se préoccuper du nombre de constantes arbitraires. M. Tonelli reprend la question au point de vue de Riemann, mais dans toute sa généralité : il établit que le nombre de constantes arbitraires ne coïncide avec celui qu'a donné Riemann que dans des cas particuliers.

Henneberg. — Sur les oscillations élastiques d'une sphère isotrope qui n'est soumise à l'action d'aucune force extérieure. (193-209; all.).

Schering. — Discours prononcé à la séance publique de la Société royale des Sciences de Göttingue le 30 avril 1877, à l'occasion du centenaire de la nativité de Charles-Frédéric Gauss. (210-239).

Traduction italienne de ce discours par M. Beltrami, suivie d'intéressantes additions et de curieuses lettres adressées à Gauss ou écrites par Gauss lui-même.

Christoffel. — Sur la forme canonique des intégrales de première espèce de Riemann. (240-301; all.).

Pour qu'une équation irréductible

$$F(\overset{n}{S}, \overset{m}{Z}) = 0$$

soit d'espèce p, il faut que les coefficients soient déterminés de façon que S, considéré comme fonction de Z, admette précisément $r = (m-1)(n-1) - p$ points doubles : alors, à cette équation appartiennent p intégrales de première espèce linéairement indépendantes, contenues dans l'expression

$$w = \int \Phi(\overset{n-2}{S}, \overset{m-2}{Z}) \frac{dZ}{F'},$$

où $F' = \dfrac{\partial F}{\partial S}$ et où la fonction entière Φ s'annule aux points doubles.

Déterminer le polynôme F de façon que la variable S, regardée comme fonction de Z, admette le nombre présent de points doubles et déterminer ces points doubles au moins dans la mesure nécessaire pour la détermination de Φ, tel est le problème que M. Christoffel désigne sous le nom de *problème des points doubles.*

L'expression précédente de dw ne peut être réalisée qu'autant que le problème des points doubles est résolu : sans doute cette solution n'est pas nécessaire pour prouver l'existence de la fonction w et des p fonctions linéairement indépendantes de cette nature; mais elle est nécessaire pour parvenir à l'expression finale de dw.

La difficulté du problème reste tout entière quand on substitue aux variables Z et S un autre couple z, s de fonctions de Z ramifiées comme S, telles qu'on puisse passer d'un système à l'autre par des substitutions rationnelles; si μ et ν sont les ordres de ces fonctions (l'ordre d'une fonction algébrique de Z ramifiée comme S est le nombre qui exprime en combien de points S, Z, séparés ou confondus, la fonction devient infinie du premier ordre), il existe entre les variables Z, S une équation irréductible

$$f(\overset{\mu}{S}, \overset{\nu}{Z}) = 0,$$

et l'expression de w prend la forme

$$w = \int \varphi(\overset{\mu-2}{S}, \overset{\nu-2}{Z}) \frac{dz}{f'},$$

où $f' = \dfrac{\partial f}{\partial s}$; et la détermination des polynômes f et φ est le même problème que la détermination des polynômes F et Φ; on a simplement substitué les nombres μ et ν aux nombres m et n; on ne peut, d'après l'auteur, avancer dans cette voie tant qu'on s'attache à représenter dw comme une fonction rationnelle de deux variables réciproquement irrationnelles, et l'on n'évitera les difficultés qui viennent d'être signalées qu'en regardant dw comme fonction d'une seule variable Z; c'est-à-dire que, au lieu d'adjoindre à z une irrationnelle s pareillement ramifiée, mais qui n'est pas autrement déterminée, et d'exprimer rationnellement dw au moyen de ces deux variables, il faut introduire la fonction

$$\frac{dw}{dz} = s$$

comme l'irrationnelle inconnue.

Parmi les diverses hypothèses que l'on peut faire sur les fonctions z, de même ramification, la plus importante consiste à supposer que l'ordre μ est, dans un certain sens, un minimum : dans ce cas on obtient, pour $s = \frac{dw}{dz}$, une forme remarquable que l'auteur appelle *canonique*, à savoir

$$(1) \qquad s = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 + \ldots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1};$$

$y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}$ sont des fonctions entières de z avec des coefficients arbitraires $x_1, x_2, \ldots, x_p$, et leurs degrés $a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1}$ sont tels que le nombre de tous les termes de s, à savoir $a_1 + a_2 + \ldots + a_{\mu-1} + \mu - 1$, soit égal à p; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\mu-4}$ sont les *intégrandes* de première espèce, qui pour les valeurs infinies de z s'annulent avec les ordres $a_1 + 2, a_2 + 2, \ldots, a_{\mu-1} + 2$. L'établissement de cette forme et diverses lemmes préliminaires remplissent les sections I et II du Mémoire de M. Christoffel.

La Section III est consacrée à l'étude de l'équation dont s est racine; cette équation a la forme

$$(2) \qquad A s^{\mu} + A_2 s^{\mu-1} + A_3 s^{\mu-3} + \ldots + A_{\mu} = 0;$$

le second terme manquera toujours; A_i est une fonction entière homogène du $i^{\text{ème}}$ degré de $y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}$, fonction dont les coefficients sont des fonctions entières de Z; la théorie de cette équation est faite dans le cas où s, comme fonction de z, n'a que des singularités simples et séparées. En désignant par $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu}$ les branches de z et en faisant

$$\Delta = A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \ldots s_{\mu}),$$

on trouve que Δ est une fonction entière de z, et, en désignant cette fonction par $\mathcal{A}$ et par D le discriminant de l'équation (2), on a

$$\Delta = \mathcal{A},$$
$$D = \mu h A \mathcal{A}^2;$$

aux points d'embranchement, on a $A = 0$; aux points doubles de s, on a $\mathcal{A} = 0$, h est une constante.

Dans la quatrième Section, l'auteur étudie les fonctions $A_2, A_3, \ldots, A_{\mu}$, regardées comme des formes homogènes à $\mu - 1$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{\eta-1}$; ces quantités sont des fonctions symétriques de $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu}$, et, à cause de l'équation

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{\mu} = 0,$$

on peut les regarder comme des formes homogènes et symétriques $A'_2, A'_3, \ldots, A'_{\mu}$ des $\mu - 1$ variables $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu-1}$; en appliquant l'équation (1) à chaque branche de s, on parvient à $\mu - 1$ équations telles que

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1\sigma_{11} + y_2\sigma_{21} + \ldots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,1}, \\ s_2 &= y_1\sigma_{12} + y_2\sigma_{22} + \ldots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{\mu-1} &= y_1\sigma_{1\,\mu-1} + y_2\sigma_{2,\mu-1} + \ldots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,\mu-1}. \end{aligned}$$

En substituant ces quantités dans les formes *canoniques* $A'_2, A'_3, \ldots, A'_\mu$, on obtient les formes $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$; l'étude de la substitution précédente montre que son déterminant

$$\frac{\partial(s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})}$$

est égal à $\frac{1}{\sqrt{A}}$. Au moyen de ce théorème, on obtient une forme canonique pour chaque invariant ou covariant du système de formes $A_2, A_3, \ldots, A_\mu$; en particulier, on obtient l'expression de la fonction rationnelle $\Delta = \mathcal{A}$, qui s'annule aux points doubles de s, savoir

$$\mathcal{A} = \frac{\partial(A_2 A_3 \ldots A_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})}.$$

Dans la Section V, l'auteur montre inversement que l'équation (2) suffit à toutes les conditions du problème et détermine en effet s comme *intégrande* de première espèce, sous la forme canonique (1), si, pour le degré prescrit de ses coefficients, son discriminant D est égal à $\mu h A \mathcal{A}^2$.

Dans la Section VI, relativement à la classification des fonctions algébriques, à même ramification, d'une seule variable, on prouve que chaque genre (p) se décompose en familles (μ); cette classification ne souffre pas d'exception : les fonctions hyperelliptiques forment avec les fonctions elliptiques le système $\mu=2$; comme exemple de la théorie générale, l'auteur étudie le système $\mu = 3$.

Enfin, dans la Section VII, M. Christoffel fait la théorie de la fonction A_2; dans la substitution qui change A_2 en son adjointe, les coefficients s'expriment d'une façon remarquable au moyen de quantités irrationnelles.

La forme de cette substitution conduit à diverses propriétés tant de la forme A_2 elle-même que des formes suivantes.

Harnack. — Sur les différentielles algébriques : extrait d'une Lettre à M. Cremona. (302-305; all.).

L'auteur complète sur quelques points la méthode donnée par M. Cremona dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne* (1869, t. X de la 2e sér.) (*Sugli integrali a differenziale algebrico*). Il montre comment on peut, en employant des coordonnées homogènes, étudier la nature de l'intégrale d'une différentielle algébrique dans le voisinage d'un point double et donne quelques indications sur la démonstration du théorème d'Abel et sur l'intégration des fonctions rationnelles.

Malet. — Sur un problème d'Algèbre. (306-313; angl.).

Étant données deux équations algébriques, déterminer l'équation dont les racines sont de la forme $\alpha\beta$, α étant une racine de l'une des équations données et β une racine de l'autre.— L'équation cherchée est mise sous forme de déterminant.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

Tome XCIV; 1882, 1er trimestre.

N° 1; 2 janvier.

Faye. — Sur la correction des boussoles et sur le récent *Traité de la régulation et de la compensation des compas* de M. Collet. (18).

Le Paige (C.). — Sur les formes algébriques de plusieurs séries de variables (31).

L'auteur indique plusieurs covariants des formes quadrilinéaires; il énonce en outre le théorème suivant :

Soient les deux formes à trois séries de variables

$$f = a_x^n b_y^m c_z^p, \quad \varphi = \alpha_x^\nu \beta_y^\mu \gamma_z^\varpi;$$

si l'on désigne par $(f, u)_x$, $(f, f')_{xy}$, ... *les covariants*

$$(a\alpha)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{\nu-1} b_y^m \beta_y^\mu c_z^p \gamma_z^\varpi,$$
$$(aa')\, a_x^{n-1} a_x'^{n-1} (bb')\, b_y^{m-1} b_y'^{m-1} c_z^p c_z'^p,$$

on a

$$(f, u)_x (f, u)_y = -\frac{1}{2}[f^2(\varphi, \varphi')_{xy} - 2f\varphi(f, \varphi)_{xy} + \varphi^2(f, f')_{xy}].$$

C'est la généralisation d'un théorème bien connu de Clebsch.

Gasparis (de). — Sur la théorie du mouvement des planètes. (32).

Note relative à certaines séries exprimant les quantités variables des ellipses des planètes en fonction de l'anomalie moyenne exprimée en parties du rayon, et de l'excentricité. Pour que ces séries convergent rapidement, il convient de compter les anomalies à partir de l'aphélie.

Exemple. — Soient μ et ε l'anomalie moyenne et excentrique, comptée de l'aphélie; on aura pour le rayon vecteur

$$\frac{r}{a} = 1 + e\frac{\mu^2}{2!}\frac{e}{(1+e)^2} - \frac{\mu^4}{4!}\frac{3e^2 - e}{(1+e)^5}$$
$$- \frac{\mu^6}{6!}\frac{45e^3 - 24e^2 + e}{(1+e)^8} - \frac{\mu^8}{8!}\frac{1575e^4 - 1107e^3 + 117e^2 - e}{(1+e)^{11}}.$$

(¹) Voir *Bulletin*, VI_2, 28.

Boussinesq. — Intégrations de certaines équations aux dérivées partielles par le moyen d'intégrales définies contenant sous le signe $\int$ le produit de deux fonctions arbitraires. (33).

La dérivée seconde par rapport à t de l'intégrale

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\Psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

est

$$\int_0^\infty f'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\Psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha.$$

Ceci posé, si l'on fait

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\Psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

ou

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(x \mp \frac{d^2}{2}\right)\Psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

on pourra particulariser Ψ en vue de faire vérifier à φ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^{2n}\varphi}{dt^{2n}} + A\frac{d^n\varphi}{dx^n} = 0,$$

qui devient par la substitution

$$\int_0^\infty f^{(n)}\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\left[(\pm 1)^n \Psi^{(n)}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) + A\Psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right] d\alpha = 0;$$

il suffira de prendre pour Ψ une des n intégrales distinctes de l'équation différentielle linéaire $(\mp 1)^n \Psi^{(n)} + A\Psi = 0$, et de choisir en outre la fonction f de manière à faire acquérir pour $t = 0$, entre les limites $x = \mp \infty$, telles valeurs qu'on voudra à φ ou à sa dérivée en t d'un ordre pair donné $2p$ s'il s'agit de la première forme, et au contraire à sa dérivée en t d'ordre impair $2p+1$ s'il s'agit de la seconde; or ces dérivées, exprimées par

$$(\mp 1)^p \int_0^\infty f^p\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\Psi^{(q)}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

où q désigne soit p, soit $p+1$, se réduisent pour $t = 0$ à la fonction arbitraire $f^{(p)}(x)$, abstraction faite d'un facteur constant. On conçoit que dans le cas où il y aura n couples possibles de pareilles intégrales, leur superposition constitue l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles avec ses $2n$ fonctions arbitraires.

L'auteur applique cette méthode aux problèmes de l'échauffement et du mouvement transversal d'une barre, qui s'étend depuis l'origine des abscisses positives jusqu'à l'infini et qui d'abord à zéro ou en repos viendrait à être soit chauffée, soit agitée à son extrémité $x = 0$.

N° 2; 9 janvier.

Sylvester (J.-J.). — Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires. (55).

Un déterminant de *substitution* ne diffère pas par sa forme extérieure d'un déterminant ordinaire ou *absolu*; mais les lois de composition sont un peu différentes.

Si l'on appelle *transversal* d'un déterminant ce qu'il devient quand, en prenant la diagonale qui joint le premier au dernier terme comme axe, on lui fait décrire une demi-révolution autour de cet axe, l'inverse d'un déterminant de substitution est le transversal de l'inverse du déterminant absolu. Pour obtenir le produit du déterminant de substitution A par le déterminant de substitution B, il faut multiplier ensemble le transversal de A par B selon la règle ordinaire, ce qui donnera un déterminant C'; le transversal de C' sera le produit de la substitution A par la substitution B.

Si dans un déterminant quelconque donné on ajoute le terme $-\lambda$ à chaque terme diagonal, on obtient ainsi une fonction de λ, dont les racines sont nommées par M. Sylvester racines *lambdaïques* du déterminant donné.

Les racines lambdaïques de l'inverse d'un déterminant sont les réciproques des racines lambdaïques du déterminant lui-même.

i étant un nombre entier et positif quelconque, les $i^{\text{ièmes}}$ puissances des racines lambdaïques d'un déterminant de substitution sont identiques avec les racines lambdaïques de la puissance $i^{\text{ième}}$ du déterminant.

i étant une quantité commensurable quelconque, les $i^{\text{ièmes}}$ puissances des racines lambdaïques d'un déterminant de substitution sont identiques avec les racines lambdaïques de la $i^{\text{ième}}$ puissance du déterminant.

Ces propositions permettent à l'auteur de résoudre ce beau problème :

Trouver la puissance $i^{\text{ième}}$ d'une substitution donnée, i étant un nombre commensurable quelconque.

Voici la solution :

Soit n l'ordre du déterminant de substitution donné. Soient K un terme quelconque dans ce déterminant, K_0 le terme qui occupe, dans la puissance $\theta^{\text{ième}}$ du déterminant, la même position que K dans le déterminant lui-même. De plus, soient $K_0 = 1$ quand K est un terme dans la diagonale et $K_0 = 0$ dans tout autre cas. Alors, pour une valeur commensurable quelconque de i, positive ou négative, en nommant la somme des quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, S_1, leur produit S_{n-1}, et en général la somme de leurs combinaisons binaires, ternaires, etc., S_2, S_3, on aura

$$K = \sum \frac{K_{n-1} - S_1 K_{n-2} + S_2 K_{n-3} - \ldots \mp S_{n-1} K_0}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_n)} \lambda_1^i,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les racines lambdaïques du déterminant donné.

Cette proposition doit être modifiée quand les racines lambdaïques ne sont pas inégales. Enfin, l'auteur insiste sur un cas très singulier où le nombre de solutions devient infini pour une valeur finie de i.

Poincaré. — Sur une extension de la notion arithmétique de genre. (67).

Deux formes algébriquement équivalentes appartiennent au même ordre quand le plus grand commun diviseur de leurs coefficients est le même, quand il en est ainsi du plus grand commun diviseur de ces mêmes coefficients affectés des coefficients binomiaux (ou polynomiaux) et du grand commun diviseur des coefficients de leurs covariants, contravariants, mixed concomitants, etc., affectés ou non des coefficients binomiaux.

Deux formes $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont équivalentes suivant le module m quand on peut trouver n^2 nombres entiers a_{ik} dont le déterminant soit $\equiv 1 \pmod{m}$, et qui soient tels qu'en posant

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

on ait identiquement

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \pmod{m}.$$

Deux formes algébriquement équivalentes appartiennent au même genre quand elles sont équivalentes suivant un module quelconque.

Ces définitions s'appliquent à des formes quelconques.

Deux formes équivalentes suivant deux modules m et m' premiers entre eux sont équivalentes suivant le module mm'.

Deux formes équivalentes, suivant tous les modules qui sont des puissances d'un nombre premier appartiennent au même genre.

Deux formes qui appartiennent à la même classe appartiennent au même genre.

Deux formes qui appartiennent au même genre appartiennent au même ordre.

L'auteur applique ces définitions aux formes quadratiques d'un nombre quelconque de variables; il considère ensuite la forme cubique binaire et son hessien.

Le Paige (*C.*). — Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. (69).

Sur la réduction d'une forme quadrilinéaire à sa forme canonique et sur le rôle que jouent dans cette réduction les covariants signalés par l'auteur.

Boussinesq. — Équations différentielles du mouvement des ondes produites à la surface d'un liquide par l'émersion d'un solide. (71).

N° 3; 16 janvier.

Darboux (*G.*). — Sur la représentation sphérique des surfaces. (120-158).

La représentation sphérique, due à M. Bonnet, consiste, comme on sait, à faire correspondre à chaque point d'une surface un point d'une sphère par la condition que les deux plans tangents soient parallèles. Aux lignes de courbure de la surface correspondent des lignes orthogonales sur la sphère. M. Darboux a résolu (*Comptes rendus,* t. LXVII et LXVIII) la question suivante :

Trouver toutes les surfaces dont les lignes de courbure ont pour représentation sphérique un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales.

Dans les communications dont nous rendons compte, il complète ce résultat et montre qu'on peut obtenir toutes les surfaces ayant pour représentation sphérique, soit un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales, soit le système orthogonal que l'on déduit du précédent par l'inversion la plus générale.

Si dans le plan dont l'équation est

$$ux + vy + wz + p = 0$$

u, v, w, p sont des fonctions des deux variables ρ et ρ_1, ce plan enveloppera une surface non développable, les lignes $\rho = C$, $\rho_1 = C_1$ seront conjuguées toutes les fois qu'il existera une équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + A\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + B\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + C\theta = 0,$$

dont u, v, w, p seront des solutions; réciproquement, si u, v, w, p, p' sont des solutions de cette équation, les surfaces Σ, Σ', enveloppes des plans

$$ux + vy + wz + p = 0,$$
$$ux + vy + wz + p' = 0,$$

seront telles que pour les points correspondant aux mêmes valeurs de ρ, ρ_1 les plans tangents seront parallèles. Si l'une des surfaces est une sphère (S), les lignes $\rho = C$, $\rho_1 = C_1$ seront, sur la sphère, des lignes orthogonales, représentant les lignes de courbure de l'autre surface; donc :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles telles que (1), si l'on peut trouver quatre solutions de cette équation liées par la relation

$$(2) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = p^2,$$

les équations

$$x = \frac{u}{p}, \quad y = \frac{v}{p}, \quad z = \frac{w}{p}$$

définiront un système de lignes sphériques orthogonales, et la surface la plus générale dont les lignes de courbure ont ce système pour image sphérique sera l'enveloppe du plan

$$ux + vy + wz + P = 0,$$

où P est l'intégrale générale de l'équation (1).

Par exemple, l'équation

$$2(\rho - \rho_1)\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\rho} - \frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0$$

admet des solutions de la forme

$$u = \sum_1^4 A_i\sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$p = \sum_1^4 D_i\sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)},$$

liées par la relation (1). Le système sphérique orthogonal correspondant sera celui qui a été indiqué au début.

Considérons maintenant une surface (Σ) et supposons que ses lignes de courbure aient pour image sphérique deux systèmes de lignes orthogonales, tracées sur une sphère (S). Soumettons ces lignes sphériques à une inversion dont le pôle sera un point quelconque O et dont le module sera choisi de telle manière que la sphère (S) se corresponde à elle-même. Soit (P) le plan polaire de O par rapport à (S).

Considérons un plan tangent quelconque (ϖ) de la surface (Σ) et abaissons du centre C de la sphère (S) la perpendiculaire sur ce plan, perpendiculaire qui rencontrera la sphère en un point M; soit M′ l'inverse du point M. Le plan (ϖ'), perpendiculaire à CM′ et passant par l'intersection du plan (ϖ) avec le plan fixe (P), enveloppera une surface (Σ') dont la représentation sphérique sera fournie par les lignes orthogonales inverses de celles qui servent de représentation à (Σ).

Cette méthode, qui réalise géométriquement la *transformation par directions réciproques* de M. Laguerre, permettra, toutes les fois que le problème de la représentation sphérique sera résolu pour un système de lignes, d'en donner la solution pour tous les systèmes orthogonaux que l'on peut en déduire par une inversion. M. Darboux indique plusieurs applications; il généralise en outre la méthode ordinaire de représentation sphérique, en s'appuyant sur le théorème suivant :

Considérons une sphère variable (U) *assujettie à toucher à la fois une surface* (Σ) *et une sphère* (S). *Quand le point de contact de* (U) *et de* (Σ) *décrit une ligne de courbure, le point de contact de* (U) *et de* (S) *décrit une ligne sphérique qui correspond à la ligne de courbure.*

Cela posé, les lignes sphériques qui correspondent aux deux systèmes de lignes de courbure se coupent mutuellement à angle droit. Ce mode de représentation subsiste quand on effectue toutes les transformations qui conservent les lignes de courbure, et l'on peut démontrer que toute transformation effectuée sur une surface (Σ) et conservant les lignes de courbure entraîne un changement dans la représentation sphérique de cette surface, qui équivaut à une ou à plusieurs inversions.

Pepin. — Nouveaux théorèmes sur l'équation indéterminée $ax^4 + by^4 = z^2$. (122).

Cas généraux où l'équation n'a pas de solutions rationnelles, l'équation quadratique correspondante en admettant, au contraire, une infinité.

Poincaré. — Sur une extension de la notion arithmétique de genre. (124).

Conditions pour que deux formes quadratiques $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, appartenant au même ordre et ayant même déterminant Δ, soient équivalentes suivant une puissance quelconque d'un facteur premier impair p de Δ, pour qu'elles soient équivalentes suivant une puissance quelconque de 2.

Répartition en genres, par rapport aux modules 2, 3, 5, des formes cubiques binaires.

Boussinesq. — Sur les ondes que fait naître, dans l'eau en repos d'un canal, l'immersion d'un cylindre solide, plongé en travers dans ce canal. (127).

N° 4; 23 janvier.

Darboux. — Sur la représentation sphérique des surfaces. (158).

Laguerre. — Sur quelques équations transcendantes. (160).

Une transcendante entière est du *premier genre* si ses facteurs primaires sont de la forme

$$e^{\frac{x}{\alpha}}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right).$$

Si une transcendante entière $F(x)$ est du premier genre et a toutes ses racines réelles, ses dérivées sont également du premier genre et ont toutes leurs racines réelles. L'auteur indique en outre diverses propriétés qui rapprochent singulièrement les transcendantes des fonctions rationnelles entières ayant toutes leurs racines réelles.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (163).

Méthode nouvelle pour exprimer une fonction fuchsienne donnée à l'aide de séries thêtafuchsiennes.

N° 5; 30 janvier.

Bertrand (J.). — Sur la théorie des épreuves répétées. (185).

Démonstration du théorème de Bernoulli sur les épreuves répétées.

Soient p et q les probabilités de deux événements contraires A et B; on a

$$p+q=1,$$

et les termes du développement

$$(p+q)^\mu = p^\mu + \mu p^{\mu-1}q + \ldots + A_h p^h q^{\mu-h} + \ldots + q^\mu$$

représentent les probabilités des diverses combinaisons que le hasard peut amener sur une succession de μ épreuves. Supposons qu'on s'engage à payer, après les μ épreuves accomplies, une somme égale à

$$\left(\frac{n}{\mu}-p\right)^2,$$

n désignant le nombre de fois que l'événement A s'est présenté; l'espérance mathématique E de celui à qui l'on fait une telle promesse s'obtient en multipliant la valeur de chacune des sommes à espérer par la probabilité qu'on a de l'obtenir :

$$\begin{aligned}
E &= \Sigma\left(\frac{k}{\mu}-p\right)^2 r A_k p^k q^{n-k}\\
&= \frac{1}{\mu^2}\Sigma k^2 A_k p^k q^{n-k} - \frac{2p}{\mu}\Sigma k A_k p^k q^{n-k} + p^2 \Sigma A_k p^k q^{n-k} = \frac{pq}{\mu}.
\end{aligned}$$

E tend vers zéro quand μ augmente, ce qui exige évidemment qu'il en soit de même de la probabilité pour que la différence $\frac{n}{\mu} - p$ surpasse une limite donnée, si petite qu'elle soit.

Hermite (*C*.). — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (186, 372, 477, 594).

La solution de l'équation

$$D^2 y = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y$$

n'a encore été obtenue que pour $n = 1$ et $n = 2$. Les méthodes de M. Fuchs montrent que l'intégrale générale est une fonction uniforme de la variable; en utilisant l'importante proposition de M. Picard que cette intégrale est une fonction doublement périodique de seconde espèce, la solution de l'équation de Lamé est donnée directement par l'application de principes généraux s'appliquant aux équations linéaires d'un ordre quelconque. M. Hermite expose une méthode indépendante de ces principes et traite la question difficile de la détermination sous forme entièrement explicite des éléments de la solution.

Le point de départ est le développement en série que l'on tire de l'équation quand on y remplace x par $ik' + \varepsilon$.

On trouve alors que l'équation est vérifiée par deux développements en série de la forme

$$y = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}} + \ldots,$$

$$y = \varepsilon^{n+1}(1 + h'_1 \varepsilon^2 + h'_2 \varepsilon^4 + \ldots).$$

En outre, si l'on met dans l'expression

$$D_x^2 y - \left[\frac{n(n+1)}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} + h\right] y,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}}$$

à la place de y, tous les termes en $\frac{1}{\varepsilon^{n+2}}, \frac{1}{\varepsilon^n}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon^{n-2i-2}}$ disparaissent, en sorte que, en supposant $n = 2\nu$, ou $n = 2\nu - 1$, on n'aura aucun terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, si l'on prend dans le premier cas

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu,$$

et dans le second

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon} + h_\nu \varepsilon.$$

Ceci posé, en faisant

$$f(x) = e^{\lambda(x - ik')} \chi(x),$$

où

$$\chi(x) = \frac{H'(0) H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\left[(x - ik') + \frac{i\pi\omega}{2K}\right]},$$

les expressions

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-1} f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1 \frac{D^{2\nu-3} f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1} D_x f(x),$$

$$F(x) = +\frac{D_x^{2\nu-2} f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1 \frac{D^{2\nu-4} f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1} f(x)$$

satisferont, suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, à l'équation différentielle, pourvu qu'on détermine convenablement les constantes ω et λ.

En effet, on voit immédiatement que, en prenant $x = ik' + \varepsilon$, les parties principales du développement suivant les puissances ascendantes de ε coïncident respectivement avec les parties principales des développements correspondants de y, donnés plus haut; de plus, on peut s'arranger, dans le premier cas, pour que le terme constant et le coefficient de ε soient h_ν et zéro, et, dans le second cas, pour que ces coefficients soient zéro et h_ν.

Alors les deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$D_x^2 F(x) - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] F(x),$$

étant finies pour $x = ik'$, sont nécessairement nulles; en sorte que l'expression

$$y = CF(x) + C'F(-x)$$

fournit l'intégrale générale.

Mais les deux équations de condition auxquelles on est conduit par cette voie, équations algébriques en $\operatorname{sn}\omega$ et λ, sont compliquees et difficiles à traiter : relativement à λ, par exemple, l'une est du degré n, l'autre du degré $n+1$. Il paraît difficile de mettre en évidence qu'elles ne donnent pour λ^2 et $\operatorname{sn}^2\omega$ qu'une seule détermination.

Dans le cas de $n = 3$, M. Hermite parvient à la résolution complète, en sorte que, dans ce cas, la solution de l'équation de Lamé est obtenue sans ambiguïté; il met, en outre, en évidence les valeurs de la constante h qui fournissent les solutions doublement périodiques ou les fonctions particulières de seconde espèce de M. Mittag-Leffler et, chemin faisant, rencontre un exemple simple de réduction d'une intégrale hyperelliptique de seconde classe à l'intégrale elliptique de première espèce.

Le cas de n quelconque est ensuite l'objet d'une analyse profonde, où l'expression du produit des deux solutions $F(x)$, $F(-x)$ et d'autres produits analogues qui s'obtiennent tous en fonctions linéaires de $k^2\operatorname{sn}^2 x$ et de ses dérivées successives joue un rôle essentiel. En désignant par $\sqrt{N}$ la valeur constante du déterminant fonctionnel formé avec les solutions $F(x)$, $F(-x)$, l'auteur prouve que N est un polynôme entier en h_1, et par conséquent en h, du degré $2n+1$. La condition $N = 0$ détermine les valeurs de cette constante pour lesquelles l'équation de Lamé est vérifiée par des fonctions doublement périodiques, la solution générale subissant alors un changement de forme analytique.

Dans le cas où N est différent de zéro, M. Hermite établit que $\operatorname{sn}^2\omega$ est une fonction rationnelle de h et que λ ne contient pas d'autre irrationnalité que $\sqrt{N}$.

Enfin, dans le cas où N est nul, le quotient $\dfrac{F(x)}{F(-x)}$ se réduit à une constante et les multiplicateurs de la fonction de seconde espèce $F(x)$ deviennent égaux à $+1$; à cause des quatre combinaisons de signes, on voit qu'il peut exister des solutions de quatre espèces, ayant respectivement les périodicités de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, $\operatorname{sn}^2 x$. Pour les trois premières on a $\lambda = 0$ avec $\omega = 0$, ou $\omega = K$, ou $\omega = K + iK'$; les valeurs de h qui correspondent à ces diverses espèces de solutions sont respectivement données par des équations de degré ν; les valeurs de h qui donnent les solutions de la quatrième espèce sont fournies par une équation de degré $\nu+1$ ou $\nu-1$ selon que $n = 2\nu$ ou $2\nu - 1$; dans ce cas les valeurs de λ et de $\operatorname{sn}\omega$ sont infinies. C'est en montrant comment on peut déduire ces solutions de la solution générale que M. Hermite termine son analyse.

Appell. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. (202).

Étant donnée une équation de la forme

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \psi(x,y) z = 0,$$

où $\psi(x,y)$ est une fonction rationnelle des variables y et x liées entre elles par une équation algébrique $F(x,y) = 0$ de degré m et de genre p, M. Appell est parvenu à reconnaître les cas où elle admet une intégrale de la forme

$$z = e^{\int \varphi(x,y) dx},$$

où $\varphi(x,y)$ est une fonction rationnelle de x, et à obtenir les intégrales de cette forme. Il examine en particulier le cas où $p = 0$ et celui où $p = 1$ et termine par la remarque générale que voici :

Étant donnée l'équation

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(x,y) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + \varphi_{n-1}(x,y) z = 0,$$

où les φ sont des fonctions rationnelles de x, y liées par l'équation $F(x,y) = 0$ de genre p, si l'on a $p > 1$, on peut ramener l'intégration de cette équation différentielle à celle d'un système de p équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles dont les coefficients sont des fonctions uniformes de p variables indépendantes à $2p$ groupes de périodes conjuguées.

Spoerer. — Sur le caractère oscillatoire de la cause qui détermine la distribution variable des taches à la surface du Soleil. (205).

Boussinesq. — Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles. (208).

Vaněček. — Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure de tous les degrés. (210).

N° 6; 6 février.

Séance publique annuelle.

N° 7; 13 février.

Bertrand (J.). — Sur la loi de déviation du pendule de Foucault. (371).

Soit M la position de l'observateur sur la surface de la Terre. Après un temps dt il sera transporté en M' sur le parallèle passant par le point M; si le plan d'oscillation du pendule n'avait pas de mouvement apparent, il tournerait avec la Terre et ses positions successives envelopperaient un parallèle; soit I le point de contact dans la position primitive, transporté en I' lorsque M est lui-même venu se placer en M'; parmi les grands cercles passant par M', celui qui fait le plus petit angle avec MI est M'K qui va couper MI à une distance MK du point M égale à un quadrant. Le cercle M'I' ne laisserait paraître aucune déviation; la rotation apparente θ du plan est donc I'M'K; M. Bertrand en donne l'expression suivante :

$$\theta = \cos \mathrm{MP}\,\frac{\mathrm{II}'}{\rho}.$$

cos MP est le sinus de la latitude, ρ le rayon du parallèle. Ce résultat démontre le principe sur lequel s'est appuyé Foucault.

Hermite (G.). — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (372).

Sylvester (J.-J.). — Sur les racines des matrices unitaires. (396).

M. Sylvester désigne sous ce nom une matrice dont tous les termes sont des zéros, sauf ceux de la diagonale qui sont des unités. Il donne la forme générale des matrices dont la $i^{\text{ème}}$ puissance donne une matrice unitaire en admettant pour loi de multiplication la loi qui résulte de la combinaison des substitutions linéaires.

Bigourdan. — Observations des planètes (221) Pallas et (222) Palisa, faites à l'Observatoire de Paris. (409).

André (C.). — Sur le compagnon de l'étoile γ d'Archimède et sur un nouveau mode de réglage d'un équatorial. (410).

Laguerre. — Sur la distribution dans le plan des racines d'une équation algébrique dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. (412).

Mittag-Leffler (G.). — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (414).

Nous résumons à la fois les diverses communications de l'auteur des 13 et 20 février, du 13 mars et du 3 avril.

M. Mittag-Leffler apprend à construire la fonction analytique la plus générale $F(x)$ jouissant des propriétés suivantes : Ses points singuliers (pôles et points essentiels) forment la suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$, dont tous les termes sont distincts et tels que $\lim a_n = \infty$, pour n infini; aux environs de ces points, elle se comporte comme les fonctions

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \quad \ldots,$$

en désignant en général par

$$G_i(y) = c_1^{(i)} y + c_2^{(i)} y^2 + \ldots$$

une fonction entière, rationnelle ou transcendante, s'annulant pour $y = 0$; en sorte que, aux environs du point a_n par exemple, on puisse poser

$$F(x) = G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) + P_n(x-a_n),$$

où $P_n(x-a_n)$ désigne une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x-a_n)$. Le procédé de formation repose sur ce que, sous la condition

$$|x| < |a_n|,$$

on peut développer $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ en une série de la forme $\sum_{r=0}^{r=\infty} A_r^{(n)} x^r$ et sur ce que l'on peut, pour chaque point a_n, déterminer un nombre positif entier m_n tel que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} F_n(x),$$

où l'on fait

$$F_n(x) = G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - \sum_{r=0}^{r=m_n} A_r^{(n)} x^r,$$

soit absolument convergente, sauf pour les points a.

Cette série

$$\sum F_n(x)$$

jouit évidemment des propriétés demandées. Le mode de démonstration est tout à fait semblable à celui que M. Weierstrass a employé, dans un Mémoire inséré dans le *Berliner Monatsbericht* du mois d'août 1880 et dont la traduction a paru dans le *Bulletin* pour établir la proposition moins générale, mais analogue, à laquelle le nom de M. Mittag-Leffler reste attaché. Au reste, ce dernier avait lui-même employé le même procédé de démonstration dans ses leçons à l'Université d'Helsingfors de l'année 1879.

Enfin la fonction la plus générale satisfaisant aux conditions imposées sera

$$\sum_1^\infty [F_n(x) + g_n(x)],$$

où $\sum_1^\infty g_n(x)$ représente une fonction entière arbitraire de x.

Il est bien clair que l'expression obtenue ne répond pas à tous les modes de discontinuité que l'on peut imposer à une fonction uniforme. A l'ensemble (P) des valeurs singulières distinctes peut correspondre un ensemble fini ou infini (P′) de valeurs limites, c'est-à-dire telles que dans le voisinage d'une quelconque d'entre elles il y ait une infinité de valeurs (P); l'existence de telles valeurs limites a été, comme l'on sait, établie par M. Weierstrass; de même l'ensemble de valeurs (P′) supposé infini fournit un ensemble de valeurs limites (P″), etc.; en continuant ainsi, il peut se faire qu'on arrive ou qu'on n'arrive pas, à un nombre fini de valeurs limites : on aperçoit ainsi la possibilité d'une classification des valeurs singulières; au surplus cette classification, pour un nombre infini de valeurs réelles comprises entre des limites finies, a été faite par M. Cantor et les beaux résultats de ce dernier s'étendent sans difficulté au cas qui nous occupe. A ces différents genres de discontinuités répondent des théorèmes généraux sur lesquels M. Mittag donne quelques indications et qu'il a développés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Stockholm* (février 1882). Nous revenons maintenant au premier cas, celui où l'ensemble (P) des valeurs singulières a_1, a_2, a_3, ... n'a pas d'autre valeur limite que le point ∞.

Quand la fonction $F(x)$ est donnée, la première question à résoudre consiste à trouver les éléments $F_n(x)$ de la série

$$\Sigma F_n(x) + G(x)$$

qui la représente, ou, si l'on veut, les entiers M_n qui correspondent à chaque point singulier a_n ainsi que la fonction entière $G(x)$; l'auteur y parvient, dans un cas très général, par le procédé suivant :

Soit S un contour simplement connexe qui embrasse le point $z = 0$, ainsi que les seuls points singuliers $z = a_1, a_2, \ldots, a_n$ et soit x une valeur différente de zéro.

On aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m = \mathcal{E}_x\left[\frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m\right]$$
$$+\mathcal{E}_0\left[\frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m\right] + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\mathcal{E}_{a\nu}\left[\frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m\right].$$

Si $z = 0$ appartient aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il ne sera pas compris sous le signe de sommation. En supposant d'abord que x n'ait aucune des valeurs a_1, $a_2, \ldots, a_n$, on aura

$$\mathcal{E}_x = F(x);$$

puis

$$-\mathcal{E}_0 = G_1(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \ldots + \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}F^{(m-1)}(0)$$

si zéro n'est pas un point singulier,

$$\mathcal{E}_0 = G_{\nu'}\left(\frac{1}{z}\right) + G_2(x)$$

si zéro est un point singulier, en supposant que, aux environs de ce point, on ait

$$F(z) = G_{\nu'}\left(\frac{1}{z}\right) + C_0^{(\nu')} + C_1^{(\nu')} + C_2^{(\nu')}z^2 + \ldots$$

et en faisant

$$G_2(x) = C_0^{(\nu')} + C_1^{(\nu'')} x + \ldots + C_{m-1}^{(\nu'')} x^{m-1},$$

enfin on aura

$$-\mathcal{E}_{a_\nu} = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m-1} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu;$$

si l'on représente cette quantité par $F_\nu(x)$ on aura donc une formule telle que

$$F(x) = G(x) + \sum_{\nu=0}^{\nu=n} F_\nu(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m dz.$$

Si les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont tous des pôles, cette formule coïncide avec celle que l'auteur a donnée antérieurement dans une lettre à M. Hermite, publiée par le *Bulletin*. M. Mittag-Leffler en établit d'ailleurs une autre analogue, mais plus générale en prenant pour point de départ, au lieu de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m dz = \int_S F(z)\left\{\frac{1}{z-x} - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x}{z} + \ldots + \left(\frac{x}{z}\right)^{m-1}\right] dz\right\},$$

la suivante :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S F(z)\left\{\frac{1}{z-x} - \frac{1}{2}\left[B_0 + B_1\left(\frac{x}{z}\right) + \ldots + B_{m-1}\left(\frac{x}{z}\right)^{m-1}\right] dz\right\}.$$

Si l'on fait maintenant croître les dimensions de la courbe S, de façon que chaque ligne embrasse la précédente et qu'il corresponde à chacun des points a une ligne S qui embrasse le point et si le module de l'intégrale précédente ou de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m dz$$

peut être rendu pour une ligne S et les suivantes plus petit qu'une quantité arbitrairement petite δ, on parviendra au développement cherché

$$F(x) = G(x) + \Sigma F_\nu(x),$$

la série qui figure dans le second membre étant uniformément convergente partout ailleurs qu'aux points singuliers.

M. Mittag-Leffler applique cette méthode aux fonctions $F(x)$ de la forme

$$F(x) = R(y)\, r(x),$$

où

$$y = e^x$$

et où $R(y)$ et $r(x)$ sont des fonctions rationnelles en y et x, la première ayant une valeur finie pour $y = 0$ et $x = \infty$; il retrouve ainsi deux développements remarquables pour la fonction $\pi \cot \pi x$ déjà obtenus par M. Gyldén.

En prenant

$$F(x) = f(x)\, r(x),$$

où $f(x)$ est une fonction uniforme et monogène, n'ayant dans un domaine fini qu'un nombre fini de points singuliers et qui est soumise aux conditions

$$f(x+2\omega) = \mu f(x),$$
$$f(x+2\omega') = \mu' f(x),$$

les modules de μ et μ' étant inférieurs à 1, et le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ étant imaginaire, on est conduit à des formules intéressantes dans la théorie des fonctions elliptiques.

Poincaré. — Sur les points singuliers des équations différentielles. (416).

L'auteur donne pour les points singuliers des équations différentielles de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

une classification analogue à celle qu'il avait déjà établie pour les équations différentielles à deux variables x, y.

Picard (E.). — Sur les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires. (418).

Cette étude se rapporte à des équations différentielles linéaires dont toutes les intégrales ne sont pas régulières.

Appell. — Sur un cas de réduction des fonctions Θ de deux variables à des fonctions θ d'une variable. (421).

Si l'on considère la fonction

$$\Theta(x,y) = \sum_{n_1 m = -\infty}^{n_1 m = +\infty} e^{mu+ny+m^2\alpha+2mny+n^2\beta},$$

les périodes normales des fonctions abéliennes correspondantes sont

Pour x......	$2\pi i$,	0,	2α,	2γ,
Pour y......	0,	$2\pi i$,	2γ,	2β;

si l'on suppose qu'entre les périodes relatives à y il y ait une relation de la forme

$$2ky = 2k'\beta + 2k''\pi i,$$

ces k étant des nombres entiers, la fonction $\Theta(x,y)$ pourra s'exprimer au moyen de fonctions θ.

Le Paige (C.). — Sur les formes quadratiques à deux séries de variables. (424).

L'auteur établit que ces formes peuvent être ramenées à la forme réduite suivante :

$$x_1^2(a_0 y_1^2 - a_2 y_2^2) + 4x_1 x_2 b_1 y_1 y_2 + x_2^2(-c_0 y_1^2 + c_2 y_2^2).$$

André (*D.*). — Sur la divisibilité d'un certain quotient par les puissances d'une certaine factorielle. (426).

Si x et n sont des nombres entiers, l'expression

$$Q = \frac{(nx)!}{(x.)^n}$$

est toujours un nombre entier. M. Weill a démontré que Q était divisible par $n!$. M. André établit que, s'il est impossible d'exprimer x par une somme de moins de k puissances d'un même nombre premier, le quotient Q est divisible par la puissance $k^{\text{ième}}$ de la factorielle $n!$.

N° 8; 20 février.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1881. (474).

Bigourdan. — Observations de la comète $b =$ III 1881, faites à l'Observatoire de Paris. (502).

Tacchini. — Sur la distribution des protubérances, des facules et des taches solaires observées à Rome pendant les deuxième et troisième trimestres de 1881. (505).

Tacchini. — Observations spectroscopiques solaires faites à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le deuxième et le troisième trimestre de 1881. (506).

Laguerre. — Sur la distribution dans le plan des racines d'une équation algébrique dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. (508).

Cette étude est faite pour le polynôme hypergéométrique

$$F(-n, \alpha, \beta - n + 1, x).$$

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (511).

Boussinesq. — Sur l'intégration de l'équation

$$A\frac{d^n\varphi}{dt^n} + \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \ldots\right)^n \varphi = 0.$$

(514).

Lévy (*M.*). — Sur la solution pratique du problème du transport de la force à de grandes distances. (517).

Michelson. — Sur le mouvement relatif de la Terre et de l'éther. (520).

N° 9; 27 février.

Darboux. — Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables et sur une propriété des fonctions algébriques. (575).

Poincaré. — Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. (577).

Soient les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p},$$

où les X sont des polynômes réels entiers, par rapport aux variables réelles x, en adjoignant aux rapports précédents le rapport supposé égal

$$\frac{ds}{1 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2},$$

l'auteur démontre qu'on peut toujours trouver un nombre α, tel que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent s'exprimer par des séries ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}$$

et convergentes pour toutes les valeurs réelles de s. Les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, des coefficients des polynômes X et des valeurs initiales des variables.

Picard (E.). — Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires. (579).

Sur la recherche de fonctions de deux variables qui puissent être considérées comme les analogues des fonctions elliptiques modulaires, c'est-à-dire qui se reproduisent pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires faites sur les variables.

N° 10; 6 mars.

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (594).

Laguerre. — Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière. (635).

Si les facteurs primaires d'une fonction entière sont de la forme

$$e^{P(x)}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

où $P(x)=\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\ldots+\frac{x^n}{na^n}$, n est le genre de la fonction.

Les fonctions de genre zéro et 1 ont des propriétés analogues aux fonctions rationnelles entières; ainsi entre deux racines réelles consécutives il y a une et une seule racine réelle de la dérivée. On en conclut que, si toutes les racines sont réelles, la dérivée qui a aussi toutes ses racines réelles est encore du premier genre.

Si le rapport $\frac{f'(z)}{z^n f(z)}$, où n désigne un nombre entier, tend vers zéro quand z croît indéfiniment, la fonction $f(z)$ est du genre n.

N° 11; 13 mars.

Brioschi. — Sur une application du théorème d'Abel. (686).

Dans une Communication insérée dans les *Comptes rendus* (14 février 1881), M. Brioschi a montré comment le théorème d'Abel se prêtait à l'étude de l'équation de Lamé; il montre comment, en suivant la voie qu'il a ouverte, on parvient aisément, pour $n=3$, aux résultats de M. Hermite.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (713).

Goursat. — Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes. (715).

Soient

$$(1)\qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

une suite indéfinie de quantités imaginaires, et

$$(2)\qquad c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,$$

une seconde suite, telle que la série

$$\sum_0^\infty |c_n|$$

soit convergente.

Soit A une région du plan à contour simple ne contenant aucun des nombres a, dans cette région la série

$$(3)\qquad \sum_0^\infty \frac{c_n}{1-\frac{x}{a_n}}$$

est absolument convergente. Si maintenant l'on considère une aire T ne renfermant aucun point de la série (1) limitée par une ou plusieurs courbes ayant une tangente en chacun de leurs points, et telle que, sur un arc fini de l'une d'elles, il y ait toujours une infinité de points de la série (1), on ne pourra continuer la fonction définie par la série (3) au delà de l'aire T.

N° 12; 20 mars.

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (753).

Faye. — Lettre de M. Fuss sur les grands objectifs, trouvée par M. Truchot dans les papiers du conventionnel Romme. (768).

Bigourdan. — Observations des planètes (222) et (223) faites à l'Observatoire de Paris. (777).

Laguerre. — Sur les hypercycles. (778).

On sait que M. Laguerre appelle *semi-droite, cycle,* une droite, un cercle parcourus dans un sens déterminé.

Certaines courbes algébriques (*courbes de direction*) constituent un être géométrique quand on les regarde comme enveloppe d'une semi-droite, quand on attribue à leurs tangentes un sens déterminé; pour de telles courbes, l'enveloppe d'un cercle de rayon contenu, dont le centre les décrit, se décompose en deux courbes distinctes.

Les *hypercycles* rentrent dans cette classe de courbes; ils comprennent l'hypocycloïde à quatre rebroussements et toutes les anticaustiques de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

Étant donnée une tangente quelconque A à un hypercycle, il lui correspond une autre tangente A' telle que A_1A', et deux semi-droites fixes P et P' (que l'on peut appeler les *semi-droites fondamentales* de la courbe) forment un *système harmonique.* M. Laguerre entend par là que les deux semi-droites (A, A') et les deux semi-droites (P, P') touchent un même cycle, les points de contacts divisant harmoniquement le cycle.

A est alors dite conjuguée harmonique de A' par rapport à (P, P'). Deux tangentes telles que A, A' constituent un couple de tangentes conjuguées.

Cela posé, l'hypercycle est défini par la propriété suivante : les conjuguées harmoniques d'une semi-droite du plan D, par rapport aux couples de tangentes conjuguées de la courbe, enveloppent un cycle K.

M. Laguerre donne diverses propriétés curieuses de ces courbes.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (781).

Abdank-Abakanowicz. — Sur l'intégrateur mécanique. (783).

N° 13; 27 mars.

Coggia. — Comète découverte en Amérique, le 19 mars 1881; observations faites à l'Observatoire de Marseille. (829).

Bigourdan. — Observations de la nouvelle comète a 1882, faites à l'Observatoire de Paris. (829).

Tacchini. — Observations des protubérances, des facules et des taches solaires, faites à l'Observatoire du Collège Romain, pendant le quatrième trimestre de 1881.

Laguerre. — Sur les hypercycles. (832).

Darboux. — Sur le problème de Pfaff. (835).

M. Darboux montre comment la méthode de Pfaff, pour intégrer une équation aux dérivées partielles, convenablement appliquée, devient aussi simple que toutes les autres.

Considérons une forme

$$\theta_d = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n, \tag{1}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions connues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à un nombre pair de variables.

Soit

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \tag{2}$$

le premier système à intégrer, d'après Pfaff, en

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,dx_1 + \ldots + a_{1n}\,dx_n = X_1\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{21}\,dx_1 + \ldots + a_{nn}\,dx_n = X_n\,dt, \end{array}\right. \tag{3}$$

où t est une variable introduite pour la symétrie. Ce système admet $n-1$ intégrales indépendantes de t. Si l'on désigne ces $n-1$ intégrales par $y_1, \ldots, y_{n-1}$, on démontre que l'expression θ_d est réductible à la forme suivante :

$$\theta_d = K(Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}), \tag{4}$$

où les quantités Y sont des fonctions des seules variables y.

Puisque le système (3) a $n-1$ intégrales seulement, une au moins des variables $x, \ldots, x_n$, par exemple, ne sera pas une intégrale. Parmi les différents systèmes d'intégrales indépendantes, nous choisirons celles qui se réduisent à $x_1, \ldots, x_{n-1}$, pour $x_n = x_n^0$, en sorte que pour cette valeur y_i se réduise à x_i. Supposons que, pour cette même valeur, K se réduise à $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. On peut, sans changer la forme de l'équation (4), diviser K par $\psi(y_1, \ldots, y_{n-1})$, à condition de multiplier par la même fonction toutes les quantités Y; alors la nouvelle valeur de K se réduira à 1 pour $x_n = x_n^0$, et l'on aura l'identité

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n = K(Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}),$$

où les valeurs de K, y_i, se réduiront, pour $x_n = x_n^0$, à 1 et à x_i.

On aura donc, pour $x_n = x_n^0$,

$$X_1^0\,dx_1 + \ldots + X_{n-1}^0\,dx_{n-1} = Y_1'\,dx_1 + \ldots + Y_{n-1}'\,dx_{n-1},$$

où Y'_i désigne le résultat de la substitution de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ à $y_1, \ldots, y_{n-1}$ dans Y_i : donc

$$Y''_i = X^0_i.$$

Ainsi, pour obtenir la forme qui multiplie K dans l'équation (4), il suffit de faire $x_n = x^0_n$ dans l'équation (1), puis de remplacer $x_1, \ldots, x_{n-1}$ par $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Une proposition analogue a lieu pour n impair.

Soit maintenant à intégrer une équation aux dérivées partielles

$$(5) \qquad p_1 = f(z, x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n),$$

et soit

$$dz - f\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n$$

la forme de Pfaff correspondante à cette équation, forme qui contient les $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n$. Le premier système de Pfaff relatif à cette forme sera

$$dx_1 = -\frac{dx_2}{\dfrac{\partial f}{\partial p_2}} = \ldots - \frac{dx_n}{\dfrac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dp_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \ldots = \frac{dp_n}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

et l'on voit que x_1 n'en sera jamais une intégrale. Si donc nous appliquons le théorème précédent et que nous désignions par (z), (x_i), (p_k) les $2n-1$ intégrales qui se réduisent respectivement à z, x_i, p_i, quand on fait $x_1 = x^0_1$, nous aurons

$$(6) \quad dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = K[d(z) - (p_2)\,d(x_2) - \ldots - (p_n)\,d(x_n)],$$

c'est-à-dire que nous obtiendrons du premier coup la forme réduite qui devait être le terme de tous les calculs.

Picard (É.). — Sur un groupe de substitutions linéaires. (837).

Étude arithmétique des substitutions linéaires introduites par l'auteur dans sa communication du 27 février et par lesquelles se reproduisent des fonctions uniformes de deux variables indépendantes.

Poincaré. — Sur les groupes discontinus. (840).

M. Picard a donné un exemple de groupes discontinus contenus dans le groupe linéaires à deux variables

$$\left(x,\ y,\ \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\ \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right).$$

M. Poincaré indique diverses méthodes pour former de tels groupes discontinus. Le procédé suivant fournit, par exemple, des groupes de substitutions de cette forme, discontinus pour les valeurs réelles de x et de y, ce qui entraîne la discontinuité pour les valeurs imaginaires de ces variables, au moins dans une certaine étendue.

Soit une forme quadratique $F(x, y, z)$ à coefficients entiers, elle admettra une infinité de substitutions semblables à coefficients entiers

$$(x,\ y,\ z,\ ax+by+cz,\ a'x+b'y+c'z,\ a''x+b''y+c''z);$$

les substitutions correspondantes

$$\left(x,\ y,\ \frac{ax+by+cz}{a''x+b''y+c''z},\ \frac{a'x+b'y+c'z}{a''x+b''y+c''z}\right)$$

formeront un groupe discontinu.

M. Poincaré montre encore comment de chaque groupe fuchsien on peut déduire un groupe formé de substitutions de la forme (1), à coefficients réels, et qui est discontinu pour les valeurs réelles et, par conséquent, aussi pour les valeurs imaginaires de x et de y.

Léauté. — Sur l'application de la résistance des matériaux aux pièces des machines. (843).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par H. RESAL. — 3e série.

Tome VII. — Année 1881.

West. — Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations; applications diverses, d'après Hoené Wronski. (5-31).

Resal. — Sur quelques théorèmes de Mécanique. (32-48).

I. — Applications de ce théorème, dû à M. Habich : L'accélération d'un point libre, lorsque sa direction est constante, est proportionnelle au rapport du cube de la vitesse du mobile au rayon de courbure de sa trajectoire.

II. — L'accélération d'un point dirigé vers un centre fixe est proportionnelle au cube de la vitesse, au rayon vecteur et à la courbure de la trajectoire.

III. — Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution.

Recherche des conditions auxquelles doivent satisfaire les composantes, suivant la méridienne et la tangente au parallèle d'une force capable de faire décrire au mobile une courbe donnée.

Genty. — Applications mécaniques du Calcul des quaternions. (49-70).

Exposition, au moyen de la méthode des quaternions, des principaux résultats obtenus par Minding et M. Darboux dans la théorie de l'équilibre astatique.

Pepin (le P.). — Sur les surfaces osculatrices. (71-108).

La théorie de ces surfaces conduit (HERMITE, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 144) à la recherche des solutions entières de l'équation

$$m^3 + 6m^2 + 11m = 3(n+1)(n+2);$$

l'auteur parvient à la conclusion suivante :

Si, outre les surfaces du premier, du cinquième et du vingtième degré, il en existe d'autres que l'on puisse rendre osculatrices en des points arbitraires d'une surface donnée, leur degré m est supérieur à 675 et l'ordre n de leur contact est supérieur à 13000.

Resal. — Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. (109).

West. — Digressions sur les séries. (111-128).

Resal. — Recherches sur l'Électrodynamique. (129-146).

Démonstration de la loi d'Ampère. — Action d'un courant fermé sur un élément de courant. — Action sur un élément de courant d'un courant circulaire dont le rayon est très petit par rapport à la distance du centre à l'élément considéré. — Action d'un solénoïde sur un élément de courant. — Action d'un courant fermé sur l'un des pôles du solénoïde. — Action d'un solénoïde sur l'un des pôles d'un autre solénoïde.

Boussinesq. — Coup d'œil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles et sur une raison naturelle de leur convergence, applicable aux autres développements de fonctions arbitraires employés en Physique mathématique. (147-160).

Sire (G.). — Le dévioscope : appareil donnant directement le rapport qui existe entre la vitesse angulaire de la Terre et celle d'un horizon quelconque autour de la verticale du lieu. (161-166).

André (D.). — Sur les permutations alternées. (167-184).

Considérons n éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et formons-en toutes les permutations. Si, dans l'une quelconque d'entre elles, on retranche chaque indice du suivant, on obtiendra une suite de $n-1$ différences, dont aucune n'est égale à zéro, et qui, dans toutes les permutations, sauf deux, sont les unes positives, les autres négatives. Lorsque, tout le long de cette suite, ces différences sont alternativement positives et négatives, la permutation correspondante est dite *alternée*.

Le nombre des permutations alternées de n éléments distincts est toujours pair; M. André le désigne par $2A_n$ et établit la relation

$$2A_{n+1} = C_n^0 A_0 A_n + C_n^1 A_1 A_{n-1} + C_n^2 A_2 A_{n-2} + \ldots + C_n^n A_n A_0.$$

Cette égalité, vraie encore pour $n=1$, n'est plus vraie pour $n=0$.

$$(A_0 = A_1 = A_2 = 1).$$

On a

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = A_0 + A_1\frac{x}{1!}+\ldots+A_n\frac{x^n}{n!},$$

$$\operatorname{séc} x = A_0 + A_2\frac{x^2}{2!}+A_4\frac{x^4}{4!}+\ldots,$$

$$\operatorname{tang} x = A_1\frac{x}{1}+A_3\frac{x^3}{3}+A_5\frac{x_5}{5}+\ldots.$$

M. André donne en outre diverses relations du second et du premier degré entre les coefficients A_n et les coefficients d'indice moindre.

Léauté. — Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. (185).

L'auteur se propose de déterminer un polynôme en x de degré n tel que sa valeur moyenne et celles de ses premières dérivées successives, dans un intervalle donné, soient égales à $n+1$ quantités données. Si l'on suppose que l'intervalle s'étend de $-h$ à $+h$, on est ramené, en désignant les quantités données par $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$, à déterminer le polynôme y par les équations

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} y\,dx = Y_0,$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \frac{dy}{dx}\,dx = Y_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \frac{d^n y}{dx^n}\,dx = Y_n.$$

On trouve aisément que l'on peut poser

$$y = P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \ldots + P_n Y_n,$$

les symboles $P_0, \ldots, P_n$ désignant des polynômes en x de degré égal à leur indice et indépendants des quantités Y et satisfaisant à l'équation générale

$$P_{n-1} = \frac{dP_n}{dx}.$$

En posant ensuite

$$P_n = B_n\frac{x^n}{n!}+B_{n-1}\frac{x^{n-1}h}{(n-1)!}+\ldots+B_0 h^n,$$

on reconnaît que les coefficients numériques $B_0, B_1, \ldots, B_n$ forment une suite indépendante de l'indice du polynôme P que l'on considère : M. Léauté donne pour déterminer ces coefficients la formule

$$2n!\,B_{2n} = \left(\frac{d^{2n}\dfrac{2x}{e^x+e^{-x}}}{dx^{2n}}\right)_{x=0},$$

$$B_{2n+1} = 0.$$

Les polynômes P sont donnés par les formules

$$P_n = \left[\frac{d^n\left(hz\,\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}}\right)}{dz^n}\right]_{z=0}.$$

Les polynômes de degré impair admettent les racines $-h$, o, $+h$; les polynômes de degré pair admettent une racine comprise dans chacun des intervalles de cette suite; il n'y a pas d'autre racine réelle.

D'après cela, une fonction quelconque de x pourra, dans l'intervalle de $-h$ à $+h$, se développer par la série indéfinie

$$y = P_0(\text{moy.}\,y)_{-h}^{+h} + P_1\left(\text{moy.}\,\frac{dy}{dx}\right)_{-h}^{+h} + \dots.$$

Voici les premiers termes du développement

$$\begin{aligned} y = {} & (\text{moy.}\,y)_{-h}^{+h} + \frac{3x}{3.1!}\left(\text{moy.}\,\frac{dy}{dx}\right)_{-h}^{+h} \\ & + \frac{3x^2-h^2}{3.2!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{-h}^{+h} \\ & + \frac{3x^3-3h^2x}{3.3!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{-h}^{+h} \\ & + \frac{3x^4-6h^2+\frac{7}{5}h^4}{3.4!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{-h}^{+h} \\ & + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Quand l'intervalle considéré diminue indéfiniment, la série précédente devient celle de Maclaurin.

Mathieu (E.). — Remarques sur les Mémoires relatifs à la théorie de la lumière renfermés dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de Cauchy. (201-214).

Brassinne. — Détermination des trois axes d'un corps, sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, une action maximum. (215).

Si en un point d'un corps on détermine les trois axes principaux, et si par chacun d'eux on mène un plan qui divise en parties égales l'angle des plans rectangulaires dont il est l'intersection, les trois perpendiculaires menées par le point donné aux plans bissecteurs seront les axes sur lesquels l'action des forces centrifuges est maximum.

Mathieu (E.). — De la polarisation elliptique par réflexion sur les corps transparents, pour une incidence voisine de l'angle de polarisation. (219-238).

D'après les théories de Fresnel et de Neumann, il existe un angle d'incidence pour lequel la lumière naturelle est polarisée complètement, angle trouvé auparavant par Brewster au moyen de l'expérience. D'après les recherches de

M. Jamin, il existe cependant très peu de substances diaphanes qui polarisent complètement la lumière dans le plan d'incidence; mais l'intensité du rayon réfléchi peut seulement être très petite. Il en résulte que, dans le voisinage de l'incidence calculée par la loi de Brewster, un rayon de lumière polarisée dans un azimut quelconque donne lieu à un rayon réfléchi polarisé elliptiquement, l'ellipse de vibration étant en général très allongée. Reprenant la théorie de Neumann, M. Mathieu recherche quelle petite perturbation modifie cette théorie : « Cette perturbation », dit-il, « provient d'une très petite perte de force vive qui se fait sur le plan réflecteur, en sorte que les rayons réfléchi et réfracté ne prennent pas toute la lumière qui sort du rayon incident.

« Imaginons un rayon de lumière tombant sur un corps diaphane et polarisé perpendiculairement au plan d'incidence; je démontre qu'à la rencontre du plan réflecteur il se fait en général dans les rayons réfléchi et réfracté un changement de phase par rapport au rayon incident. Quand l'incidence varie depuis zéro jusqu'à l'angle droit, le changement de phase dans le rayon réfléchi varie depuis une fraction très petite de la demi-ondulation jusqu'à la demi-ondulation. Quand le rayon incident est au contraire polarisé dans le plan d'incidence, le changement de phase du rayon réfléchi reste toujours très petit. Si donc l'on suppose que l'on décompose un rayon polarisé dans un azimut quelconque en deux pareils rayons, la polarisation elliptique pour une incidence voisine de l'angle de Brewster dépendra surtout du changement de phase du premier rayon composant. »

Combescure (*É.*). — Sur quelques questions concernant les forces centrales. (239-275).

Dans le deuxième Tome de la première série du *Journal de Mathématiques*, Binet a considéré, au lieu des trois équations ordinaires relatives au mouvement produit par une force centrale, un système de n équations présentant la forme caractéristique des équations mentionnées : M. Combescure reprend et développe cette idée, en introduisant à la place du rayon vecteur la racine carrée d'une forme quadratique générale des coordonnées. Il traite le cas d'un milieu résistant et divers exemples particuliers.

Teixeira (*G.*). — Sur le développement des fonctions implicites en une série. (276-282).

Il s'agit de développer en série ordonnée suivant les puissances de x une fonction u définie par les deux équations

$$u = f(y),$$
$$y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots + x^n\varphi_n(y);$$

l'auteur parvient au développement suivant :

$$u = f(t) + xf'(t).\varphi_1(t) + \ldots$$
$$+ \frac{x^n}{1.2\ldots n}\sum \frac{d^b\{f'(t)[\varphi_1(t)]^\alpha\ldots[\varphi_n(t)]^\lambda\}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda\, dt^b},$$

où l'on doit donner à α, β, γ, ..., λ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = i,$$

et où b est donné par la formule

$$b + 1 = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Ce développement contient naturellement comme cas particulier la formule de Lagrange.

André (D.). — Intégration, sous forme finie, d'une quatrième espèce d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables. (283-288).

L'auteur a donné, dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques* (3e série, t. VI, 1880, p. 27-48), un procédé pour intégrer trois espèces d'équations différentielles linéaires. Ce Mémoire a été analysé dans le *Bulletin* (2e série, t. IV, 2e Partie, p. 269). Nous renvoyons à cette analyse pour les définitions et les notations; la quatrième espèce, dans le genre des équations à dérivée régulière, que l'auteur, dans cette addition à son Mémoire, apprend à intégrer est caractérisée par la fonction $F(n)$, que définit l'égalité

$$F(n) = \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n-1)f(n)},$$

dans laquelle p est un nombre quelconque non entier, et où $f(n)$ représente un polynôme quelconque entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n. L'intégration, sous forme finie, s'obtient à l'aide de fonctions algébriques rationnelles et d'expressions irrationnelles de la forme $(1-ax)^p$: elle dépend de la sommation de la série dont le terme général U_n est donné par l'égalité

$$U_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n} u_n x^n,$$

où $u_n = f(n)v_n$ est le terme général d'une série récurrente proprement dite. M. André effectue cette sommation et parvient ainsi, par la voie décrite dans son premier Mémoire, à l'intégrale cherchée. Comme application il considère l'équation

$$(2x^2 - 3x + 1)\frac{d^2Y}{dx^2} + \left(\frac{16}{3}x - 4\right)\frac{dY}{dx} + \frac{8}{9}Y = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Y = \frac{C_1}{\sqrt[3]{1-x}} + \frac{C_2}{\sqrt[3]{1-2x}}.$$

Cornaglia. — De la propagation verticale des ondes dans les liquides. (289-340).

Resal. — Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité. (341-374).

I. *Formules fondamentales.* — 2. Forme de la surface capillaire. — 3. Influence d'une paroi sur la surface de contact. — 4. Rappel des résultats de l'expérience.

II. *Phénomènes capillaires relatifs aux liquides pesants.* — 5. Forme que prend la surface d'un liquide au contact d'une lame verticale. — 6. Forme de la surface d'un liquide entre deux lames verticales parallèles dont l'une est mouillée et l'autre non mouillée par le liquide. — 7. Forme d'un liquide entre deux lames parallèles de même nature. — 8. Deux lames parallèles et verticales sont très rapprochées l'une de l'autre. — 9. De la surface capillaire dans un tube circulaire d'un faible diamètre. — 10. Expression du volume d'un liquide compris entre sa surface libre et un plan horizontal déterminé, quelle que soit la forme de la section du tube. — 11. Liquides superposés dans un tube circulaire capillaire. — 12. Forme d'une très petite goutte d'un liquide reposant sur un plan horizontal qu'elle ne mouille pas. — 13. Goutte très large. — 14. Liquides soustraits à l'action de la pesanteur. — 15. La surface diffère peu d'une sphère. — 16. La surface diffère peu d'un tore.

III. *Des liquides uniquement soumis à leurs actions mutuelles.* — 17. Équation générale des surfaces de révolution dont la moyenne courbure est constante.

Poincaré (H.). — Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. (375-424).

L'auteur se propose d'étudier les courbes définies par une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

où X et Y sont des polynômes entiers en x, y.

Pour éviter les difficultés que pourrait présenter l'étude des branches infinies, il suppose la courbe projetée sur une sphère, l'œil étant au centre. Le plan de l'équateur (parallèle au plan de la courbe) partage la sphère en deux hémisphères; à chaque point (x, y) de la courbe correspondent deux points $(x, y, 1)$, $(x, y, 2)$ situés chacun dans un hémisphère. Une telle courbe est dite *caractéristique.*

En général, par un point de la sphère passe une caractéristique et une seule.

I. *Définitions et généralités.* — Un *cycle sphérique* est une courbe telle qu'après avoir décrit un arc fini, on revienne au point de départ : tel est, par exemple, un cercle de la sphère; toute courbe algébrique se compose de un ou plusieurs cycles.

Une *spirale sphérique* est une courbe qui coupe un cycle sphérique en un seul point; exemple : la loxodromie.

Les deux portions d'une même caractéristique qui se trouvent de part et d'autre d'un de ses points forment deux *demi-caractéristiques* distinctes, à moins que la courbe considérée ne soit fermée.

Si l'on divise une caractéristique qui n'offre ni point double, ni point d'arrêt en deux demi-caractéristiques, si l'une de ces demi-caractéristiques ne coupe aucun des cycles algébriques qu'en un nombre fini de points. la caractéristique donnée est un cycle.

Un *polycycle* est une courbe fermée qui présente des points doubles.

Un *système topographique* est un système de cycles et de polycycles tracés sur la sphère tels que par chaque point passe un cycle ou un polycycle et un seul, excepté en quelques points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle.

Les points doubles des polycycles sont des *cols,* les points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle sont des *fonds,* ou des *sommets.*

Le lieu des points où chaçun des cycles d'un système topographique est tangent à une caractéristique est la courbe des contacts.

II. *Étude des caractéristiques dans le voisinage d'un point de la sphère.* — Soient α, β les coordonnées de ce point et

$$X = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta) + \ldots,$$
$$Y = b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta) + \ldots.$$

Si a_0 et b_0 ne sont pas nuls à la fois, par le point (α, β) passera une caractéristique et une seule.

Soient $a_0 = b_0 = 0$. Si l'équation

$$(a_1-\lambda)(b_2-\lambda) - b_1 a_2 = 0$$

a deux racines différentes λ_1 et λ_2 et si le rapport de ces racines est positif ou imaginaire, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

est de la forme

$$Z_1^{\lambda_1} Z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où Z_1 et Z_2 sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x-\alpha$, $y-\beta$ et s'annulant pour $x = \alpha$, $y = \beta$.

Si le point (x, y) se rapproche indéfiniment du point (α, β) suivant une certaine courbe, la tangente à cette courbe en α, β et la limite de la tangente à la caractéristique en x, y forment un faisceau homographique. Il y a maintenant lieu de distinguer divers cas selon la nature de cette homographie.

Si les droites doubles du faisceau homographique sont réelles et si deux droites conjuguées quelconques ne sont pas l'une dans l'angle aigu, l'autre dans l'angle obtus formé par ces deux droites doubles, l'intégrale générale est de la forme

$$Z_1^{\lambda_1} Z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où Z_1 et Z_2 sont des fonctions réelles de x et de y; λ_1, λ_2 des nombres réels positifs, toutes les caractéristiques qui pénètrent dans une région de la sphère assez voisine du point (α, β) pour que les séries Z_1, Z_2 soient convergentes vont passer par le point singulier (α, β); le point est un *nœud.*

Si deux droites conjuguées quelconques des faisceaux sont situées de part et d'autre des droites doubles (réelles), deux caractéristiques seulement passeront par le point; la démonstration de ce fait a été donnée par MM. Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique,* XXXVI^e^ cahier). Le point singulier est un *col.*

Si les droites doubles sont imaginaires, sans que le faisceau soit en involution, les caractéristiques sont des spirales qui s'approchent indéfiniment du point singulier (α, β) : ce point est alors un *foyer.*

Enfin, si le faisceau est en involution avec des droites doubles imaginaires; ou bien les caractéristiques sont des spirales et le point (α, β) est un foyer, ou elles forment un système topographique dont le point (α, β) est un sommet; ce point est alors un *centre.*

M. Poincaré étudie en outre quelques cas plus particuliers et montre comment l'étude des points situés sur l'équateur peut être ramenée à l'étude des cas précédents.

III. *Distribution des points singuliers.* — Après avoir prouvé que tout système de caractéristiques admet des points doubles, l'auteur établit que, sans nuire à la généralité, on peut supposer :

1° Que les polynômes X, Y sont de même degré ;

2° Que si X_2 et Y_2 sont les termes de degré le plus élevé de X et de Y, on n'a pas identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0;$$

3° Que les courbes $X = Y = 0$ ne se coupent nulle part en plusieurs points confondus et ne se coupent pas sur l'équateur;

4° Que l'équation homogène

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

n'a pas de racines multiples.

L'équateur est alors une caractéristique; de plus on peut supposer que tous les points singuliers sont des *nœuds,* des *cols* ou des *foyers.*

Le nombre des points singuliers étant toujours pair est au moins égal à 2.

Tout point singulier situé sur l'équateur est un nœud ou un col.

M. Poincaré introduit ensuite une considération importante, celle de l'*indice* d'un cycle. Soit un cycle situé tout entier dans un hémisphère. Ce cycle divise la sphère en deux régions, dont l'une, située tout entière dans l'un des hémisphères, s'appellera l'*intérieur* du cycle.

Si le cycle est tout entier dans le premier hémisphère, on dira qu'un point mobile décrit le cycle dans le sens positif s'il a constamment l'intérieur du cycle à sa gauche; si, au contraire, le cycle était dans le second hémisphère, un point décrirait le cycle dans le sens positif s'il en avait constamment l'intérieur à sa droite.

Supposons qu'un point mobile décrive le cycle dans le sens positif et considérons les variations de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$, soit k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit

$$i = \frac{h-k}{2};$$

le nombre i s'appellera l'indice du cycle.

On peut ramener le calcul de l'indice d'un cycle quelconque au calcul de l'indice des différents cycles infiniment petits qui le composent.

Un cycle infiniment petit qui ne contient à son intérieur aucun point singulier a pour indice zéro.

Un cycle infiniment petit qui contient à son intérieur un point singulier a pour indice ± 1.

L'indice d'un cycle situé tout entier dans l'un des hémisphères est

$$-(N + F - C),$$

en désignant par N le nombre des nœuds, par F celui des foyers, par C le nombre des cols situés à l'intérieur du cycle.

L'indice de l'équateur est $N' - C' - 1$, en désignant par $2N'$ le nombre des nœuds, par $2C'$ le nombre des cols situés sur l'équateur.

La courbe $X = 0$ et la courbe $Y = 0$ se composent d'un certain nombre de cycles.

Considérons deux quelconques de ces cycles; ils se couperont en un certain nombre de points.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ les $2n$ points d'intersection de ces deux cycles rangés d'après l'ordre où on les rencontre en parcourant l'un des deux cycles, le cycle $X = 0$, par exemple, dans le sens positif : *Si deux points consécutifs sont situés dans un même hémisphère, l'un est un nœud, l'autre est un col.*

IV. *Théorie des contacts.* — L'objet principal de ce Chapitre est l'étude du nombre de points où un arc ou un cycle donné touche une caractéristique, c'est-à-dire du nombre des contacts de cet arc ou de ce cycle.

Le nombre des contacts d'un cycle algébrique est toujours pair à la condition :

1° Que l'on compte un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre pour n contacts;

2° Qu'un point anguleux du cycle donné soit considéré comme un ou comme deux contacts selon que la caractéristique qui y passe y touche ou y traverse le cycle;

3° Qu'un point singulier compte pour $n+1$ contacts si le cycle a, en ce point, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une caractéristique;

4° Qu'un foyer qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un contact;

5° Qu'un col ou un nœud qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un ou deux contacts, selon la position des tangentes au cycle en ce point.

Si, entre deux points de la sphère, on peut mener un arc quelconque sans contact, on peut aussi mener entre ces deux points un arc algébrique sans contact.

Si AB est un arc algébrique sans contact, si AA_1 et BB_1 sont deux arcs de caractéristiques, on peut mener de A_1 à B_1 un arc sans contact.

Si AB et A_1B_1 sont deux caractéristiques, si AA_1 et BB_1 sont deux arcs algébriques qui ne coupent AB et A_1B_1 en aucun autre point que A, B, A_1 ou B_1, les nombres des contacts de AA_1 et de BB_1 sont de même parité.

Si un arc de caractéristique qui ne passe par aucun point singulier est *sous-tendu* par un arc de courbe, le nombre des contacts de cet arc de courbe est impair.

(L'expression *sous-tendu* signifie que les deux branches de courbe formées par la caractéristique prolongée au delà des deux points qui limitent les deux arcs sont toutes deux intérieures ou extérieures au cycle formé par les deux arcs.)

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, diretti dal prof. FRANCESCO BRIOSCHI.

Tome X; 1880-1881.

Brioschi. — Sur une propriété des équations différentielles linéaires du second ordre. (1-3).

Généralisation d'une proposition due à M. Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 23 décembre 1879). Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation

$$y'' + py' + qy = 0,$$

dont le produit $y_1 y_2 = z$ est connu : on peut former une équation différentielle linéaire du second ordre

$$Y'' + lY' + mY = 0,$$

dont les solutions soient

$$Y_1 = y_1 u_1, \quad Y_2 = y_2 u_2,$$

u_1, u_2 étant des fonctions connues de x; en faisant

$$P = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1',$$

$$l = -\frac{P'}{P}, \quad m = -\frac{1}{P}(Y_2' Y_1'' - Y_1' Y_2''),$$

P et m s'expriment au moyen des quantités p, q, u_1, u_2, z et de leurs dérivées; les formules prennent un intérêt particulier quand on suppose que u_1 et u_2 sont des solutions d'une équation différentielle linéaire telle que

$$u'' + \lambda u' + \mu u = 0;$$

on a alors

$$P = Cwe^{-\int p\,dx} + Dze^{-\int \lambda\,dx}$$

et

$$m = \frac{1}{P}\left\{ P'' + \frac{3}{2}(p+\lambda)P' + 3\left(q + \mu + \frac{1}{2}\lambda p\right)P \right.$$
$$\left. + Cwe^{-\int p\,dx}\left[p' + \frac{1}{2}p^2 - 2q\right] + Dze^{-\int \lambda\,dx}\left[\lambda' + \frac{1}{2}\lambda^2 - 2\mu\right]\right\},$$

où $w = u_1 u_2$ et où C, D sont des constantes.

Brioschi. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre. (4-9).

Suite des recherches publiées sous le même titre dans le volume précédent : Soit

$$y'' + py' + qy = 0$$

une équation différentielle linéaire du second ordre; une forme binaire d'ordre n, $F(x) = (y_1, y_2)$, où y_1, y_2 représentent un système fondamental d'intégrales satisfera à une équation linéaire d'ordre $n+1$; soient

$$H(x) = h(y_1, y_2) = f_{11} f_{22} - f_{12}^2,$$
$$\Theta(x) = \theta(y_1, y_2) = 2(f_1 h_2 - f_2 h_1);$$

on aura, comme il a été vu plus haut,

$$H(x) = \frac{\mu^2}{n^2(n-1)C^2}[nFF'' - (n-1)F'^2 + npFF' + n^2 qF^2],$$

$$\Theta(x) = \frac{\mu}{n(n-2)C}[2(n-2)F'H - nH'F],$$

où $\mu = e^{\int p\,dx}$ et où C est une constante; soient

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = H(x), \quad P_3 = \Theta(x),$$

$$P_{r+1} = \frac{\mu}{n(n-r)C}\left[r(n-2)F'P_r - nFP'_r\right] + \frac{r(n-1)}{n-r}P_2P_{r-1};$$

l'équation différentielle d'ordre $n+1$, à laquelle satisfera $F(x)$, sera

$$\frac{\mu}{C}\left[(n-2)F'P_n - FP'_n\right] + n(n-1)P_2P_{n-1} = 0;$$

pour $n = 2$ on retombe sur l'équation connue du troisième degré.

Cette équation prend la forme

$$2\varphi\delta F''' + 3\gamma\delta F'' + (\gamma + \gamma'\delta + 8\psi\delta)F' + 4(\psi + \psi'\delta)F = 0$$

en supposant l'équation en y écrite sous la forme

$$y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{\delta}\right)y' + \frac{\psi}{\varphi}y = 0.$$

En supposant

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad \gamma(x) = \varphi' + \frac{\varphi}{\delta} = ax^2 + bx + c,$$

$$\delta x = lx + m, \quad \psi(x) = \alpha x + \beta,$$

on trouve aisément que $-\dfrac{m}{l}$ est une racine e de $\varphi(x)$ et que

$$a = 4(\rho+3), \quad b = 4\rho e, \quad c = 4\rho e^2 - g_2(\rho+1), \quad \delta = \frac{1}{\rho}(x-e),$$

en faisant $l = \dfrac{1}{\rho}$.

Les substitutions

$$x - e_1 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{sn}^2 u, \quad x - e_2 = (e_1 - e_2)\,\mathrm{cn}^2 u, \quad x - e_3 = (e_1 - e_3)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

en supposant $k^1 = \dfrac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}$, donnent, à la place de l'équation en y et x, l'équation en x et u

$$\frac{d^2y}{du^2} + \rho(e_3 - e_1)\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{x-e}\frac{dy}{du} + \frac{\alpha x + \beta}{e_3 - e_1}y = 0,$$

qui fournit trois types distincts, suivant que l'on prend pour e l'une ou l'autre des racines e_1, e_2, e_3 de $\varphi(x)$; si, en particulier, on détermine les constantes α, β, ρ de façon que l'on ait

$$\psi + \psi'\delta = 0,$$

l'équation du troisième ordre en $F(x)$ admettra une solution de la forme $F(x) =$ const., et les trois équations dont on vient de parler seront

$$\frac{d^2y}{du^2} - \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\frac{dy}{du} - m^2k^2\,\mathrm{sn}^2 u y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\frac{dy}{du} + m^2k^2\,\mathrm{cn}^2 u y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{du^2} + k^2\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\frac{dy}{du} + m^2\,\mathrm{dn}^2 u y = 0,$$

et en se servant de la relation $y_1 y_2 =$ const., on trouve qu'elles admettent respectivement comme intégrales particulières

$$X = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u},$$
$$Y = - i \arcsin (k \operatorname{sn} u),$$
$$Z = - i \operatorname{am} u.$$

Enfin M. Brioschi montre qu'on peut encore déterminer les constantes de façon que l'équation en $F(x)$ soit vérifiée par un polynôme du degré n.

Casorati. — Le calcul des différences finies interprété et accru de nouveaux théorèmes; utilité de ce calcul dans les recherches actuelles relatives aux fonctions de variables complexes. (10-45).

I. *Première interprétation.* — Appelons *couronne* la portion du plan d'une variable imaginaire x comprise entre deux cercles ayant le point x_1 pour centre commun : soit y une fonction analytique de x ayant en x_1 telle singularité que l'on voudra, mais n'admettant aucun point singulier à l'intérieur de la couronne, en sorte que, x_0 étant un point de cette couronne, y puisse être développée en une série procédant suivant les puissances entières de $x - x_0$, convergente à l'intérieur d'un cercle qui n'ait pas de points en dehors de la couronne. Soit maintenant Δy la *différence* de la fonction y, c'est-à-dire l'accroissement qu'elle subit quand la variable partant du point x de la couronne revient en ce point après avoir fait un tour dans le sens direct, accroissement qui sera nul si la fonction est *monotrope* dans la couronne.

De l'équation

$$\Delta \log (x - x_1) = 2\pi i = \varpi$$

résulte que la fonction $\log (x - x_1)$ se comporte, relativement aux *différences* dont s'occupe M. Casorati, comme la variable indépendante dans le calcul ordinaire des différences : on est ainsi amené à introduire la variable

$$t = \frac{\log (x - x_1)}{2\pi i},$$

d'où

$$x - x_1 = e^{\varpi t}.$$

Les fonctions monotropes (qu'on représentera dorénavant par la lettre φ) ont la période $\Delta t = 1$; on aura

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Delta (\varphi y) = \varphi \Delta y.$$

L'auteur introduit, outre les symboles Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, dont le sens est éclairci par ce qui précède, les symboles θy, $\theta^2 y$, $\theta^3 y, \ldots, \theta^n y$ est la valeur que prend la fonction y quand on y remplace t par $t + n$; on a, par exemple,

$$\Delta y = \theta y - y.$$

L'opération θy est éminemment distributive.

Si l'on désigne par $F(u, v, w, \ldots)$ une fonction uniforme des variables u, v, w, .., qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable x ou t, on a évidemment

$$\theta^n F(u, v, w, \ldots) = F(\theta^n u, \theta^n v, \theta^n w, \ldots).$$

On convient encore d'écrire $(\theta - a)y$ à la place de $\theta y - ay$, en sorte que

$$(\theta - 1)y = \Delta y;$$

d'après cela, les équations symboliques

$$\theta - 1 = \Delta, \quad 1 + \Delta = \theta$$

se comprennent d'elles-mêmes.

Si $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont des quantités constantes par rapport à t et si l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines de l'équation

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0,$$

on pourra écrire

$$A_0 \theta^n y + A_1 \theta^{n-1} y + \ldots + A_{n-1}\theta y + A_n y = A_0(\theta - a_1)(\theta - a_2)\ldots(\theta - a_n)y.$$

Différentiation finie. — En faisant

$$t^{(n)} = t(t-1)\ldots(t-n+1),$$

on a

$$\theta t^{(n)} = (t+1)t^{(n-1)}, \quad \Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)},$$

plus généralement, si on fait

$$F = \Phi_0 t^{(n)} + \Phi_1 t^{(n+1)} + \ldots + \Phi_n,$$

les Φ étant, comme il a été dit au début, des fonctions monotropes, on aura

$$(\theta - a)a^t F = aa^t[n\Phi_0 t^{(n-1)} + (n-1)\Phi_1 t^{(n-2)} + \ldots + \Phi_{n-1}].$$

Intégration finie. — La solution la plus générale de l'équation

$$(\theta - a)y = a^t(\Phi_0 t^{(n)} + \ldots + \Phi_n)$$

est

$$y = \frac{a^t}{a}\left(\Phi_0 \frac{t^{(n+1)}}{n+1} + \ldots + \Phi_n \frac{t}{1} + \Phi_{n-1}\right),$$

Φ_{n+1} étant une fonction monotrope arbitraire.

La solution la plus générale de l'équation

$$(\theta - a)^\lambda y = 0$$

est

$$y = \frac{a^t}{a^{\lambda-1}}\left[\Phi_0 \frac{t^{(\lambda-1)}}{(\lambda-1)^{(\lambda-1)}} + \Phi_1 \frac{t^{(\lambda-2)}}{(\lambda-2)^{(\lambda-2)}} + \ldots + \Phi_{\lambda-1}\right].$$

En introduisant la variable x, on peut écrire,

$$y = (x - x_1)^\alpha \{\varphi_0[\log(x - x_1)]^{\lambda-1} + \ldots + \varphi_{\lambda-1}\};$$

M. Casorati intègre encore l'équation

$$A_0\theta^n y + A_1\theta^{n-1} y + \ldots + A_n y = 0,$$

où les coefficients sont des constantes.

On aperçoit de suite la liaison de ces recherches et des résultats exposés par

M. Fuchs dans son Mémoire sur les fondements de la théorie des équations différentielles linéaires, concernant le mode d'existence des solutions d'une telle équation dans le voisinage d'un point singulier.

II. *Critérium pour reconnaître si plusieurs fonctions sont liées entre elles par une relation linéaire à coefficients d'une nature particulière.* — Les fonctions

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n,$$

de la variable x auront entre elles, dans la couronne de centre x, une relation linéaire, homogène, à coefficients monotropes, si l'on a identiquement

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \theta y_1 & \theta y_2 & \ldots & \theta y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{n-1} y_1 & \theta^{n-1} y_2 & \ldots & \theta^{n-1} y_n \end{vmatrix} = 0.$$

La réciproque est vraie.

M. Casorati l'établit en s'appuyant sur une transformation du déterminant précédent donnée par M. Hermite (*Journal de Liouville,* t. XIV, p. 25 et 26).

Au lieu de ce déterminant, on peut évidemment prendre celui où l'opération Δ remplace l'opération θ. Enfin on déduit de là, sans difficulté, une proposition analogue pour reconnaître si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont liées entre elles par une relation linéaire et homogène dont les coefficients reprennent leur valeur à la fin de ν tours de la variable.

III. *Application aux fonctions définies par une équation algébrique à coefficients monotropes.* — Si l'on désigne par z une quelconque des racines z_1, $z_2, \ldots, z_n$ en un point x de la couronne, on devra avoir

$$(\theta^\nu - 1) z = 0;$$

ν étant le nombre des éléments du système circulaire auquel appartient la racine z, il en résulte que l'on a nécessairement

$$z = (x - x_1)^{\frac{1}{\nu}} \varphi_1 + (x - x_2)^{\frac{2}{\nu}} \varphi_2 + \ldots + (x - x_\nu)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \varphi_{\nu-1} + \varphi_\nu.$$

IV. *Application aux fonctions définies par une équation différentielle linéaire à coefficients monotropes.* — On trouve ici une équation aux différences qui correspond à l'équation *fondamentale* de M. Fuchs.

Soit

$$D^m y + p_1 D^{m-1} y + \ldots + p_{m-1} D y + p_m y = 0,$$

l'équation proposée.

A cette équation se joint, pour toute valeur particulière de la variable indépendante, une équation aux différences linéaires d'ordre m, à coefficients constants, qui caractérise le mode d'existence des intégrales de l'équation différentielle proposée aux environs de ce point. Cela résulte de ce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} y & D y & \ldots & D^m y \\ \theta y & D\theta y & \ldots & D^m \theta y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^m y & D\theta^m y & \ldots & D^m \theta^m y \end{vmatrix}$$

est nul quand on y remplace y par l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée; on en conclut l'existence d'une relation à coefficients constants

$$A_1 \theta^m y + A_1 \theta^{m-1} y + \ldots + A_m y = 0,$$

On voit aussi que, à une telle équation, correspond inversement une équation différentielle linéaire à coefficients monotropes dans la couronne.

L'équation algébrique

$$A_1 \theta^m + A_1 \theta^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

est l'équation fondamentale de M. Fuchs; l'intégration de l'équation en θy conduit naturellement l'auteur aux résultats développés par M. Fuchs dans le Mémoire cité; les *sous-groupes* de M. Hamburger, le théorème de M. Jürgens sont aussi des conséquences faciles de la même étude.

V. *Application aux fonctions définies par une équation différentielle linéaire à coefficients polytropes.* — Supposons que les coefficients soient des fonctions rationnelles de x et de z, z étant défini par une équation de la forme

$$z^n + \psi_1 z^{n-1} + \ldots + \psi_{n-1} z + \psi_1 = 0;$$

soit ν le nombre des éléments du système circulaire autour de x_1, auquel appartient la racine z de cette équation que l'on considère, on sera conduit, en suivant la même voie que précédemment, à une équation fondamentale aux différences

$$A_0 \theta^{m\nu} y + A_1 y \theta^{(m-1)\nu} + \ldots + A_{m-1} \theta^{2\nu} y + A_m y = 0,$$

à coefficients constants : M. Casorati en conclut la forme de l'intégrale générale, à savoir

$$y = (x - x_1)^{\frac{r_1}{\nu}} f_1 + (x - x_1)^{\frac{r_2}{\nu}} f_2 + \ldots + (x - x_1)^{\frac{r_m}{\nu}} f_m,$$

forme valable quand toutes les racines de l'équation fondamentale algébrique sont distinctes et où les f sont des fonctions qui reprennent la même valeur après r tours de la variable.

VI. *Interprétation du calcul des différences; son utilité particulière dans les recherches sur les fonctions périodiques d'une seule variable indépendante.*—Les détails dans lesquels nous sommes entrés permettent de bien apercevoir le point de vue auquel s'est placé M. Casorati : dans ce Chapitre, il montre avec quelle facilité sa méthode permet de traiter les questions résolues par M. Picard et M. Mittag-Leffler dans les *Comptes rendus* du 21 juillet 1879, du 19 février 1880, du 16 février 1880; le *Bulletin* a rendu compte de ces recherches; notons encore cette proposition :

Entre plusieurs fonctions doublement périodiques de seconde espèce, pour lesquelles les multiplicateurs relatifs à la première période sont distincts entre eux, comme aussi les multiplicateurs relatifs à la seconde période, il ne peut exister aucune relation linéaire homogène à coefficients doublement périodiques.

VII. *Application aux équations linéaires à coefficients périodiques.* — La condition nécessaire et suffisante pour la double périodicité des coefficients de l'équation différentielle est que l'intégrale complète puisse s'exprimer linéairement au moyen de m fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

VIII. *Nouvelle interprétation utile dans les recherches sur la périodicité simultanée relativement à plusieurs variables indépendantes.*

Beltrami (*E.*). — Sur quelques nouveaux théorèmes de M. C. Neumann sur les fonctions potentielles. (46-63).

L'auteur dit, avec quelque modestie, que son Mémoire est consacré à la démonstration de quelques-uns des théorèmes énoncés par M. Neumann (*Mathematische Annalen,* t. XVI, p. 409-431, 432-438) et relatifs à la théorie du potentiel (M. Beltrami ne s'est occupé que de ceux de ces théorèmes qui concernent le potentiel newtonien). Toutefois, l'élégance des démonstrations de M. Beltrami n'est pas le seul mérite de son travail; les beaux théorèmes de M. Neumann, en effet, concernent des surfaces fermées, tandis que M. Beltrami établit des propositions analogues concernant des portions de surface limitées par un contour.

Ces portions de surfaces sont rapportées à des coordonnées quelconques u, v; on suppose toutefois que le réseau des courbes u, v qui décompose la portion de surface en éléments superficiels est analogue au réseau de parallèles aux axes de coordonnées dans le plan qui représente la surface. Il est utile d'établir d'abord quelques propositions générales, en se plaçant au point de vue de l'auteur dans son Mémoire *Sulle variabili complesse in una superficie qualunque* (*Annali....*, série II; t. I, § 1).

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque (u, v) de la surface; on indiquera dans ce qui suit les dérivées prises par rapport à u par un accent, celles prises par rapport à v par un indice.

En posant

$$\begin{aligned} E &= \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2, \\ F &= \xi'\xi_1 + \eta'\eta_1 + \zeta'\zeta_1, \\ G &= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \\ H &= \sqrt{EG - F^2} > 0, \end{aligned}$$

l'élément linéaire sur la surface sera

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

et le cosinus directeur $\alpha = \dfrac{\partial\xi}{\partial n}$, $\beta = \dfrac{\partial\eta}{\partial n}$, $\gamma = \dfrac{\partial\zeta}{\partial n}$ de la normale seront données par les formules

$$\begin{aligned} H\alpha &= \eta'\zeta_1 - \eta_1\zeta', \\ H\beta &= \zeta'\xi_1 - \zeta_1\xi', \\ H\gamma &= \xi'\eta_1 - \xi_1\eta'; \end{aligned}$$

Si l'on suppose que la surface a partout une courbure finie, on peut regarder, dans le voisinage de la surface, regarder les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de l'espace comme des fonctions uniformes de u, v, n; u, v étant les coordonnées du pied de la normale n, et l'on aura

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi'\,du + \xi_1\,dv + \alpha\,dn, \\ d\eta &= \eta'\,du + \eta_1\,dv + \beta\,dn, \\ d\zeta &= \zeta'\,du + \zeta_1\,dv + \gamma\,dn; \end{aligned}$$

ces formules résolues par rapport à du, dv, dn, donnent, après une transformation facile,

$$du = \frac{1}{H}(M_\xi \, d\xi + M_\eta \, d\eta + M_\zeta \, d\zeta),$$

$$dv = \frac{1}{H}(N_\xi \, d\xi + N_\eta \, d\eta + N_\zeta \, d\zeta),$$

$$dn = \alpha \, d\xi + \beta \, d\eta + \gamma \, d\zeta,$$

en convenant de représenter par les symboles M_φ. N_φ, où φ est une fonction quelconque de u, v, les expressions

$$M_\varphi = \frac{G\varphi' - F\varphi_1}{H}, \quad N_\varphi = \frac{E\varphi_1 - F\varphi'}{H}.$$

On déduit de là

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{1}{H}(M_\varphi \xi' + N_\varphi \xi_1) + \alpha \frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{1}{H}(M_\varphi \eta' + N_\varphi \eta_1) + \beta \frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{1}{H}(M_\varphi \zeta' + N_\varphi \zeta_1) + \gamma \frac{\partial\varphi}{\partial n};$$

puis, en représentant par $\Delta_1(\varphi, \psi)$ l'*invariant bilinéaire* des deux fonctions φ et ψ de u et de v,

$$\Delta_1(\varphi_1 \psi) = \frac{1}{H^2}[G\varphi'\psi' - F(\varphi'\psi_1 + \varphi_1\psi') + E\varphi_1\psi_1],$$

on trouve

$$(1) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = \Delta_1(\varphi, \psi) + \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

Considérons ensuite l'intégrale

$$\int \mu \, \Delta_1(\varphi, \psi) \, d\sigma,$$

étendue à tous les éléments de la surface et où μ, φ, ψ sont des fonctions uniformes de u, v admettant, les deux premières, des dérivées premières, et la troisième des dérivées secondes ; on la transforme en se servant des théorèmes donnés par M. Beltrami dans le Mémoire cité et exprimés par les formules

$$\iint \chi' \, du \, dv = -\int \left(E\frac{\partial u}{\partial\nu} + F\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\frac{\chi \, ds}{H},$$

$$\iint \chi_1 \, du \, dv = -\int \left(G\frac{\partial u}{\partial\nu} + G\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\frac{\chi \, ds}{H},$$

où les intégrales du second membre sont étendues à tous les éléments ds du contour et où ν désigne la direction de l'élément linéaire de σ conduit normalement vers l'intérieur de la surface à l'élément ds du contour.

On arrive ainsi à la formule

$$(2) \qquad \int \mu \, \Delta_1(\varphi, \psi) \, d\sigma = -\int [\mu \, \Delta_2 \varphi + \Delta \, (\varphi, \mu)] \psi \, d\sigma - \int \mu \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \psi \, ds,$$

où

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{H}[(M_\varphi)' + (N_\varphi)_1]$$

est le paramètre différentiel du second ordre de la fonction φ.

Ces résultats s'appliquent à la théorie du potentiel d'une masse répandue sur une surface. Soit en général

$$V = \int h\psi\, d\sigma$$

un tel potentiel, où h est la densité et ψ une fonction de la distance r de l'élément *potentiant* $d\sigma$ au point *potentié* x, y, z; ψ se réduira à $\frac{1}{r}$ pour le potentiel newtonien.

En remarquant que $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ et appliquant les formules (1) et (2), on trouvera aisément

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int [h\Delta_2\xi + \Delta_1(h, \xi)]\psi\, d\sigma - \int h\alpha\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma + \int h\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\psi\, ds;$$

en remplaçant ψ par $\frac{1}{r}$ et supprimant l'intégrale finale relative au contour de la surface, on obtient l'une des formules de M. Neumann. On peut remarquer que la masse totale qui figure dans le potentiel du second membre, savoir

$$\int [h\Delta_2\xi + \Delta_1(h, \xi)]\, d\sigma + \int h\frac{d\xi}{d\nu}ds,$$

est nulle d'après la formule (2).

Le calcul de la dérivée d'un potentiel de la forme

$$W = \int g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma \quad \text{ou} \quad \int g\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma$$

est un peu plus compliqué : on met d'abord cette dérivée sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int \frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma - \int\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\alpha + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\beta + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\gamma\right]d\sigma;$$

puis, en utilisant l'identité

$$\begin{aligned}&\int_s (X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta)\\ &= \int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial\eta} - \frac{\partial Y}{\partial\zeta}\right)\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial\zeta} - \frac{\partial Z}{\partial\xi}\right)\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial\xi} - \frac{\partial X}{\partial\eta}\right)\gamma\right]d\sigma,\end{aligned}$$

dans laquelle l'intégrale du premier membre est étendue aux éléments du contour de la surface parcourue dans le sens positif, on parvient à l'expression

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} &= \int\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma - \int g\nabla\psi\, d\sigma\\ &- \int\left(\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial g}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial g}{\partial\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\alpha\, d\sigma + \int_s g\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\zeta - \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}d\eta\right),\end{aligned}$$

où

$$\nabla\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}.$$

En se servant de l'identité (1) et en posant

$$\int_s g\psi\, d\xi = \mathrm{X}, \quad \int_s g\psi\, d\eta = \mathrm{Y}, \quad \int_s g\psi\, d\zeta = \mathrm{Z},$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} = &\int [\alpha\Delta_2 g + \Delta_1(g,\alpha)]\psi\, d\sigma + \int \Delta_1(g,\xi)\frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma \\ &- \int g\,\nabla\psi\, d\sigma + \int \alpha\frac{\partial g}{\partial \nu}\psi\, ds + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}.\end{aligned}$$

Pour le potentiel newtonien, le terme où figure $\nabla\psi$ disparaît; si le contour est nul, les trois derniers termes disparaissent en outre et l'on retombe encore sur une des formules de M. Neumann.

Si maintenant on admet la continuité (quand on traverse la surface) de la fonction

$$\mathrm{V} = \int \frac{h\, d\sigma}{r},$$

et la discontinuité de la fonction

$$\mathrm{W} = \int g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma,$$

discontinuité définie par la formule

$$\mathrm{W}_n - \mathrm{W}_n = 4\pi g,$$

les formules précédentes permettent d'obtenir les formules relatives au passage de la surface pour les dérivées première et seconde : pour les dérivées premières on a

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n'} = -4\pi h,$$

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial n} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial n'} = 0.$$

Pour les dérivées secondes, on a

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial n'^2} = 4\pi h\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial n'^2} = -4\pi\Delta_2 g.$$

La première a été donnée par M. Neumann, elle avait été déjà démontrée avec quelques restrictions par M. Paci (*Journal de Battaglini,* t. XV); la seconde est nouvelle.

Enfin M. Beltrami rattache ces dernières formules à une proposition plus générale; en considérant un système triple de surfaces u, v, w, dont les deux premières sont orthogonales à la troisième, la surface considérée appartiendra à la troisième famille pour la valeur 0 du paramètre w; le carré de l'élément linéaire de l'espace sera évidemment de la forme

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 + K^2\,dw^2;$$

on suppose que w croît dans la direction de la normale positive à la surface σ.

En continuant de désigner par Δ_1 et Δ_2 les paramètres différentiels du premier et du second ordre relatifs à l'hypothèse $dw = 0$ et en désignant par ∇_1, ∇_2 les quantités analogues relatives à l'espace à trois dimensions, l'auteur établit la formule

$$\nabla_2\varphi = \Delta_2\varphi + \frac{\Delta_1(\varphi, K)}{K} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

où R_1, R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface $w = \text{const.}$ au point u, v, w et où s est l'arc de la courbe d'intersection des surfaces $u = \text{const.}$ $v = \text{const.}$, compté positivement dans le sens où w croît.

En supposant ensuite que la variable w soit le segment n de la normale à σ au point u, v, en sorte que la surface $w = \text{const.}$ soit une surface parallèle à σ, on trouve

$$\nabla_2\varphi = \Delta_2\varphi + \frac{\partial^3\varphi}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

puis l'équation limite, dont le sens est assez clair,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial n'^2} = -\Delta_2(\varphi_n - \varphi_{n'}) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right) + (\nabla_2\varphi)_n - (\nabla_2\varphi)_{n'}.$$

C'est de cette équation que l'auteur déduit les deux formules dont il a été question plus haut.

Kantor (*G.*). — Combien y a-t-il de groupes cycliques dans une transformation quadratique du plan. (64-70; all.).

Si N est un nombre entier qui, décomposé en facteurs premiers, a la forme

$$N = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_\nu^{m_\nu},$$

le nombre des groupes de points d'un plan tels que chacun d'eux, en appliquant N fois une transformation quadratique quelconque du plan, revienne sur lui-même, est égal à

$$Z_N = \frac{2^N - \sum 2^{\frac{N}{a_r}} + \sum 2^{\frac{N}{a_r a_s}} - \ldots + (-1)^\nu 2^{\frac{N}{a_1 a_2 \ldots a_\nu}}}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{\mu=\nu}\sum_{r=1}^{r=\nu}(-1)^\mu 2^{\frac{N}{a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_\mu}}}$$

où on doit prendre pour $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ chaque combinaison de μ nombres différents de la suite $1, 2, \ldots, \nu$.

Ainsi, pour toute transformation quadratique, il existe un couple de points involutifs, deux groupes périodiques de trois points, trois groupes de quatre points, 6, 9, 18, .. groupes périodiques de 5, 6, 7 points.

Le fait que Z^N est nécessairement entier conduit à un intéressant théorème d'Arithmétique, qui, pour N premier, se réduit au théorème de Fermat.

Kantor (*G.*). — Réponse à la même question pour les transformations de Cremona. (71-73; all.).

Dans une transformation rationnelle du $a^{\text{ième}}$ ordre d'un plan, il y a toujours

$$H_N = \frac{a^N - \left(a^{\frac{N}{f_1}} + \ldots + a^{\frac{N}{f_\nu}}\right) + \left(a^{\frac{N}{f_1 f_2}} + \ldots + a^{\frac{N}{f_{\nu-1} f_\nu}}\right) - \ldots + (-1)^\nu a^{\frac{N}{f_1 f_2, \ldots, f_\nu}}}{N}$$

groupes de N points pour lesquels la transformation est périodique, en ce sens que chaque point du groupe, après N transformations, est ramené à la position primitive : $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ sont les facteurs premiers distincts du nombre N.

Le fait que H_N est un nombre entier conduit à une nouvelle généralisation du théorème de Fermat.

Brioschi. — Sur la génération d'une classe d'équations différentielles linéaires qui s'intègrent au moyen des fonctions elliptiques. (74-78).

Développement d'un point particulier d'un Mémoire présenté par l'auteur à l'Académie des Lincei (juin 1880).

Christoffel. — Preuve algébrique du théorème concernant le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes. (81-100; all.).

Ce travail se rapporte aux fondements de la théorie des fonctions abéliennes; il concerne spécialement, d'une part, la détermination d'un nombre des *intégrandes* w' de première espèce, linéairement indépendantes, qui appartiennent à une équation donnée

$$F(s^n \mid z^m) = 0,$$

et d'autre part l'établissement d'un critérium pour reconnaître l'irréductibilité de F ou le nombre des facteurs irréductibles qui entrent dans F.

Hermite. — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (101-103; fr.).

L'auteur montre comment, connaissant le produit $F(x)$ de deux solutions U, V de l'équation

$$y'' + py' + qy = 0,$$

on peut former l'équation du second ordre ayant pour intégrale l'expression

$$Z = CU^\omega + C'V^\omega,$$

quelle que soit l'expression ω; cette équation est

$$Gz'' - Hz' + Kz = 0,$$

en posant

$$G = F(x),$$
$$H = (\omega - 1)F'(x) - pF(x),$$
$$K = \frac{1}{2}(\omega^3 - \omega)F'''(x) + \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega)pF'(x) + \omega^2 F(x).$$

Le résultat appliqué à l'équation de Lamé donne un type d'équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques uniformes, l'intégrale cessant d'être uniforme quand ω n'est pas entier.

Pour $\omega = 0$, on trouverait l'équation

$$F(x)z'' + [F'(x) + pF(x)]z' = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z = A + B \log \frac{U}{V}.$$

Brioschi. — Sur les équations différentielles du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre. (104-128).

M. Brioschi part du fait suivant :

Les trois expressions

(1) $$t = 1 + az^2,$$

(2) $$t = \frac{az^6 + b}{z^2},$$

(3) $$t = \frac{az^{12} + bz^6 + c}{z^2}$$

vérifient l'équation

$$t^3 - 1 = \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 R(z),$$

où l'on suppose, suivant les cas,

(1) $$R = \frac{1}{4a}(a^2z^4 + 3az^2 + 3),$$

(2) $$R = \frac{1}{16}(az^6 + 4b),$$

(3) $$R = \frac{1}{4.5^2}\left(az^{12} + \frac{11}{5}bz^6 + 5^2c\right),$$

pourvu que l'on ait, suivant les cas,

(2) $$ab^2 = \frac{4}{27},$$

(3) $$b^2 = 20ac, \quad bc^2 = 2\frac{5^3}{12^3}.$$

On trouve d'ailleurs aisément que l'équation différentielle entraîne la suivante :

$$2(t^3 - 1)\frac{d^3z}{dt^3} + 9t^2\frac{d^2z}{dt^2} + (6 - \rho)t\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2}\rho z = 0,$$

où

$$\rho = \frac{2(n-1)}{(n-2)},$$

n étant, suivant les cas, le degré 4, 6, 12 de R en z.

Or, en faisant $P = \frac{3}{2}\frac{t^2}{t^3-1}$, $Q = -\frac{1}{8}\rho\frac{t}{t^3-1}$.

Cette dernière équation du troisième ordre n'est autre que celle qui est vérifiée par une forme quadratique à coefficients constants de deux solutions v_1 et v_2 de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + P\frac{dv}{dt} + Q v = 0.$$

Or, en supposant $z = v_1 v_2$ et en faisant

$$Z(t) = \int \frac{dt}{z\sqrt{t^3-1}} = \int \frac{dz}{z\sqrt{R(z)}},$$

les intégrales v_1, v_2 ont les valeurs (algébriques en z)

$$v_1 = \sqrt{z}\,e^{\frac{1}{2}CZ(t)}, \quad v_2 = \sqrt{z}\,e^{-\frac{1}{2}CZ(t)},$$

et l'on trouve, suivant les cas (1), (2), (3),

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad C = \frac{3}{4}\sqrt{b}, \quad C = \frac{3}{5}\sqrt{c}.$$

Quant à la détermination de z au moyen de Z, M. Brioschi parvient aux résultats suivants :

(1) $$Z = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\log\omega,$$

où

$$\omega = \frac{1}{az^3}\left[4\sqrt{aR} - (az^2+2)\sqrt{3}\right].$$

Puis

$$v_1 = \sqrt{\varphi(z)}, \quad v_2 = \sqrt{\psi(z)},$$

où

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{ia}}\left[\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2(1+az^2)} + i\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon(1+az^2)}\right],$$

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{-ia}}\left[\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2(1+az^2)} - i\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon(1+az^2)}\right].$$

$i = \sqrt{-1}$, ε est une racine cubique imaginaire de l'unité.

De là résultent les égalités

$$f(v_1, v_2) = v_1^4 + 2\sqrt{3}\,v_1^2 v_2^2 - v_2^4 = -\frac{4\sqrt{3}}{a},$$

$$h(v_1, v_2)\sqrt{3} = v_1^4 - 2\sqrt{3}\,v_1^2 v_2^2 - v_2^4 = -\frac{4\sqrt{3}}{a}\,t.$$

(2) $$Z = \frac{2}{3\sqrt{b}}\log\omega,$$

où

$$\omega = \frac{2}{z^3\sqrt{a}}(2\sqrt{R} - \sqrt{b});$$

puis

$$v_1 = \left[\frac{\varphi(z)}{z}\right]^{\frac{1}{4}}, \quad v_2 = \left[\frac{\psi(z)}{z}\right]^{\frac{1}{4}},$$

où

$$\varphi(z) = \frac{2}{\sqrt{a}}(2\sqrt{R} - \sqrt{b}), \quad \psi(z) = \frac{2}{\sqrt{a}}(2\sqrt{R} + \sqrt{b}),$$

d'où résultent les égalités

$$f(v_1, v_2) = v_1 v_2 (v_1^4 - v_2^4) = -4\sqrt{\frac{b}{a}} = -\frac{8}{\sqrt[4]{108 a^3}},$$

$$6^2 h(v_1, v_2) = -(v_1^8 + 14 v_1^4 v_2^4 + v_2^8) = -\frac{16}{a} t.$$

(3) $$Z = \frac{1}{3\sqrt{c}} \log \omega,$$

où

$$\omega = \frac{5}{2 b z^6}\left(4.5^2\sqrt{cR} - \frac{11}{5} b z^6 - 2.5^2 c\right);$$

puis

$$v_1 = \sqrt{z}.\omega^{\frac{1}{10}}, \quad v_2 = \sqrt{z}.\omega^{-\frac{1}{10}};$$

d'où résultent les égalités

$$f(v_1, v_2) = v_1 v_2 (v_1^{10} + 11 v_1^5 v_2^5 - v_2^{10}) = -2.5^3 \frac{c}{b},$$

$$\overline{12}^2 h(v_1, v_2) = -[v_1^{20} + v_2^{20} - 228 v_1^5 v_2^5 (v_1^{10} - v_2^{10}) + 494 v_1^{10} v_2^{10}] = -\frac{5^5}{a} t.$$

Dans chacun des cas (1), (2), (3), $h(v_1, v_2)$ est la hessienne de la forme binaire correspondante $f(v_1, v_2)$, qui, dans chaque cas, est égale à une constante.

Voici maintenant l'objet de la seconde Partie du Mémoire de M. Brioschi.

Si dans l'équation différentielle linéaire en v et t dont il a été question plus haut, on fait $t^3 = I$, on tombe sur l'équation hypergéométrique

(4) $$\frac{d^2 v}{dI^2} + \frac{1}{6}\frac{4 - 7I}{I(1-I)}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{72}\rho\frac{1}{I(1-I)} y = 0.$$

Ceci posé, si dans l'équation hypergéométrique générale, écrite sous la forme

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1 - \lambda - (2 - \lambda - \nu)}{\xi(1-\xi)}\frac{dy}{d\xi} - \frac{1}{4}\frac{(1 - \lambda - \nu)^2 - \mu^2}{\xi(1-\xi)} y = 0,$$

on fait la substitution

$$\xi = \frac{c-b}{c-a}\,\frac{x-a}{x-b},$$

elle deviendra

(5) $$y'' + p y' + q y = 0,$$

les coefficients p, q ayant des valeurs qu'il est aisé de calculer.

M. Brioschi détermine les valeurs des quantités λ, μ, ν, a, b, c pour lesquelles les équations différentielles (4) et (5) se transforment l'une dans l'autre, c'est-à-dire pour lesquelles d'une intégrale particulière y de la seconde on peut déduire l'intégrale particulière correspondante v de la première au moyen de la relation

$$y = wv,$$

w étant une fonction de x, avec la condition que I soit une fonction rationnelle de x.

Il établit d'abord la relation

$$(6)\qquad \frac{I'}{I^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-I}} = \frac{D}{C}\,\frac{e^{-\int p\,dx}}{w^4} = \frac{D}{C}\,\frac{1}{\eta^4},$$

en posant

$$w = \eta e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx},$$

où D et C sont des constantes convenables, et déduit de là la forme de la fonction rationnelle I de x

$$(7)\qquad I = \delta\,\frac{\Psi^3(x)}{N(x)}.$$

δ est une constante, $\Psi(x)$ est un polynôme du quatrième degré qui dépend de a, b, c, λ, μ, ν et de trois nombres entiers positifs α, β, γ non supérieurs à c; $N(x)$ a la forme

$$\frac{[(x-a)(x-b)(x-c)]^6}{\Psi(x)},$$

où

$$\Psi(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma = \eta^{12}.$$

Entre les polynômes $\Psi(x)$ et $N(x)$ doit exister une certaine relation qui, regardée comme une identité, fournit précisément les conditions cherchées; enfin, la fonction w a la forme

$$(x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\beta_1}(x-c)^{\gamma_1},$$

les nombres α_1, β_1, γ_1 dépendant d'une façon simple des nombres α, β, γ, λ, μ, ν. Une discussion approfondie des conditions conduit à la solution complète du problème posé.

Voici maintenant quelques conséquences :

En désignant par $f(y_1, y_2)$ ce que devient la forme $f(v_1, v_2)$ précédemment considérée, on voit que

$$f(y_1, y_2) = w^n f(v_1, v_2),\quad (n = 4, 6, 12).$$

Mais $f(v_1, v_2)$ est dans tous les cas une constante G; on a donc

$$f(y_1, y_2) = w^n G.$$

L'équation (6) donne

$$\frac{dI}{I^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-I}} = \frac{D}{C}\,\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma}},$$

et pour chacune des valeurs trouvées par l'auteur pour les nombres α, β, γ on a les relations correspondantes entre I et x qui réduisent aux fonctions elliptiques les transcendantes du second membre.

Enfin de la valeur de w et des relations trouvées entre y et v, on déduit les intégrales des diverses équations différentielles linéaires du second ordre de forme (5), en supposant connues les intégrales particulières v_1, v_2 dont on a donné précédemment les expressions.

Ces équations différentielles sont celles que M. Brioschi désigne sous le nom d'*équations du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre* à cause des relations trouvées par M. Schwarz, dans son Mémoire sur la série hypergéométrique, entre ces équations et ces corps réguliers.

Schwarz (H.-A.). — Généralisation d'un théorème fondamental de l'Analyse. (129-136; all.).

En admettant que le plan qui passe par trois points d'une courbe, voisins d'un point M, a pour limite le plan osculateur en M quand les trois points tendent indépendamment vers le point M, on est conduit à cette proposition, que le rapport

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1) & \psi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \psi(t_2) \\ 1 & \varphi(t_3) & \psi(t_3) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix}$$

est compris entre deux limites qui doivent se rapprocher indéfiniment lorsque les quantités t_1, t_2, t_3 tendent indépendamment vers la limite commune t_0; on suppose, bien entendu, l'existence des dérivées secondes des fonctions φ et ψ.

M. Schwarz établit en effet que ce rapport est compris entre les limites supérieure g et inférieure k du déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi''(t'') & \psi''(t'') \end{vmatrix},$$

où t' et t'' satisfont aux conditions

$$t_1 \leqq t' \leqq t_3, \quad t' \leqq t'' \leqq t_3.$$

Voici sa démonstration : partant de l'inégalité

$$k \leqq \begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi''(t'') & \psi''(t'') \end{vmatrix} \leqq g,$$

multipliant par dt'' et intégrant entre les limites t' et t'', on trouve

$$k \begin{vmatrix} 1 & t' \\ 1 & t'' \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi'(t'') & \psi'(t'') \end{vmatrix} \leqq g \begin{vmatrix} 1 & t' \\ 1 & t'' \end{vmatrix};$$

multipliant par dt' et intégrant entre les limites t_1 et t', il vient

$$k \begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ 1 & t'' \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi(t')-\varphi(t_1) & \psi(t')-\psi(t_1) \\ \varphi'(t'') & \psi'(t'') \end{vmatrix}$$
$$\leqq g \begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ 1 & t'' \end{vmatrix},$$

multipliant de nouveau par dt'' et intégrant entre les limites t_2 et t'', où $t_2 < t''$, on obtient

$$k\begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ t''-t_2 & \frac{1}{2}(t''^2-t_2^2) \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi(t')-\varphi(t_1) & \psi(t')-\psi(t_1) \\ \varphi(t'')-\varphi(t_2) & \psi(t'')-\psi(t_2) \end{vmatrix}$$
$$\leqq g\begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ t''-t_2 & \frac{1}{2}(t''^2-t_2^2) \end{vmatrix};$$

faisant enfin $t' = t_2$, $t'' = t_3$, on parvient aux deux inégalités à démontrer.

Plus généralement, soient $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$, n fonctions réelles de la variable réelle t qui, ainsi que leurs dérivées du premier, du deuxième, ..., du $n-1^{\text{ième}}$ ordre sont finies, continues, uniformes pour toutes les valeurs de t que l'on considère;

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$, n valeurs distinctes de la variable t comprises dans l'intervalle $a\ldots b$, le quotient

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \ldots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \ldots & f_n(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \ldots & f_n(t_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

n'est pas plus grand que

$$\frac{g}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}$$

ni plus petit que

$$\frac{k}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!},$$

où g est la limite supérieure, k la limite inférieure des valeurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(t') & f_2(t') & \ldots & f_n(t') \\ f_1'(t'') & f_2'(t'') & \ldots & f_n'(t'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix},$$

sous les conditions

$$a \leqq t' \leqq b, \quad t' \leqq t'' \leqq b, \quad t'' \leqq t''' \leqq b, \quad \ldots, \quad t^{(n-1)} \leqq t^{(n)} \leqq b.$$

Hermite. — Sur une représentation analytique des fonctions au moyen des transcendantes elliptiques. (135).

Cette Communication et la suivante se rapportent à un mode de représentation des fonctions donné par M. Hermite, dans son cours à la Sorbonne, vers 1874. M. Mittag-Leffler suivait alors les leçons de l'illustre géomètre; dans une conversation qu'il eut il y a environ deux ans avec M. Dini, qui commençait alors la publication de son beau livre *Serie di Fourier*, etc., il communiqua à ce dernier les résultats donnés par M. Hermite.

Celui-ci n'avait d'ailleurs établi que les formules relatives au susdit mode de développement et n'avait point traité des conditions sous le bénéfice desquelles il était réalisable. M. Dini, qui était en possession d'une méthode très générale pour traiter les questions de cette nature, réussit pleinement, comme on le sait depuis la publication de son livre, à établir, sous des conditions précises, la possibilité de ce développement; à l'occasion de ces recherches, une correspondance s'établit entre M. Hermite et M. Dini, et ce qui suit est l'analyse de l'extrait d'une Lettre de M. Hermite.

Les formules

$$\frac{2K}{\pi}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \sum\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x+miK') + \cot\frac{\pi}{2K}(x-miK')\right],$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(x)}{H(x)} = \cot\frac{\pi x}{2K} + \sum\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x+niK') + \cot\frac{\pi}{2K}(x-niK')\right],$$

où $m = 1, 3, 5, \ldots$; $n = 2, 4, 6, \ldots$, permettent d'établir directement que l'équation

$$\Theta'(x) = 0$$

a pour seules racines réelles des multiples de K, et pour racines imaginaires

$$x = nK + i\omega,$$

les quantités ω étant en nombre infini et comprises successivement entre deux multiples impairs consécutifs de K′. Si l'on fait abstraction des multiples pairs de K, on pourra écrire pour ces racines

$$a = 0, \quad a = K, \quad a = i\omega.$$

De la même façon, les racines b de l'équation

$$H'(x) = 0$$

seront

$$b = K, \quad b = i\varpi,$$

ϖ ayant une infinité de valeurs, renfermées chacune entre deux multiples pairs consécutifs de K′. Voici la démonstration de ces résultats :

En posant

$$x = \xi + i\omega$$

dans l'expression de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, afin de la mettre sous la forme $A + iB$, et tenant compte de la relation

$$\cot(a+ib) = \frac{\sin 2a - \sin 2ib}{2\,\mathrm{mod}^2 \sin(a+ib)},$$

on trouve

$$A = \sin\frac{\pi\xi}{K}\,S,$$

où

$$S = \frac{1}{2}\sum\left\{\frac{1}{\mathrm{mod}^2 \sin\frac{\pi}{2K}[\xi+(\omega+m)i]} + \frac{1}{\mathrm{mod}^2 \sin\frac{\pi}{2K}[\xi+(\omega-m)i]}\right\}.$$

On ne peut donc avoir $A = 0$ qu'en supposant ξ multiple de K; les seules racines réelles sont donc $a = 0$, $a = K$, et les racines imaginaires sont de la forme $a = i\omega$ ou $a = K + i\omega$. Or, en posant $x = K + i\omega$, on a

$$\frac{2K}{\pi}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = -\sin\frac{i\pi\omega}{K}\sum\frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2K}(\omega+mK')\cos\frac{i\pi}{2K}(\omega-mK')};$$

cette expression ne pouvant s'annuler pour aucune valeur de ω, il est prouvé que toutes les racines imaginaires sont de la forme $a = i\omega$.

Maintenant la relation

$$\Theta(i\omega, \mathrm{K}') = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}\, e^{\frac{\pi\omega^2}{4\mathrm{KK}'}} \mathrm{H}_1(\omega, k')$$

donne

$$\frac{\mathrm{H}'_1(\omega, k')}{\mathrm{H}_1(\omega, k')} + \frac{\pi\omega}{2\mathrm{KK}'} = 0.$$

De là résulte immédiatement l'existence d'une infinité de racines ω, comprises chacune entre deux racines réelles consécutives de l'équation

$$\mathrm{H}_1(\omega, k') = 0.$$

Enfin, entre ces limites, il n'y a qu'une racine. Si l'on pose, en effet,

$$\omega = 2p\mathrm{K}' + \nu,$$

on aura

$$\frac{\mathrm{H}'_1(\nu, k')}{\mathrm{H}_1(\nu, k')} + \frac{\pi\nu}{2\mathrm{KK}'} + \frac{p\pi}{\mathrm{K}} = 0.$$

Or la dérivée par rapport à ν du premier membre est essentiellement négative.

Cette dérivée est, en effet,

$$1 - \frac{\mathrm{J}'}{\mathrm{K}'} - \frac{k^2 \mathrm{sn}^2(\nu, k')}{\mathrm{cn}^2(\nu, k')},$$

et cette expression, en tenant compte de la relation

$$\frac{\mathrm{J}'}{\mathrm{K}'} - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} = \frac{\pi}{2\mathrm{K}'\mathrm{K}},$$

devient

$$-\frac{\mathrm{J}'}{\mathrm{K}'} - \frac{k^2 \mathrm{sn}^2(\nu, k')}{\mathrm{cn}^2(\nu, k')}.$$

La même méthode, appliquée à l'équation

$$\mathrm{H}'(x) = 0,$$

conduit aux résultats énoncés antérieurement; elle prouve aussi que, si l'on considère l'expression générale

$$\Pi(x) = \sum \left[\alpha_m \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x + mi\mathrm{K}') + \beta_m \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - mi\mathrm{K}') \right],$$

où les coefficients α_m et β_m sont supposés réels et positifs, l'équation

$$\Pi(x) = 0,$$

aura toutes ses racines de l'une ou l'autre de ces deux formes

$$x = i\omega, \quad x = \mathrm{K} + i\omega.$$

Ces principes posés, les termes des développements considérés par M. Hermite sont proportionnels aux quantités

$$\frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}, \quad \frac{\Theta(x+b)}{\Theta(x)},$$

où a, b sont les racines des équations

$$\Theta'(a) = 0, \quad H'(b) = 0;$$

pour le calcul commode des coefficients, il est amené à écrire ces développements sous la forme

$$F(x) = \sum A \frac{kk' H(x+a)}{\Theta(a)\Theta''(a)},$$
$$G(x) = \sum B \frac{kk' \Theta(x+b)}{H(b)H''(b)},$$

où, en supposant les développements possibles, les coefficients A, B sont donnés par les formules

$$A = +\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} F(x)\frac{H(x-a)}{\Theta(x)}\,dx,$$
$$B = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} G(x)\frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)}\,dx.$$

M. Hermite traite ensuite un cas où l'on peut obtenir ces intégrales, à savoir celui où les fonctions uniformes $F(x)$, $G(x)$ satisfont aux conditions

$$F(x+2K) = -F(x), \quad F(x+2iK') = \mu F(x),$$
$$G(x+2K) = +G(x), \quad G(x+2iK') = \mu G(x),$$

et n'admettent qu'un nombre fini de pôles dans le rectangle des périodes $2K$ et $2iK'$; μ est un facteur constant.

Les produits qui figurent sous les signes d'intégration sont alors des fonctions doublement périodiques de seconde espèce pour lesquelles le multiplicateur relatif à la période $2K$ est l'unité; pour de telles fonctions l'élément simple se réduit à l'expression $\dfrac{\Theta(x+\omega)}{\Theta(x)}$; d'après cela, on trouve pour l'une ou l'autre $\Phi(x)$ des quantités soumises à l'intégration, l'expression

$$\Phi(x) = \Sigma[Rf(x-\alpha) + R_1 f'(x-\alpha) + \ldots + R_i f^{(i)}(x-\alpha)],$$

où

$$f(x) = \frac{H'(0)\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\Theta(x)} e^{\frac{i\pi\omega}{2K}},$$

et où les coefficients R du premier terme sont les résidus de $\Phi(x)$ qui correspondent à tous les pôles de cette fonction, $x = \alpha + iK'$, situés à l'intérieur du rectangle des périodes.

On déduit de là

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} \Phi(x)\,dx = \frac{e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}}{\sin\frac{\pi\omega}{2K}}\Sigma R.$$

Enfin la constante ω se déduit du multiplicateur μ de la façon suivante : si l'on fait

$$\mu = e^{-\frac{i\pi}{K}\xi},$$

on aura dans le premier cas $\omega = \xi - a$, dans le second $\omega = \xi - b$.

Ces résultats s'appliquent au cas particulier suivant :

$$F(x) = \frac{H(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)},$$
$$G(x) = \frac{\Theta(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)}.$$

On trouve alors, en posant, pour abréger,

$$\chi(x,a) = \frac{kk' H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)\Theta''(a)},$$
$$\varphi(x,b) = \frac{kk'\Theta(x+b)}{\Theta(x)H(b)H''(b)},$$
$$\frac{H(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)} = \sum \frac{\Theta(a)\Theta(\xi+h)-\Theta(\xi)\Theta(a+h)}{H'(o)H(h)\sin\frac{\pi}{2K}(\xi-a)}\chi(x,a),$$

et

$$\frac{\Theta(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)} = \sum \frac{H(\xi)H(b+h)-H(b)H(\xi+h)}{H'(o)H(h)\sin\frac{\pi}{2K}(\xi-b)}\varphi(x,b).$$

On tire de là d'autres formules en différentiant par rapport à h; la seconde, différentiée par rapport à ξ, donne, quand on y fait $\xi = o$, le développement de l'élément simple $\frac{\Theta'(x+h)}{\Theta(x+h)}$ des fonctions doublement périodiques de première espèce.

Enfin M. Hermite termine par l'indication suivante :

« C'est un résultat dû à M. Gyldén, que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{k^2 \operatorname{sn}x \operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 \operatorname{dn}^2 x . y = o$$

a pour solution

$$y = C\sin\mu \operatorname{am}x + C'\cos\mu\operatorname{am}x.$$

» La fonction, réelle et uniforme pour toute valeur réelle de la variable $u = \operatorname{am}x$, croît constamment avec x de $-\infty$ à $+\infty$, en prenant les valeurs $u = o, \pi, 2\pi$, pour $x = o, 2K, 4K$; d'après cela, les formules

$$\int_0^{2K} \cos p \operatorname{am}x \cos q \operatorname{am}x \,\Delta\operatorname{am}x\, dx = o,$$
$$\int_0^{2K} \cos^2 p \operatorname{am}x\, \Delta\operatorname{am}x\, dx = \frac{\pi}{2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

où p, q sont des entiers inégaux, paraissent conduire au mode de développement suivant, généralisation de la série de Fourier :

$$F(x) = \Sigma(A_p \cos p \operatorname{am}x + B_p \sin p \operatorname{am}x). »$$

Dini (*U.*). — Sur les développements des fonctions d'une variable réelle en séries de fonctions de Jacobi. (145-153).

Voici maintenant, concernant ces développements de M. Hermite, la proposition à laquelle M. Dini est parvenu :

Les formules

$$-\frac{kk'}{\pi}\sum\frac{\Theta(z+a)}{\Theta(\alpha)\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}''(a)}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\,\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x)}\,dx,$$

$$\frac{kk'}{\pi}\sum\frac{\mathrm{H}(z+b)}{\Theta(\alpha)\Theta(b)\Theta''(b)}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\,\frac{\mathrm{H}(x-b)}{\Theta(x)}\,dx,$$

où les a sont la racine K et les racines purement imaginaires de l'équation $\mathrm{H}'(x)=0$, et où les b sont les racines 0 et K et les racines purement imaginaires de l'équation

$$\Theta'(x)=0,$$

sont applicables à une fonction quelconque $f(x)$, pourvu que, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2K, l'une au moins des conditions suivantes soit remplie :

1° Faire seulement un nombre fini d'oscillations;

2° Admettre une dérivée qui, dans cet intervalle, reste susceptible d'intégration, lors même qu'on la réduit à sa valeur absolue.

3° En décomposant cet intervalle en intervalles suffisamment petits, la somme des oscillations dans ces intervalles est inférieure à un nombre aussi petit qu'on le veut. Aux points non extrêmes de l'intervalle $(0, 2\mathrm{K})$, pour lesquels $f(x)$ est continue ou a seulement une discontinuité ordinaire, ces développements ont pour somme $f(x)$ ou la valeur moyenne

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

aux points extrêmes, le premier développement a pour somme

$$\frac{f(+0)+f(2\mathrm{K}-0)}{2}$$

et le second a pour somme, au point 0, la valeur

$$\frac{f(+0)-f(2\mathrm{K}-0)}{2}$$

et, au point 2K, la valeur

$$\frac{f(2\mathrm{K}-0)-f(+0)}{2}.$$

Pour la démonstration, nous devons renvoyer le lecteur au livre déjà cité de M. Dini.

Casorati (*F.*). — Sur un récent écrit de M. Stickelberger. (154-157).

Brioschi (*F.*). — Michel Chasles. (158-160).

Brioschi. — Les relations de Göpel pour les fonctions hyperelliptiques d'ordre quelconque. (161-172).

Dans son célèbre Mémoire *Theoriæ transcendentium Abelianarum primi* *ordinis adumbratio levis* (*Journal de Crelle*, t. 35, p. 277), Göpel a démontré qu'il existait entre quatre fonctions Θ à deux variables, convenablement choisies, une relation homogène du quatrième degré formée avec les quatrièmes puissances de ces fonctions, les produits deux à deux de leurs carrés et le produit des fonctions elles-mêmes; les recherches de MM. Cayley et Borchardt ont montré l'importance de cette relation dans la théorie de la surface de Kummer.

M. Brioschi établit des relations analogues entre $2n$ fonctions Θ à n arguments, convenablement choisies.

En posant

$$\begin{aligned}
R(x) &= A(x-a_1)\,(x-a_2)\,\ldots(x-a_{2n+1}),\\
\varphi(x) &= \quad (x-x_1)\,(x-x_2)\,\ldots(x-x_n),\\
P(x) &= \quad (x-a_1)\,(x-a_2)\,\ldots(x-a_n),\\
Q(x) &= A(x-a_{n+1})(x-a_{n+2})\ldots(x-a_{2n+1}),
\end{aligned}$$

en indiquant par l_m une quantité égale à $P(a_m)$ si m est supérieur à n et à $-Q(a_m)$ si m est égal ou inférieur à n, on sait, d'après les travaux de M. Weierstrass [*Zur Theorie der Abel'schen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 47, p. 52)], que les $2n+1$ fonctions à indice unique

$$p_m = \sqrt{\frac{\varphi(a_m)}{l_m}},$$

et les $n(2n+1)$ fonctions à deux indices

$$p_{r,s} = p_{s,r} = p_r p_s \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{\sqrt{R(x_\iota)}}{(x_\iota - a_r)(x_\iota - a_s)\varphi'(x_\iota)}$$

sont égales aux rapports de deux fonctions Θ à n variables; dans tous ces rapports le dénominateur est le même.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$, n quelconques des nombres $1, 2, 3, \ldots, 2n+1$, tous différents les uns des autres; on aura entre les fonctions p les relations

$$A p_\mu^2 = \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} - \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{S'(a_r)},$$

$$\frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_{\nu,\mu}^2 = \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu(a_\mu - a_\nu)S(a_\mu)} + \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu - a_r)S'(a_r)},$$

$$A p_\mu p_\nu = - \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)},$$

dont les deux premières sont dues à M. Weierstrass (*loc. cit.*), et la dernière à M. Brioschi (*Annali*, t. I, p. 29).

C'est de ces relations que ce dernier déduit les formules analogues à celles de Göpel, mais d'un caractère plus général; le type de ces formules est le suivant :

$$-\frac{(a_\mu - a_\nu)^2 l_\mu l_\nu}{S(a_\mu)S(a_\nu)} H^2 + (a_\mu - a_\nu) MGH + M^2 F = 0,$$

où

$$M = \frac{R'(a_\nu)}{S^2(a_\nu)} + \frac{R'(a_\mu)}{S^2(a_\mu)},$$

$$H = \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\nu}^2}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)},$$

$$G = \frac{l_\mu}{S(a_\mu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 - \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\nu}^2,$$

$$F = \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)}$$

$$- \left[\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)} \right]^2.$$

Ces relations sont évidemment homogènes et du quatrième degré; elles contiennent les quatrièmes puissances des $2n$ fonctions $p_{r,\mu}$, $p_{r,\nu}$, les produits deux à deux des carrés de ces fonctions et les produits quatre à quatre de la forme

$$p_{r_1,\mu} p_{r_1,\nu} p_{r_2,\mu} p_{r_2,\nu}.$$

M. Brioschi, qui applique ces formules au cas considéré par Göpel, retombe naturellement sur la relation découverte par ce dernier et la transforme de manière à la faire coïncider avec l'équation de la surface de Kummer rapportée à quatre de ses plans tangents singuliers; il donne ensuite les coordonnées d'un point quelconque au moyen des quatre fonctions hyperelliptiques du second ordre p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}. Enfin l'auteur montre comment des mêmes équations on peut déduire $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ relations entre $(n+1)^2$ fonctions p qui, par leurs formes, sont susceptibles d'applications variées; $n+1$ de ces équations sont du type

$$\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \alpha_r^2 + \alpha_\nu^2 = 1, \qquad \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \alpha_{r\mu}^2 + \alpha_{\nu\mu}^2 = 1,$$

les $\frac{n(n+1)}{2}$ autres sont du type

$$\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \alpha_r \, \alpha_{r\mu} + \alpha_\nu \, \alpha_{\nu\mu} = 0,$$

$$\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \alpha_{r\mu} \alpha_{r\lambda} + \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} = 0;$$

on suppose dans ces formules

$$\alpha_r = \sqrt{\frac{l_r}{(r\nu)\,S'(a_r)}}\,p_r,\quad \alpha_\nu = \sqrt{\frac{l_\nu}{S(a_\nu)}}\,p_\nu,$$

$$\alpha_{r\mu} = \sqrt{\frac{(\mu\nu)\,l_r l_\mu S(a_\mu)}{(r\nu)\,R'(\alpha_\mu)\,S'(a_r)}}\,p_{r,\mu},$$

$$\alpha_{\nu\mu} = \sqrt{(\mu\nu)\,\frac{l_\mu l_\nu S(a_\mu)}{R'(a_\mu)\,S(\alpha_\nu)}}\,p_{\nu,\mu};$$

le symbole $(r\nu)$ est mis à la place de $a_r - a_\nu$; enfin les quantités μ, ν sont des nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, 2n+1$ différents entre eux et distincts de r_1, $r_2, \ldots, r_n$.

Betti (*E.*). — Sur les mouvements qui conservent à une masse fluide hétérogène la figure ellipsoïdale. (173-187).

Cette question a été l'objet des recherches de Lejeune-Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. 58, p. 181), puis de Dedekind, Brioschi, Riemann, Padova. On suppose que les seules forces qui agissent sont les attractions réciproques des diverses particules suivant la loi de Newton; les auteurs cités ont regardé la densité comme constante; M. Betti regarde l'ellipsoïde comme stratifié suivant des couches homothétiques, la densité pouvant d'ailleurs varier d'une couche à l'autre. On n'augmente point ainsi la difficulté des intégrations; les équations restent les mêmes, si ce n'est qu'un terme se trouve multiplié par un coefficient numérique dont la valeur dépend de la variation de la densité de couche en couche et qui est égal à l'unité quand on suppose la densité constante.

Dirichlet a montré que dans les mouvements qui conservent à la m sse fluide la forme ellipsoïdale, les coordonnées d'un élément du fluide peuvent s'exprimer par des fonctions linéaires homogènes des coordonnées initiales et que, ainsi, la détermination des coefficients et par conséquent des coordonnées de l'élément fluide dépend de huit équations différentielles ordinaires du second ordre, déduites des équations de l'Hydrodynamique sous la forme due à Lagrange. Il a trouvé sept intégrales premières; il reste donc à en trouver neuf autres.

Riemann a décomposé le mouvement en deux : d'une part la rotation des axes de l'ellipsoïde autour du centre, de l'autre la déformation de la masse; il reste, après lui, à intégrer un système de sept équations différentielles du premier ordre.

M. Betti forme l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégrale complète, si elle était connue, fournirait, par de simples différentiations, toutes les intégrales des équations différentielles du mouvement. Pour déduire cette équation de celle qui exprime le principe de Hamilton, il faut ajouter à l'énergie cinétique augmentée du potentiel du système la dérivée prise par rapport au temps d'une fonction des variables qui doit rester constante en vertu de l'invariabilité de la masse, multipliée par un coefficient indéterminé. M. Betti trouve que la dérivée prise par rapport au temps de ce coefficient est égale à la différence entre la valeur de la pression à la surface et la valeur moyenne de la pression dans toute la masse, multipliée par un coefficient numérique dont la valeur dépend de la loi de variation de la densité.

Il trouve ainsi la valeur de la dérivée du coefficient indéterminé exprimée au moyen des quantités qui déterminent le mouvement et la figure, et obtient en conséquence la valeur moyenne de la pression exprimée au moyen de la pression à la surface et ces mêmes quantités.

M. Betti a encore déduit des équations canoniques une équation analogue à celle que Jacobi a trouvée pour un système de points soumis à des forces ayant un potentiel homogène par rapport aux coordonnées et dont on peut déduire des conséquences analogues relativement à la stabilité du mouvement.

L'équation aux dérivées partielles du premier ordre contient neuf variables indépendantes; M. Betti a conservé les variables de Riemann. On trouve sans difficulté cinq intégrales jacobiennes. Pour obtenir la solution générale, il reste seulement à trouver une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à quatre variables indépendantes.

Beltrami (*E.*). — Sur les équations générales de l'élasticité. (188-211).

Des équations générales de l'élasticité établies en coordonnées cartésiennes rectangulaires, Lamé a déduit, comme l'on sait, les équations qui conviennent au même problème quand on suppose les coordonnées orthogonales, mais d'ailleurs quelconques (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*), M. Neumann [*Zur Theorie der Elasticität* (*Journal de Crelle,* t. 57)], et M. Borchardt sont parvenus au même résultat par des analyses plus simples; le Mémoire de M. Borchardt a été reproduit dans le *Bulletin,* 1re série, t. VIII.

M. Beltrami établit les mêmes équations *directement* en prenant l'élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = Q_1^2\,dq_1^2 + Q_2^2\,dq_2^2 + Q_3^2\,dq_3^2.$$

La marche qu'il suit met en évidence ce fait bien intéressant que les équations auxquelles il parvient, et qui coïncident d'ailleurs avec celles de Lamé, sont indépendantes de toute hypothèse sur les fonctions Q_1, Q_2, Q_3 et que, ainsi, elles ont plus de généralité que les équations cartésiennes, d'où Lamé les a tirées, puisqu'elles ne supposent pas le postulatum d'Euclide. De ces équations, M. Beltrami déduit ensuite les équations indéfinies des milieux élastiques isotropes : or celles-ci ne coïncident plus avec les équations de Lamé que sous le bénéfice de certaines conditions, et ces conditions expriment précisément que l'expression

$$ds^2 = Q_1^2\,dq_1^2 + Q_2^2 + dq_2^2 + Q_3^2\,dq_3^2$$

est une transformée de l'expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ainsi les équations ordinaires de l'isotropie sont subordonnées à la vérité du postulatum d'Euclide, mais non les équations obtenues par M. Beltrami.

Cette remarque donne la raison du succès des artifices employés par M. Neumann et par Borchardt, ainsi que le montre la lumineuse analyse que fait l'auteur des méthodes suivies par ces savants.

Les équations de l'isotropie obtenues par M. Beltrami conviennent à tout espace de courbure constante; l'étude de ces équations le conduit à d'intéressants rapprochements avec les conceptions dues à Faraday, à MM. Maxwell et Helmholtz (*Treatise on Electricity and Magnetism,* t. I, p. 63 et 128; *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, 1881) sur la constitution des milieux diélectriques.

Scherrer (*F.-R.*). — Sur les formes biquadratiques ternaires. (212-223; all.).

I. *Théorie des polaires des courbes algébriques planes.*

Si l'on identifie une forme ternaire K^n du $n^{\text{ième}}$ degré, où les variables sont désignées par α, β, δ, savoir

$$\sum_{q,r,s} \frac{n!}{q!\,r!\,s!} A_{qrs}\alpha^q\beta^r\delta^s, \quad (q+r+s=n),$$

avec l'expression

$$\sum_i m_i(\alpha x_i+\beta y_i-\delta)^n,$$

où x_i, y_i sont les coordonnées rectangulaires d'un point de masse m_i et où la sommation est relative aux diverses valeurs de i, 1, 2, 3,... $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$, on parvient aisément à une suite de propositions analogues à celles qu'a développées M. Reye dans son Mémoire intitulé *Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen* (*Journal de Borchardt*, t. 78).

Si C^h désigne une courbe du $h^{\text{ième}}$ degré et C^h_{xy} le premier membre de l'équation de cette courbe, l'auteur appelle *polaire* de la courbe C^h par rapport à la courbe K^n (courbe dont l'équation tangentielle est $K^n=0$), une courbe de la classe $n-h$ dont l'équation tangentielle est

$$\sum_i m_i C^h_{x_i y_i}(\alpha x_i+\beta y_i-\delta)^{n-h}=0.$$

II. *Représentation d'une forme biquadratique ternaire comme somme de six bicarrés.*

Cette représentation est possible d'une triple infinité de façons. L'auteur montre que la condition pour qu'une telle forme soit la somme des quatrièmes puissances de cinq fonctions linéaires est qu'un certain déterminant A soit nul; si les mineurs de ce déterminant sont nuls, la forme est la somme des quatrièmes puissances de quatre fonctions linéaires.

III. *Le système des coniques associées aux points du plan par rapport à* K^4.

Si la polaire d'une conique C^2 par rapport à la courbe de quatrième classe $K^4=0$ se décompose en un point double x', y', on dit que le point et la conique C^2 sont associés. Si la conique associée à un premier point passe par un second point, la conique associée à ce second point passe par le premier point. Tel est le système dont l'auteur développe les propriétés.

Casorati (*F.*). — Généralisation de quelques théorèmes sur les équations différentielles linéaires du second ordre dus à MM. Hermite, Brioschi et Mittag-Leffler. (224-232).

Soient u, v, ... un système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire

$$y^{(m)}+py^{(m-1)}+qy^{(m-2)}+\ldots=0.$$

Si l'on se donne les dérivées logarithmiques

$$\frac{u'}{u},\quad \frac{v'}{v},\quad \ldots,$$

on pourra, au moyen de ces quantités, exprimer les coefficients p, q,....

Si l'on fait maintenant

$$G_\nu = \frac{u^{(\nu)}}{u} + \frac{v^{(\nu)}}{v} + \ldots,$$

on voit aisément que toutes les quantités G_ν pourront s'exprimer au moyen de $m-1$ d'entre elles; de plus, on aperçoit de suite l'existence de relations telles que les suivantes :

$$\begin{aligned}
G_1'' &= \sum \frac{u''}{u} - \sum \frac{u'^2}{u^2},\\
G_1^2 &= \sum \frac{u'^2}{u_2} - \sum \frac{u''v'}{uv},\\
G_2^1 &= \sum \frac{u'''}{u} - \sum \frac{u''u'}{u^2},\\
G_1 G_2 &= \sum \frac{u''u'}{u^2} + \sum \frac{u'v'}{uv},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'équation différentielle linéaire soit du second ordre, on aura

$$G_2 = -pG_1 - 2q,$$

et

$$\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} = G_1,\quad \frac{u'}{u}\,\frac{v'}{v} = \frac{1}{2}(G_1^2 + G_1' - G_2).$$

Si donc on se donne une expression quelconque

$$f\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right),$$

on pourra l'exprimer au moyen de x, p, q, G_1, G', et le résultat sera rationnel par rapport à ces quantités si f désigne une opération rationnelle, symétrique par rapport à $\frac{u'}{u}$ et $\frac{v'}{v}$. En particulier, on pourra former une équation différentielle linéaire du second ordre

$$Y'' + PY' + QY = 0,$$

telle que les dérivées logarithmiques des solutions U, V soient des fonctions données de x et des rapports $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$, savoir :

$$\frac{U'}{U} = \Phi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right),\quad \frac{V'}{V} = \Psi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right).$$

Deux cas ont été considérés par M. Hermite; dans le premier (*Comptes rendus*, séance du 29 décembre 1879), on a

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u} + p,\quad \frac{V'}{V} = \frac{v'}{v} - p;$$

dans le second (*Annali*, t. X), on a

$$\frac{U'}{U} = \omega\frac{u'}{u}, \quad \frac{V'}{V} = \omega\frac{v'}{v};$$

le cas considéré par M. Brioschi (*Annali*, t. X) s'obtient en posant

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u} + \alpha(x), \quad \frac{V'}{V} = \frac{v'}{v} + \beta(x);$$

enfin le cas considéré par M. Mittag-Leffler (*Comptes rendus*, séance du 13 décembre 1880) s'obtient en posant

$$\frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}\right), \quad \frac{V'}{V} = \varphi\left(x, \frac{v'}{v}\right).$$

La même méthode permet de résoudre le problème analogue pour les équations linéaires du troisième ordre; elle ne réussit plus pour les équations du quatrième ordre.

Brioschi (*F.*). — Sur un système d'équations différentielles. (233-240).

En posant

$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3),$$

les équations considérées par l'auteur (*voir* la Communication de M. Halphen, insérée dans les *Comptes rendus*, séance du 13 juin 1881) sont

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1' = u_1^2 + \alpha_1 f'(u_1) + \varphi(x), \\ u_2' = u_2^2 + \alpha_2 f'(u_2) + \varphi(x), \\ u_3' = u_3^2 + \alpha_3 f'(u_3) + \varphi(x), \end{cases}$$

où α_1, α_2, α_3 sont des constantes, et où $\varphi(x)$ est une fonction qui sera particularisée plus tard; en introduisant la fonction t de x, définie par l'égalité

$$\frac{u_1 - u_3}{u_3 - u_2} = \frac{1}{1 - t},$$

et en posant

$$\alpha_1 + 1 = \rho n, \quad \alpha_2 + 1 = \rho l, \quad \alpha_3 + 1 = \rho m,$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}(l + m + n - 1),$$

l'auteur parvient aux expressions suivantes de u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{1-l}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{l+m}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx},$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{m+n}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{1-n}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx},$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{1-l}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{1-n}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx},$$

qui, substituées dans l'une quelconque des équations (1), montrent que la fonction $t(x)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(2) \qquad [t]_x + \frac{Lt^2 + Mt + N}{2t^2(1-t)^2}t'^2 - 2\varphi(x) = 0,$$

où le symbole $[t]_x$ est mis à la place de

$$\frac{d^2 \log t'}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log t}{dx}\right)^2,$$

et où

$$L = 1 - m^2, \quad M = l^2 + m^2 - n^2 - 1, \quad N = 1 - l^2.$$

Si maintenant on suppose

$$2\varphi(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2},$$

où

$$A = 1 - \mu^2, \quad B = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1, \quad C = 1 - \lambda^2,$$

on aura, pour déterminer $t(x)$, l'équation différentielle hypergéométrique

$$[t]_x + \frac{Lt^2 + Mt + N}{2t^2(1-t)^2} t'^2 - \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2} = 0.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$l = \lambda, \quad m = \mu, \quad n = \nu, \quad t = x,$$

en sorte que, en attribuant à $\varphi(x)$ la valeur précédente, on satisfera aux équations (1) en prenant

$$u_1 = \frac{(1+\mu)x - (1-\lambda)}{2x(1-x)},$$

$$u_2 = \frac{(1+\mu)x - (\mu+\nu)}{2x(1-x)},$$

$$u_3 = \frac{(2-\lambda-\nu)x - (1-\lambda)}{2x(1-x)}.$$

En second lieu [*voir* la Note de M. Brioschi sur la *Théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles du second ordre* (*Math. Ann.*, t. XI)], on sait que, si les constantes l, m, n ont les valeurs suivantes :

$$(3) \qquad l = \frac{1}{3}, \quad m = \frac{r}{6(r-2)}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad (r = 4, 6, 12),$$

il existe une série de valeurs pour λ, μ, ν, telles que la fonction $t(x)$ soit rationnelle; les fonctions u_1, u_2, u_3 seront aussi rationnelles. M. Brioschi traite en particulier le cas de $r = 12$.

Soient maintenant y_1, y_2 deux intégrales fondamentales de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + py' + qy = 0,$$

et soit $f(y_1, y_2)$ une forme binaire d'ordre r de ces quantités, dont le covariant $(ff)_4$ soit identiquement nul, en posant

$$h = \tfrac{1}{2}(ff)_2, \quad \theta = 2(fh),$$

on aura entre f, h, θ la relation identique

$$\theta^2 + 4h^3 + \alpha f^{\frac{1}{m}} = 0,$$

où α est une constante, où m est donné par la formule (3); enfin r ne peut avoir qu'une des valeurs 4, 6, 12; en posant

$$4h^3 + \alpha t f^{\frac{1}{m}} = 0,$$

la fonction $t(x)$ vérifiera l'équation différentielle (2), en prenant pour l, m, n les valeurs (3) et pour $\varphi(x)$ la valeur

$$\varphi(x) = q - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{4}p^2;$$

on parvient alors aux valeurs suivantes de u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{3(r-2)}\frac{d\theta}{dy}\frac{y'}{\theta},$$
$$u_2 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{2(r-2)}\frac{d\theta}{dy}\frac{y'}{h},$$
$$u_3 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{r}\frac{df}{dy}\frac{y'}{l},$$

où y désigne le rapport $\frac{y_1}{y_2}$; les quantités α_1, α_2, α_3 ont dans ce cas les valeurs

$$\alpha_1 = 3r - 7, \quad \alpha_2 = 2r - 5, \quad \alpha_3 = r - 1.$$

Sous les mêmes conditions, les quantités

$$v_1 = -\frac{1}{3(r-2)}\frac{d\log\theta}{dy},$$
$$v_2 = -\frac{1}{2(r-2)}\frac{d\log\theta}{dy},$$
$$v_3 = -\frac{1}{r}\frac{d\log f}{dy}$$

satisferont aux équations

$$\frac{dv_1}{dy} = v_1^2 + \alpha_1(v_1 - v_2)(v_1 - v_3),$$
$$\frac{dv_2}{dy} = v_2^2 + \alpha_2(v_2 - v_1)(v_2 - v_3),$$
$$\frac{dv_3}{dy} = v_3^2 + \alpha_3(v_3 - v_1)(v_3 - v_2).$$

Beltrami (E.). — Sur le potentiel magnétique. (241-260).

Sir William Thomson, dans le volume intitulé : *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism* (Londres, 1872), a introduit des définitions nouvelles pour l'*axe* et le *centre* d'un corps magnétique.

M. Beltrami reprend la question à un point de vue nouveau : il ne spécifie pas la nature de la force d'attraction, ou plutôt il ne lui impose que des conditions très larges; il arrive ainsi à cette conclusion, qu'il y a lieu de conserver la définition donnée par Sir William Thomson pour l'*axe* magnétique, mais que le nom de *centre magnétique* paraîtrait convenir à un certain point situé sur l'axe magnétique, jouissant de propriétés remarquables, indépendantes de la loi d'attraction, comme celles de l'axe magnétique, et qui ne coïncide (dans le cas de la loi de Newton) avec le *centre magnétique* de Sir William Thomson que sous certaines conditions.

Voici la marche suivie par M. Beltrami.

Soient deux systèmes M, M′, auxquels appartiennent les masses m, m' de deux points situés à une distance mutuelle r; le potentiel mutuel des deux systèmes sera

$$W = \Sigma\Sigma mm'\varphi(r),$$

la nature de la fonction $\varphi(r)$ définissant la loi de l'attraction.

Si l'on suppose maintenant que les dimensions des systèmes M, M′ soient petites relativement à leur distance, on pourra les rapporter à deux systèmes d'axes rectangulaires T, T′ semblablement orientés et dont les origines O et O′ soient respectivement à des distances des points M ou M′ qui, relativement à la distance OO′, soient du même ordre que les dimensions des systèmes M et M′; soient a, b, c les coordonnées du point m relativement aux axes T, a', b', c' celles du point m' relativement aux axes T′; on pourra développer la distance $mm' = r$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{\rho}$, en désignant par ρ la distance OO′; si maintenant on suppose la fonction $\varphi(r)$ continue ainsi que ses dérivées et si, plus particulièrement, on admet que les dérivées successives $\varphi'(\rho)$, $\varphi''(\rho)$, $\varphi'''(\rho)$,... de la fonction $\varphi(\rho)$ soient de même ordre que les quantités

$$\frac{\varphi(\rho)}{\rho}, \quad \frac{\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}, \quad \ldots,$$

on obtiendra, en utilisant la formule de Taylor, une valeur approchée pour $\varphi(r)$ qui, substituée dans

$$W = \Sigma\Sigma mm'\varphi(r),$$

fournira une valeur approchée pour le potentiel W; il y a lieu maintenant de distinguer différents cas selon que l'on suppose que les masses Σm, $\Sigma m'$ des systèmes sont différentes de zéro ou nulles; en combinant les différents cas possibles, on trouve diverses formules qui, dans les cas où $\varphi(r) = \frac{1}{r}$, coïncident avec les formules classiques de la théorie du magnétisme.

Si, en particulier, la masse Σm est nulle, on pourra déterminer les axes T de telle sorte que l'on ait

$$\Sigma ma = 0, \quad \Sigma mb = 0, \quad \Sigma m(a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$
$$\Sigma mbc = 0, \quad \Sigma mca = 0, \quad \Sigma mab = 0.$$

Le plan des ab est alors le plan *central*, l'axe des c est l'*axe magnétique* de Sir William Thomson, et l'origine est le point auquel M. Beltrami propose de donner le nom de *centre magnétique*, à l'exclusion du point ainsi dénommé par l'illustre mathématicien écossais, point qui, pour le système d'axes précédemment défini, aurait les coordonnées

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = -\frac{3}{4}\,\frac{\Sigma m(a^2 + b^2)}{\Sigma mc}.$$

M. Beltrami termine son Mémoire par une élégante exposition de la théorie des moments d'inertie pour un système de points matériels dont la masse totale est nulle.

Casorati (*F.*). — Addition aux récents travaux de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler sur les fonctions d'une variable complexe. (261-278).

Presque en même temps que M. Mittag-Leffler, mais toutefois un peu plus tard, M. Casorati est arrivé à reconnaître que la démonstration donnée par M. Weierstrass dans les *Monatsberichte* de l'Académie des Sciences de Berlin (démonstration reproduite dans le *Bulletin*) et relative au mode de construction dû à M. Mittag-Leffler, d'une fonction uniforme admettant une infinité de pôles, s'étendait sans difficulté à la construction toute semblable de fonctions uniformes admettant une infinité de points singuliers essentiels dont l'ensemble a le point ∞ pour limite unique. Dans la présente Note il développe ses recherches à ce sujet. Nous signalerons la proposition suivante, qui constitue une généralisation naturelle du théorème de M. Mittag-Leffler et qui s'établit toujours par le même procédé.

« Soient données une infinité de fonctions de la variable z dont

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad f_3(z),\quad \ldots$$

désignent respectivement certaines branches qui, à l'intérieur de cercles ayant l'origine pour centre et dont les rayons r_1, r_2, r_3, ... sont tels que l'on ait

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq, \ldots$$

peuvent être représentées par des séries procédant suivant les puissances entières et positives de z; on admet que ces séries permettent de définir dans tout le plan (sauf pour certains points singuliers) les fonctions données quand on prend le chemin décrit par la variable à partir d'un certain point initial;

» Si l'on considère la somme

$$P_\nu = \sum_{\mu=0}^{\mu=m_\nu-1} A_\mu^{(\nu)} z^\mu$$

des m_ν premiers termes du développement

$$f_\nu = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(\nu)} z^\mu,$$

valable à l'intérieur du cercle de rayon r_ν, les nombres entiers m_ν pourront toujours être choisis de façon que la série dont le terme général est

$$f_\nu(z) - P_\nu(z)$$

soit convergente inconditionnellement et uniformément dans tout le plan, à l'exception toutefois de certains points singuliers pour les fonctions f_ν. »

L'application de ce théorème aux fonctions

$$\log\left(1-\frac{z}{a_1}\right),\quad \log\left(1-\frac{z}{a_2}\right),\quad \log\left(1-\frac{z}{a_3}\right),\quad \ldots,$$

où l'on suppose les quantités a_1, a_2, a_3, ... telles que l'on ait

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \ \ldots \ \lim_{n=\infty} |a_n| = \infty,$$

est immédiate et conduit de la façon la plus naturelle au théorème fondamental de M. Weierstrass sur la construction d'une fonction entière dont les zéros sont donnés. Il est inutile d'insister sur la proximité de cette démonstration et de celle qu'a donnée M. Hermite dans sa Lettre à M. Mittag-Leffler *Sur quelques points de la théorie des fonctions,* insérée dans le t. XII des *Acta Societatis Fennicæ* et dans le t. 40 du *Journal de Borchardt.*

Cazzaniga. — Expression d'une fonction transcendante entière qui prend des valeurs données en des points arbitrairement donnés. (279-290).

Soient les quantités données

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$

différentes entre elles, telles que l'on ait

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \quad \ldots \quad \lim_{n=\infty} |\alpha_n| = \infty,$$

et dont aucune n'est nulle.

Soit en outre

$$F\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}$$

la fonction

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu}, p_\nu\right),$$

représentant, comme on le sait, une fonction entière admettant pour zéros les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, en supposant que les nombres entiers p_ν soient tels que la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{p_\nu} \right|$$

soit convergente, quel que soit x.

Cela posé, l'auteur parvient, pour la fonction cherchée $f(z)$, qui doit prendre au point α_ν la valeur f_ν, à l'expression suivante :

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{f_\nu \varpi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{\varpi'(\alpha_\nu) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)},$$

où $\varpi(z)$ désigne le produit de $\varphi(z)$ par une fonction de la forme

$$e^{\varpi_1(z)},$$

$\varpi_1(z)$ étant une fonction entière de z.

Tonelli. — Sur la fonction potentielle dans un espace à n dimensions. (291-321).

En partant de la formule donnée par M. Beltrami dans son Mémoire *Sulla teorica dei parametri differenziali* (*Memorie dell' Accademia di Scienze di Bologna*, 1869) et qui fournit l'extension du théorème de Green à un espace ayant un nombre quelconque de dimensions, M. Tonelli établit élégamment les propriétés fondamentales de la fonction potentielle dans un espace à n dimensions; il traite d'abord le cas général sans rien supposer sur la courbure première et s'occupe ensuite plus particulièrement du cas où l'espace est plan.

Dans une seconde partie de son Mémoire il montre, en généralisant un procédé dû à M. Dini, comment, dans un espace plan, on peut déterminer la fonction potentielle dans un champ sphérique, lorsque l'on donne sur le contour la valeur de la dérivée première (ou d'un ordre supérieur), prise le long de la normale au contour. J. T.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von Dr. O. SCHLÖMILCH, Dr. E. KAHL und Dr. M. CANTOR (1).

Tome XXVI; 1881.

Veltmann (W.). — Détermination d'une fonction sur la surface d'un cercle, des conditions étant données pour les points de la circonférence de contour. (1-14).

L'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ou des deux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

sur la surface d'un cercle pour des valeurs données de u sur le contour, a été effectuée par MM. Prym et Schwarz dans les vol. 73 et 74 du *Journal de Crelle*, dans les cas où une solution existe. M. Schlaefli s'est aussi occupé de la question dans un Mémoire intitulé : *Quelques doutes sur la représentation générale d'une fonction périodique arbitraire d'une variable réelle par une série trigonométrique.* On s'est déjà occupé également du cas où le rayon du cercle croît indéfiniment et aussi où la surface est à connexité complexe avec un point de ramification.

M. Veltmann se propose d'arriver aux résultats déjà connus par une méthode simple et naturelle. Pour cela, il part des propriétés fondamentales des fonctions (monogénéité, application conforme), au lieu d'employer les conséquences que l'on déduit de ces propriétés, par exemple l'existence des équations différentielles écrites plus haut.

(1) Voir *Bulletin*, V_2, 23.

Ce procédé peut être plus simple, mais aussi il demande, pour être bien suivi, plus de contention d'esprit; nous ne voyons pas qu'il soit bien nécessaire de laisser de côté une partie des théorèmes de Cauchy et de Riemann sous prétexte d'apporter une modification peu importante dans la démonstration de résultats connus.

Buka (F.). — Courbure des surfaces gauches aux points d'une génératrice rectiligne. (15-49).

Partant de la considération de deux éléments voisins, l'auteur arrive, par des considérations géométriques assez simples, à montrer la relation qui existe entre les rayons de courbure des sections quelconques d'une surface gauche aux différents points d'une génératrice; il étudie la courbe lieu des centres de courbure correspondants et montre comment on peut la construire et en déterminer les principales propriétés. Il construit et discute les hyperboloïdes osculateurs, la surface gauche formée par les tangentes aux lignes de courbure aux différents points d'une droite, etc., etc. (*Voir* sur ce sujet Chasles, *Correspondance mathématique et physique*, tome XI; de la Gournerie; Mannheim; Fiedler, *Géométrie descriptive;* Weyr, *Krümmung windschiefer Flächen*, etc.)

Günther (S.). — Détermination d'un lieu en Astronomie sphérique. (50-56).

1° Étant donné un quadrilatère sphérique dont la surface est moindre qu'une demi-sphère, déterminer le point d'intersection des diagonales, quand on se donne les coordonnées des quatre sommets relativement à un système d'axes rectangulaires sphériques quelconques.

2° Solution du problème.

M. Günther donne à la solution une forme calculable par logarithmes.

Ce problème avait été posé et résolu par Michel Maestlin, le professeur de Kepler. Mais la solution, si exacte qu'elle fût, conduisait à des calculs longs et pénibles; c'est là ce qu'évite la solution de M. Günther.

Dietrich. — Mesure du rapport des rayons de courbure en un point d'une surface au moyen de l'angle des tangentes d'inflexion correspondantes. (57-59).

L'auteur trouve l'expression simple

$$-\frac{\rho_2}{\rho_1} = \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2},$$

ρ_1 et ρ_2 étant les rayons de courbure et φ l'angle des tangentes d'inflexion.

Schlömilch (O.). — Sur des sommes et des produits de rayons vecteurs de l'ellipse et de courbes analogues. (59-62).

L'équation de l'ellipse étant écrite en coordonnées polaires

$$R^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} = \frac{2a^2}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\theta},$$

on a, en désignant par R_k le rayon vecteur qui correspond à l'angle polaire $k\frac{2\pi}{n}$

$$R_0 . R_1 . R_2 \ldots R_n = (2ab)^n \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}}};$$

on trouve une formule analogue quand on exprime le rayon vecteur central au moyen de l'anomalie excentrique.

On a aussi des formules semblables pour les courbes dont les équations en coordonnées polaires ont une des formes

$$r^\mu = \alpha + \beta\cos\theta, \quad \text{ou} \quad r^\mu = \alpha + \beta\cos 2\theta.$$

Schlomilch (O.). — Sur les séries à la fois convergentes ou à la fois divergentes. (63-64).

Cauchy, dans son *Cours d'Analyse algébrique,* a montré que les deux séries infinies

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots$$
$$1u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 8u_4 + 16u_5 + \ldots$$

sont en même temps convergentes ou divergentes. Schlömilch montre comment on peut former une infinité de tels groupes de séries. L'application de son procédé lui donne, par exemple,

$$\begin{cases} \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \ldots, \\ \log 2.[1\varphi(1) + 2\varphi(2) + 4\varphi(3) + 8\varphi(4) + \ldots]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \ldots, \\ 1\varphi(1) + k\varphi(k) + k^2\varphi(k^2) + k^3\varphi(k^3) + \ldots; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \ldots \\ 1\varphi(1) + 2\varphi(4) + 3\varphi(9) + 4\varphi(16) + \ldots. \end{cases}$$

Weihrauch. — Sur les déterminants doublement orthosymétriques. (64-70).

Le déterminant doublement orthosymétrique

$$C = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \ldots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

peut, d'après Stern (*Journal de Crelle,* 73) et Zehfuss (*Zeitschrift für Mathematik und Physik,* 7e année, p. 439), être mis sous la forme

$$C = \prod_{k=1}^{k=n} \left(\sum_{\iota=0}^{i=n-1} a_\iota x_k^\iota \right)$$

x_k étant une des n racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0.$$

Weihrauch donne d'abord de ce développement une démonstration nouvelle, puis il arrive facilement au résultat suivant :

Si, partant de l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i y^{n-1-i} = 0, \quad y = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1},$$

on forme l'équation aux puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} b_i z^{n-1-i} = 0, \quad z = \beta_1^n, \beta_2^n, \ldots, \beta_{n-1}^n,$$

on a

$$C = \sum_{i=0}^{i=n-1} b_i.$$

Schaertlin (*G.*). — Déterminer un point tel que la somme de ses distances à n points donnés soit un minimum. (70).

Ciamician. — Sur la constitution des éléments. (71-72).

Erdmann (*G.*). — Sur les variations d'ordre n. (73-96).

Soit à chercher le maximum ou le minimum de

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\,dx,$$

où $y' = \frac{dy}{dx}$; posons

$$a_{mn} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m \partial y'^n}\varphi(x, y, y'), \quad a'_{mn} = \frac{d}{dx}\frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m \partial y'}\varphi(x, y, y').$$

L'équation différentielle

$$a_{10} = a_{01} \tag{1}$$

doit être vérifiée. L'auteur se donne les limites y_0 et y_1 de y et traite le problème dans les cas où :

1° L'équation (1) est une équation différentielle de second ordre, où, par suite, la solution contient deux constantes d'intégration indépendantes l'une de l'autre;

2° Toutes les quantités a_{mn} deviennent, quand on y remplace y par la valeur que l'on tire de (1), des fonctions de x qui demeurent finies et continues entre les limites de l'intégration;

3° Désignant par c_1 et c_2 les constantes d'intégration, tous les quotients différentiels de y et y' par rapport à c_1 et c_2 de la forme $\frac{d^{m+n}y}{dc_1^m\,dc_2^n}$ et $\frac{d^{m+n}y'}{dc_1^m\,dc_2^n}$ restent finis.

Il applique ensuite les résultats trouvés au problème du principe de la moindre action dans le mouvement elliptique, puis au cas où le corps mobile est attiré proportionnellement à la distance. Dans ce dernier cas, le principe de moindre action est applicable au mouvement elliptique du mobile, tant que sa trajectoire est comprise entre deux tangentes rectangulaires. Quand le mobile décrit cet arc en entier, le principe de la moindre action n'est plus applicable que dans le cas où les deux extrémités de l'arc se trouvent de côté et d'autre du grand axe, les tangentes en ces points faisant avec le grand axe l'angle $\varphi = \text{arc tang}(\sqrt{2} \pm 1)$.

Lange (E.). — Note sur un théorème de Chasles. (98-103).

Il s'agit du théorème suivant, donné par Chasles dans son *Aperçu historique*, p. 404, note XXXIII : *Quand les quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que trois sommets du tétraèdre doivent se trouver sur trois autres droites, placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le quatrième sommet du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième degré.*

Ce théorème ainsi énoncé n'est point exact. M. Lange se propose de rechercher à quelles conditions doivent satisfaire les droites de l'espace pour qu'il ait lieu; il détermine aussi les cas où la cubique se décompose.

Frenzel (C.). — Nouvelle solution d'un problème de rotation. (104-126).

Le problème en question est la détermination du mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe situé sur son axe sous l'influence de la pesanteur.

Ce problème a déjà été résolu bien des fois, mais l'auteur considère comme manquant de symétrie les solutions de Lagrange (*Mécanique analytique*, t. II), Poisson (*Traite de Mécanique*, t. II), Resal (*Traité de Cinématique pure*), Jullien (*Problèmes de Mécanique rationnelle*, t. II).

M. Frenzel se propose d'appliquer à la solution du problème les méthodes et les notations de Weierstrass, renvoyant d'ailleurs lui-même le lecteur qui a l'habitude d'employer les notations de Jacobi au Mémoire si intéressant de M. Hermite [*Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (*Comptes rendus*, 2e semestre 1877 et 1er semestre 1878)].

Weihrauch (K.). — Développement d'un polynôme. (127-132).

m et n étant des nombres entiers, développer l'expression $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^n$. Posant

$$\left(\sum_{k=0}^{k=m-1} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} a_k x^k$$

et de plus suivant toujours la notation employée dans le *Zeitschrift*,

$$(n)_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k},$$

on trouve

$$a_k = \sum_{i=0} (-1)^i (n)_i (n-1+k-mi)_{n-1}.$$

Weihrauch (*K.*). — Valeur de quelques déterminants doublement orthosymétriques. (132).

Déterminant doublement orthosymétrique où l'on fait

$$a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ ou } = (k+1)^2 \text{ ou } = \cos(ka) \text{ ou } = \sin(ka).$$

Weihrauch. — Théorème sur le quadrilatère plan. (133-134).

Thomae (*J.*). — La loi de réciprocité. (134-135).

Simplification de la troisième démonstration de Gauss.

Schlömilch (*O.*). — Une propriété des ellipses et des hyperboles concentriques. (135-136).

Schumann (*Ad.*). — Sur l'hyperboloïde équilatère. (136-143).

Dans le 86e volume du *Journal de Crelle*, M. Voigt a publié un Mémoire sur l'hyperboloïde déterminé par trois droites dont les directions constituent un trièdre trirectangle.

M. Schumann expose analytiquement les résultats trouvés par Voigt.

Hess (*W.*). — Propriétés de la lemniscate. (143-144).

Sur quelques théorèmes analogues à ceux qui se rapportent aux coniques.

Horn (*Th.*). — Sur les discontinuités du second quotient différentiel du potentiel superficiel. (145-156 et 209-231).

Le problème que l'auteur se propose est le suivant :

« Comment varient les seconds quotients différentiels du potentiel d'une surface courbe massive, pour des directions variables, et lorsque le point pour lequel on les forme traverse la surface ».

Schumann (*Ad.*). — Sur la cinématique des systèmes variables. (157-178).

Déjà dans le 23e volume du *Zeitschrift*, M. Burmester s'est occupé du mouvement des figures variables, employant la méthode synthétique dans la détermination des vitesses et des accélérations des points du système.

Il ne s'occupe ni des aires décrites par une courbe, ni des tangentes des arcs de courbe tracés par un point, ni des volumes décrits par une surface. M. Liguine [*Sur les aires des trajectoires decrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable* (*Bulletin des Sc. math.*, II_2, p. 306)] et M. Darboux [*Sur les mouvements d'une figure invariable; propriétés relatives aux aires, aux arcs de courbe décrits et aux volumes des surfaces trajectoires* (*Bulletin des Sc. math.*, II_2, p. 383)] ont traité des questions de cette nature. Déjà, en 1867, M. Schumann s'était occupé de la mesure des surfaces décrites par une droite d'un système invariable dans son mouvement [Schumann, *Beziehungen zwischen Flachen im Zusammenhange mit dem Krummungsschwerpuncte von Curven* (*Progr. d. Louisenstadt. Realschule in Berlin*)], et il a donné à ses théorèmes une forme plus générale, en s'appuyant sur le Mémoire de M. Darboux, dans un travail publié dans le 25e volume du *Zeitschrift* (*Ueber die Flächenräume und Bogenlängen, welche bei der Bewegung eines starren Systems von einer Gerade umschrieben werden*).

Dans le présent travail, l'auteur se propose d'étendre ces théorèmes aux systèmes qui, dans leur mouvement, demeurent semblables à eux-mêmes. Quelques-uns des théorèmes peuvent aussi s'étendre facilement au cas où le système, tout en changeant de forme, demeure en affinité.

Matthiessen (*L.*). — Intégration des équations différentielles qui se présentent dans la dioptrique des cristallins sphériques des poissons. (179-200).

Suite du travail dont une première partie a paru dans le 25e volume du *Zeitschrift.*

Wein (*E.*). — Sur la détermination de la position d'une étoile par l'intersection de deux grands cercles. (201-204).

Böklen (*O.*). — Sur les surfaces homofocales. (204-207).

Étant donné un système de surfaces homofocales, on prend un point S de l'espace comme sommet d'un cône tangent qui touche une des surfaces, par exemple un ellipsoïde le long d'une ellipse E, considérée comme ellipse focale : déterminer un second système de surfaces homofocales. Les trois surfaces homofocales du second système qui passent par S ont avec les trois surfaces homofocales du premier système un contact supérieur, en ce sens qu'il y a coïncidence non seulement entre les tangentes aux lignes de courbure, mais aussi entre les génératrices réelles ou imaginaires de chaque groupe de surfaces tangentes.

Hočevar (*F.*). — Théorème de Géométrie. (207-208).

Schönemann (*P.*). — Transformation d'un triangle en un carré. (208).

Holzmüller (*G.*). — Sur les faisceaux isothermes, les parentés isogonales et les systèmes variables conformes qui sont en connexion avec les modes de représentation exprimés par les équations

$$z = \sqrt[n]{Z}, \quad z = \sqrt[m]{\frac{aZ^n + b}{cZ^n + d}}.$$

(231-256).

Suite des travaux de M. Holzmüller sur la géométrie lemniscatique et ses rapports avec des questions physiques. Étant donnée une courbe dans le plan Z, quelle est la courbe correspondante dans le plan Z et réciproquement? Ces considérations conduisent l'auteur à des courbes qu'il appelle hyperboles d'ordre n, lemniscates d'ordre n, dont il étudie les propriétés et qui lui fournissent des faisceaux de lignes isothermes. Il étudie aussi la correspondance entre les mouvements de deux points correspondants figurés, l'un dans le plan z, l'autre dans le plan Z.

Wiener (Chr.). — Sur le double mode de génération des roulettes allongées ou raccourcies. (257-263).

Toute épicycloïde ou toute hypocycloïde généralisée peut être engendrée de deux manières : le point qui décrit la courbe se trouve dans un cas à l'intérieur du cercle mobile, dans l'autre cas à l'extérieur. L'auteur donne une démonstration simple de ce théorème; il remarque cependant que le théorème se trouve déjà énoncé dans un livre de Proctor (*A Treatise on the cycloïd and all forms of cycloïdal curves*, London, 1878), mais l'auteur anglais appuie sa démonstration sur les propriétés des courbes épicycliques établies précédemment.

Böklen (O.). — Sur les lignes géodésiques. (264-269).

L'équation d'une courbe tracée sur une surface quelconque est donnée en coordonnées géodésiques bipolaires; au point M de la courbe on mène le plan tangent et les tangentes aux rayons vecteurs géodésiques sur lesquelles on porte des segments proportionnels au numérateur et au dénominateur du quotient différentiel $\left[\frac{du}{dv}\right.$ si l'on a pour la courbe $\left.u=f(v)\right]$; la diagonale du parallélogramme complété avec ces deux segments est la normale à la courbe.

Applications à quelques exemples.

Schröter (H.). — Remarque au sujet de la Note sur un théorème de Chasles par E. Lange (p. 98 de ce volume). (270-272).

Hauck (G.). — Sur les principes fondamentaux de la perspective linéaire. (273-296).

L'auteur, qui a déjà publié un Mémoire sur la « Perspective subjective et les courbures horizontales du style dorique », où il cherche à donner à la perspective une base purement scientifique en partant des lois de l'optique physiologique moderne, se propose ici de donner pour ainsi dire un commentaire de ce travail. Il prétend fonder la perspective sur la physiologie et essaye en somme, dans le présent Mémoire, de donner à ses idées métaphysiques une forme un peu plus mathématique qu'il ne l'avait fait d'abord.

Küttner (W.). — Sur la statistique mathématique. (297-313).

Thomae (J.). — Théorie élémentaire de la série hypergéométrique. (314-332).

Dans ce travail, l'auteur se propose non pas tant de donner des résultats nouveaux, que d'exposer d'une façon simple et élémentaire les propriétés connues de la série hypergéométrique. Thomae commence d'abord par l'étude des facultés (*Facultäten*). Une fonction telle que

$$\varphi(n+1) = (n+1)\varphi(n),$$
$$\lim \varphi(n+w) : \varphi(w)w^n = 1, \quad \varphi(0) = 1,$$

w étant une quantité positive qui croît au delà de toute limite, est complètement définie. La marche suivie pour arriver à une représentation de la fonction est celle due à Weierstrass (*Journal de Crelle*, t. 51, p. 1-70). Il passe ensuite à l'étude des formules de récursion à trois termes :

$$A_n\varphi(n+2)+B_n\varphi(n+1)+C_n\varphi(n)=0,$$

A_n, B_n, C_n étant des fonctions entières de n. Enfin il montre l'application des considérations précédentes à la série hypergéométrique.

Much. — Sur la méthode due à Sturm pour la démonstration du théorème d'addition des intégrales elliptiques de première espèce. (333-335).

Finger. — Sur un pendule analogue à celui de Kater et son application à la mesure de la pesanteur. (335-336).

Wittwer (*W.-C.*). — Éléments de Chimie mathématique. (337-356).

Krey (*H.*). — Quelques applications d'un théorème de la théorie des fonctions. (357-376).

M. Krey part du théorème fondamental de Cauchy qui donne les conditions sous lesquelles une intégrale prise entre deux limites quelconques ne change pas quand on fait varier le chemin d'intégration. Il l'applique successivement à la démonstration d'un théorème d'Algèbre dû à Jacobi [*Theoremata nova algebraica* (*Journal de Crelle*, t. 14)], à la détermination du nombre des solutions d'un système d'équations algébriques, et enfin pour la démonstration du théorème d'addition des intégrales elliptiques de première espèce, tel qu'il se présente comme cas particulier du théorème d'Abel.

Biehringer. — Sur une extension des lois de Mariotte et de Gay-Lussac. (377-383).

Böklen (*O.*). — Sur les foyers des lignes de courbure de l'ellipsoïde. (383-387).

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont sur des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes de révolution. Propriétés qui en résultent.

Lauermann (*K.*). — Sur les normales à l'ellipse. (387-390).

Démonstration analytique assez simple de propriétés connues depuis longtemps sur les pieds des normales abaissées d'un point sur l'ellipse.

Vogel (*P.*). — Note sur la discontinuité dans les courbes. (391-392).

$y=f(x)$ étant l'équation d'une courbe ayant un point double au point $x=a$, M. Plateau croyait qu'en remplaçant y par $y-\cos\sqrt{a-x}$, on obtiendrait une courbe à *point saillant*. M. Mansion a montré dans ce *Bulletin* (1878, II_2) que cela n'était pas exact. M. Vogel propose de remplacer y par $y - \frac{(x-a)^n}{\log(x-a)}$, n étant entier et $\gtreqless 1$ et appliqué à quelques cas particuliers.

Hovestadt (*H.*). — Démonstration d'un théorème de Weierstrass. (392-393).

Théorème sur les formes quadratiques bilinéaires, donné par Weierstrass dans les *Monatsberichte* de Berlin, de 1858, p. 207.

Hornstein. — Sur la connaissance du système des astéroïdes. (394).

Biehringer. — A propos de la Météorologie. (395-400).

G. B.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX (¹).

Tome II; 1878.

Darboux. — Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide quand ce corps change de position dans l'espace. (1-65).

Voir le *Bulletin*, 2ᵉ série, t. II, Iʳᵉ Partie, p. 278.

De Tilly. — Note sur la théorie de la rotation des projectiles et sur la similitude mécanique. (66-72).

L'auteur donne quelques indications sur les travaux faits sur ce sujet par M. le général Mayevski, par M. Magnus de Sparre et par lui-même; il avait dirigé quelques critiques, fondées en théorie, sur la méthode de M. Mayevski; les résultats obtenus par ce dernier sont cependant exacts, ainsi que l'a montré l'étude approfondie faite par M. Magnus de Sparre; M. de Tilly justifie le principe de ses critiques.

Tannery (*P.*). — Note sur la genèse des forces attractives et répulsives. (95-104).

Il s'agit de ce problème : « Déterminer les hypothèses nécessaires pour substituer, à des attractions et répulsions s'exerçant à distance entre des molécules matérielles, l'action d'un milieu s'exerçant par pression sur ces molécules. » L'auteur admet que les molécules sont des solides invariables et que le milieu est fluide.

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, p. 167.

Rayet (G.). — Note sur quelques propriétés géométriques du canevas des cartes orthodromiques équatoriales. (129-130).

Il s'agit de la projection orthodromique de M. Hilleret où le canevas des méridiens et des parallèles est formé par des droites et des hyperboles. M. Rayet donne en particulier la loi de la dilatation des surfaces.

Tannery (P.). — Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules.

Réfutation de l'opinion d'après laquelle le géomètre grec aurait voulu passer de la quadrature des lunules à celle du cercle.

Castet. — Du plus court chemin sur une surface de révolution entre deux points de la génératrice. (185-187).

Glotin. — Navigation orthodromique. (188-210).

Jacquier. — Note sur les propriétés des systèmes de deux forces qui sont équivalentes. (211-216).

Tannery (P.). — Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe.

Essai de restitution de la solution par Eudoxe du problème des moyennes proportionnelles, solution sur laquelle on n'a que quelques indications fournies par Eutocius.

Gomes Teixeira (F.). — Sur le nombre des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux dérivées partielles. (315-321).

L'auteur se propose d'étendre la théorie d'Ampère à une équation contenant un nombre quelconque de variables indépendantes

Tome III; 1879.

De Tilly. — Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique. (1-190).

« L'auteur rappelle d'abord les définitions ordinaires du point, de la ligne, de la surface, et il énumère alors les trois axiomes irréductibles qui forment la base de la Géométrie, savoir : 1° l'axiome de la *distance* et de ses propriétés essentielles, communes aux divers systèmes de Géométrie; 2° l'axiome de l'augmentation indéfinie de la distance, qui exclut la géométrie dite *elliptique* ou doublement abstraite, dans laquelle l'espace serait *rentrant sur lui-même;* 3° l'axiome de la parallèle unique, qui sépare la géométrie usuelle ou euclidienne de la géométrie *abstraite* de Lobatchefsky et de Bolyai.

» On peut définir la position d'un point de l'espace avec une approximation indéfinie, sans avoir besoin d'aucune comparaison directe des positions de l'étendue, en concevant l'espace rempli par trois systèmes de surfaces dont on peut subdiviser à l'infini les intervalles, et auxquelles on attribuerait des numéros d'ordre. Entre deux points ainsi définis, il existe une certaine relation, dont nous n'avons d'idée que par le sentiment de la constance de l'impression qu'elle produit sur nos sens : c'est la *distance*. Cette quantité dépend des numéros des surfaces qui déterminent les deux points.

» Les propriétés que l'expérience nous porte à admettre dans les êtres géométriques ne sont compatibles qu'avec trois formes générales de cette relation, formes dont chacune caractérise un des trois systèmes de géométrie dont nous venons de parler.

» De là, l'auteur passe aux notions de la sphère et du cercle, et il établit les propriétés de la rotation d'un système invariable autour d'un point fixe, puis autour de deux points fixes. Dans ce dernier mouvement, il existe une série continue de points immobiles qui constituent la ligne droite, définie ainsi indépendamment du plan.

» Vient ensuite l'étude des triangles, après laquelle l'auteur établit la définition du plan, comme lieu décrit par une droite tournant autour d'une droite qui lui est perpendiculaire. Propriétés de la perpendiculaire au plan.

» La ligne droite considérée dans le plan. Axiome des parallèles.

» Tel est le contenu du Chapitre I. Le Chapitre II a pour titre : Exposition de la Géométrie dans les Traités élémentaires. M. de Tilly passe en revue, numéro par numéro, le Traité de MM. Rouché et de Comberousse, en indiquant seulement le chiffre des articles auxquels il ne trouve rien à changer, et donnant pour les autres l'exposé succinct des modifications qu'il croit devoir y apporter. De cette manière, il a pu faire tenir en quarante pages tous les matériaux nécessaires pour reconstruire un Traité de Géométrie entièrement conforme aux principes établis dans le premier Chapitre, tout en conservant une forme appropriée à l'enseignement élémentaire.

» Le Chapitre III contient un travail analogue sur la Trigonométrie usitée. Dans le Chapitre IV, l'auteur indique les changements qu'il faudrait apporter à la Trigonométrie usitée pour l'approprier aux systèmes de Géométrie plus généraux.

» Le Chapitre V traite des principes de la Mécanique. Après avoir indiqué les raisons pour lesquelles il y abandonne les systèmes plus compliqués que le système usuel, l'auteur expose successivement ses idées sur la notion de vitesse et quelques points de Cinématique, l'axiome de l'inertie, le théorème des vitesses virtuelles, les théorèmes généraux de la Dynamique, enfin sur une question spéciale relative au mouvement de rotation d'un corps solide. »

Weyr (*Ed.*). — Sur l'arrangement des plans tangents de certaines surfaces. (191-211).

L'auteur s'occupe des surfaces engendrées par une conique mobile, variable de grandeur et de forme, et de l'arrangement de plans tangents le long d'une conique génératrice; la solution du problème suivant forme la conclusion principale de son travail.

Considérons une surface Π sur laquelle il se trouve une série de coniques Σ. Soit donnée la surface développable Δ enveloppe des plans des coniques Σ, et soient données de plus cinq courbes (directrices) de Π. Par cela, Π est parfaitement déterminée. En effet, tout plan ϖ tangent à Δ contiendra une conique Σ de Π; cette conique passera par les traces sur ϖ des cinq courbes données.

On demande de construire le plan tangent de Π en un point quelconque de Σ.

Laisant. — Remarques sur les fractions périodiques. (212-234).

L'auteur complète l'étude de certaines propriétés, concernant les fractions périodiques, publiées en collaboration avec M. Baujeux dans deux Mémoires insérés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. VII et IX.)

Abria. — Sur les surfaces équipotentielles. (235-283).

Bayssellance. — Représentation proportionnelle des minorités. (285-304).

Tannery (P.). — L'arithmétique des Grecs dans Pappus. (351-371).

Analyse des débris, malheureusement trop rares, qui, dans la *Collection mathématique* de Pappus, concernent l'Arithmétique.

Darboux (G.). — Note sur deux intégrales elliptiques qui se présentent sous forme indéterminée. (373-376).

Lorsque k tend vers zéro, l'expression $\log\frac{4}{k}$ constitue une valeur approchée de K'.

Recherche de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\mathrm{dn}'a\,du}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a(1+k^2\,\mathrm{tn}'^2a\,\mathrm{sn}^2u)},$$

pour la valeur K' attribuée à l'argument a.

Glotin. — Navigation orthodromique. (377-394).

Glotin. — Résolution des triangles sphériques par des triangles rectilignes sur une projection gnomonique. (395-400).

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 3e série.

Tome XX; 1881, 2e semestre.

Letnikof (A.). — Sur les propriétés principales des foyers des courbes du second degré et sur la détermination analytique de ces points. (289-304).

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 131.

Cet article résume des propriétés connues et n'en contient pas de nouvelles. Il y a lieu cependant de remarquer, à la fin de cette exposition, une formule très simple donnant l'excentricité d'une conique. — La définition des foyers qui a été adoptée ici est celle d'Euler.

Droz (*A.*). — Note de Géométrie. (305-307).

Il s'agit d'un théorème de Chasles sur l'intersection du plan tangent et de la normale à une surface du second degré avec un des plans diamétraux de cette surface.

Leinekugel (*A.*). — Solution de la question du concours général de 1879, en rhétorique. (307-310).

Problème de Géométrie sur des volumes engendrés par des figures tournantes

Lez (*H.*). — Solution des questions du concours général de 1879, en seconde. (310-314).

1° Lieu géométrique dérivant d'un système de deux droites parallèles.
2° Calcul relatif au triangle équilatéral.

Moret-Blanc. — Solution de la question du concours général de 1880, en philosophie. (314-315).

Lieu des points d'une sphère pour lesquels la longitude est égale à la latitude.

Moret-Blanc. — Solution de la question du concours général de 1880, en rhétorique. (315-316).

Volumes engendrés par des figures tournantes.

Un abonné. — Solution de la question du concours général de 1880, en seconde. (317-319).

Problème relatif au triangle.

Moret-Blanc. — Solution des questions du concours général de 1880, en troisième. (319-321).

1° Lieu géométrique relatif à deux droites parallèles.
2° Construction d'un quadrilatère inscriptible.

Correspondance. — M. L. Doucet : Sur la question comprise sous les nos 970 et 1028. Un triangle circonscrit à une elliptique a pour hauteurs les droites joignant les sommets aux points de contact; lieu des sommets; lieu du point de concours des hauteurs. — M. A. Legoux : Sur l'intégration des équations des lignes de courbure de l'ellipsoïde. — M. A. Hilaire : Sur un théorème de Steiner, attribué par erreur à M. Mention, et relatif à une conique inscrite dans un triangle. (321-328).

B... (*Ch.*). — Solution de la question 127. (329-330).

En rendant rationnelle l'équation

$$(a_1+x)^{\frac{1}{2}}+(a_2+x)^{\frac{1}{2}}+\ldots+(a_n+x)^{\frac{1}{2}}=0,$$

on parvient à une équation du degré 2^{n-2}.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1195. (330-332).

Le nombre des boulets d'une pile à base carrée ou triangulaire n'est jamais n^3 ni n^5.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1328. (333-335).

Sur un certain système de surfaces du second degré.

Realis (*S.*). — Solution de la question 1330. (335-336).

Propriétés des expressions

$$\begin{aligned} x &= 2\ \ (\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)+2\alpha(2\beta+3\gamma+4\delta),\\ y &= 2(-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\delta^2)+2\beta(2\alpha+3\gamma+4\delta),\\ z &= 3(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+4\gamma(\alpha+\beta+2\delta). \end{aligned}$$

Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 500, sur un sujet analogue.

Resal (*H.*). — Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus. (337-338).

La proposition de M. Resal consiste en ce que les points qui divisent proportionnellement les côtés successifs d'un polygone fermé ont même centre de gravité que les sommets du polygone. Elle a été énoncée antérieurement en 1877, avec bien d'autres propriétés, par M. Laisant, dans une Communication au Congrès du Havre.

Faure (*H.*). — Sur l'expression du volume de certains tétraèdres. (338-344).

Cet article est une intéressante application des déterminants à diverses questions concernant des volumes de tétraèdres. On y retrouve certains résultats figurant dans la *Théorie des indices,* du même auteur.

Jamet (*V.*). — Sur une classe de surfaces du quatrième ordre. (344-348, 385-391, 434-443).

Cette étude prend son origine dans un travail de M. Amigues sur les *girocyclides,* surfaces spéciales engendrées par des circonférences passant par deux points fixes. L'auteur s'est proposé d'obtenir certaines propriétés des girocyclides du quatrième ordre au moyen de propriétés des cônes du second ordre, en établissant la corrélation entre ces deux surfaces. Nous regrettons de ne pouvoir signaler, même à grands traits, les principales de ces propriétés, parmi lesquelles il y a lieu de remarquer surtout celles qui se rapportent aux lignes de courbure.

plusieurs propriétés dignes d'intérêt, qui prennent principalement leur source dans les travaux de Chasles et de M. Cremona.

Dewulf (*E.*). — Question : Combien existe-t-il de courbes rationnelles (unicursales) du quatrième ordre qui ont deux points doubles en a_1 et a_2 et qui passent par les sept points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? (401-402).

Catalan (*E.*). — Note sur la question 393. (403-405).

Sur les aires de paraboles d'ordres quelconques.

Legoux (*A.*). — Note sur un système de courbes orthogonales et homofocales. (406-408).

Les courbes dont il s'agit sont représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda f(x,y)-a}+\frac{y^2}{\lambda f(x,y)-b}=1.$$

Realis (*S.*). — Démonstration de propositions énoncées. (408-411).

Ces propositions (voir 2e série, t. XVII, p. 178) se rapportent aux racines entières de l'équation du troisième degré, et conduisent à d'intéressantes propriétés des nombres.

Droz (*A.*). — Note sur des formules de Joachimsthal. (411-413).

Surface du triangle, connaissant les équ tions des trois côtés. — Volume du tétraèdre, connaissant les équations des quatre plans formant les faces.

Genty. — Note sur les conditions qui expriment qu'une surface du second degré est de révolution. (414-416).

L'auteur obtient ces conditions par une méthode très élégante en employant la polaire réciproque de la surface, par rapport à une sphère concentrique.

Fauquembergue (*E.*). — Solution d'une question de licence; Paris, juillet 1880. (416-418).

Problème sur la chaînette.

Henry (*C.*). — Décomposition des nombres $f^{12}-9g^{12}$ et du double de ces nombres en deux cubes rationnels. (418-420).

Conséquences d'identités dues à M. Éd. Lucas.

Fauquembergue (*E.*). — Solution d'une question de licence; Paris, juillet 1880. (420-421).

Question de Cinématique dans l'espace.

Chambeau (*A*.). — Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Centrale en 1880 ; 2[e] session. (464-468).

Problème sur les paraboles passant par deux points fixes, et dont les diamètres ont une direction fixe.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1881. — Mathématiques; Littérature; Lavis; Calcul; Géométrie descriptive. Énoncés des compositions. (468-470).

Fauquembergue (*E*.). — Solution d'une question de licence; Paris, juillet 1880. (471-473).

Équation différentielle des lignes asymptotiques d'une certaine surface.

Bourget (*J*.). — Solution de la question 251. (473-480).

Problème des huit racines.

Question proposée : 1376. (480).

Rectification : question 1306, p. 370. (480).

Orlof (*G.-A*.). — Sur la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ de Didon. (481-489).

Cet article a pour origine les travaux de Didon publiés notamment, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 749, sous le titre : *Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables*, et dans les *Annales de l'École Normale*, 1[re] série, t. VII, p. 247 : *Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables*. Dans ces deux articles, ce géomètre, trop prématurément enlevé à la Science, a étudié les propriétés de ces fonctions $P_{m,n}$ qui présentent une grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre. L'article de M. Orlof contient des résultats nouveaux et souvent de notables simplifications.

Biehler (*Ch*.). — Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. (489-498, 537-546).

Ces deux articles forment la suite d'études précédemment publiées sous le même titre dans les *Nouvelles Annales* (voir *Bulletin* IV_2, 265; V_2, 134). Dans cette troisième partie, l'auteur étudie la construction des branches paraboliques fournies par une direction multiple de points à l'infini. Il suppose successivement que cette direction est parallèle à l'axe des y, ou bien quelconque, et se livre à une discussion très complète des divers cas qui peuvent se présenter.

Weill. — Théorèmes sur les courbes algébriques. (498-500).

Ces théorèmes portent sur la somme des carrés des distances mutuelles des points où une sécante rencontre une courbe.

Realis (*S*.). — Exercices de calcul algébrique. (501-506).

Ces exercices se rapportent à de remarquables identités, et conduisent à des propriétés des nombres rationnels, soit réels, soit complexes, spécialement en ce qui touche les décompositions en sommes de trois carrés.

D'Ocagne (*M.*). — Sur le mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant. (506-511).

Cette Note a pour but de faire connaître une propriété commune aux deux mouvements, ascendant et descendant. Il s'agit de la loi qui lie les espaces parcourus par le mobile en des temps égaux.

Concours d'admission a l'École navale en 1880. — Géométrie et Statique; Tracé graphique; Arithmétique, Algèbre, Calcul de Trigonométrie rectiligne. Énoncés des compositions. (511-514).

Lionnet. — Propositions. (514-515).

Six énoncés sur les propriétés des nombres.

Un anonyme. — Solution de la question 1272. (515-518).

Propriétés du tétraèdre dont les faces sont équivalentes.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1283. (518-520).

Enveloppe d'une droite.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1343. (520-522).

Questions relatives au triangle.

Goffart (*N.*). — Solution de la question 1373. (523-524).

Propriété de la circonférence.

Goffart (*N.*). — Solution de la question 1374. (524-526).

Lieu géométrique dans l'espace.

Questions proposées : 1377 à 1381. (526-527).

Rectifications : Questions 1364 et 1376. (528).

Resal (*H.*). — Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies. (529-537).

Ces intégrales sont celles des expressions suivantes :

$$f(x)\sqrt{1 \pm x^2}\,dx, \quad \frac{f(x)}{\sqrt{1 \pm x^2}}\,dx, \quad f(x)\sqrt{x^2 - 1}\,dx, \quad \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx,$$

$$\sqrt{\sin x}\,dx, \quad \sqrt{\operatorname{coséc} x}\,dx, \quad \sqrt{\operatorname{tang} x}\,dx.$$

Saltel (*L.*). — Contribution à la théorie de la substitution des systèmes d'équations. Application de cette théorie à la recherche de l'équation et des points multiples d'un lieu défini par k équations contenant $k-1$ paramètres variables. (546-564).

L'auteur définit ainsi l'objet de son Mémoire :

« On rencontre, en Algèbre élémentaire, de nombreux problèmes se résolvant sans peine, grâce à l'introduction de solutions étrangères préalablement connues; il suffit en effet de les supprimer à la fin du calcul.

» C'est, je crois, faute d'avoir remarqué l'existence et la détermination précise de certains résultats étrangers, qui s'introduisent nécessairement par les substitutions *connues* d'un système d'équations à un autre système d'équations, que l'on ne développe pas, dans les *Traités de Géométrie analytique*, un procédé *élémentaire* permettant de trouver l'équation d'un lieu géométrique défini par k équations contenant $k-1$ paramètres variables. En traitant, dans le présent travail, quatre cas particuliers de ce dernier problème général, j'aurai donc surtout en vue de mettre en parfaite évidence l'existence et la détermination exacte des non-solutions que l'on rencontre dans l'application des regles les plus élémentaires relatives à la théorie de l'élimination; j'indiquerai en outre un moyen, non encore remarqué, d'obtenir, en même temps que l'équation du lieu, les coordonnées des points multiples de ce lieu. »

Voir, du même auteur : *Historique et développement d'une méthode pour déterminer les singularités ordinaires d'un lieu géométrique défini par k équations.*

École Normale supérieure; Concours de 1881. — Composition de Physique. Énoncé (565). A. L.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES. COMPTES RENDUS DES SESSIONS (¹).

5e Session (Clermont-Ferrand); 1876.

Lucas (É.). — Sur la recherche des grands nombres premiers. (61-68).

Le Mémoire de M. Lucas a pour objet l'étude de la décomposition ou de l'irréductibilité des grands nombres en facteurs premiers. Les nouvelles méthodes reposent sur une idée fondamentale, l'étude des fonctions symétriques des racines d'une équation de degré quelconque à coefficients commensurables et sur la réciprocité d'un théorème de Fermat. Si l'on désigne par a un nombre quelconque non divisible par le nombre premier p, $a^{p-1}-1$ est, comme on sait, un multiple de p. Mais la réciproque de ce théorème n'a pas lieu nécessairement. Cependant on peut énoncer la proposition suivante : « Si a^x-1 est divisible par p pour

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 173.

$x = p - 1$ et n'est pas divisible par p lorsque x est un diviseur de $p - 1$, on peut affirmer que le nombre p est premier. » Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus étendue, puisque l'on peut, comme M. Lucas l'a prouvé dans un très grand nombre de cas, remplacer le nombre entier a par un nombre complexe. Mais la méthode qui résulte de l'application de ce théorème est pour ainsi dire opposée aux anciennes méthodes. Dans celle d'Euler, par exemple, on divise le nombre supposé premier par des nombres toujours inférieurs et différents, et c'est l'insuccès de la division qui conduit à affirmer que le nombre essayé est premier. Dans la méthode de M. Lucas les divers essais consistent dans la division de nombres d'un calcul facile par un même diviseur, le nombre donné. Par conséquent, d'une part, on n'a pas besoin de se servir d'une Table de nombres premiers; d'autre part, dans le cas d'un nombre premier, le résultat se trouve affranchi de l'incertitude des calculs numériques. De plus, la division se trouve nécessairement supprimée, puisqu'il suffit préalablement de calculer les dix premiers multiples du diviseur constant. M. Lucas a déduit de là le plan d'une machine automatique qui permettrait de trouver de très grands nombres premiers.

Catalan (E.). — Sur les fonctions X_r de Legendre. (68-74).

Indication de très nombreuses relations entre ces polynômes et leurs intégrales associées aux facteurs $1 - x$, $1 - x^2$.

Grolous (J.). — Étude sur la thermostatique des corps. (75-80).

Arson. — Essai de théorie sur le ventilateur à force centrifuge. (82-87).

Collignon (É.). — Problème des raccordements. (87-106).

Le tracé des routes, des canaux, des chemins de fer, etc., présente une série d'alignements droits reliés par des courbes. On emploie généralement, pour opérer ces raccordements, des cercles ou des paraboles. Il résulte de là que le tracé présente, au point où une courbe succède à un alignement droit, une variation brusque de courbure qui n'est pas sans inconvénient, surtout sur les chemins de fer où la trajectoire des wagons est fixée d'une manière invariable. Le dévers transversal qu'il convient de donner à la voie pour équilibrer la force centrifuge étant proportionnel à la courbure, on serait conduit à faire varier brusquement la hauteur du rail à l'entrée d'une courbe; en réalité, on substitue une variation graduelle à cette dénivellation brusque, mais cette variation graduelle supposerait en toute rigueur une variation analogue de la courbure, c'est-à-dire une altération du tracé.

M. Collignon reprend cette question en se plaçant à un point de vue plus géométrique. Il s'agit donc de raccorder deux alignements droits en des points donnés par une courbe dont la courbure soit nulle en ces points extrêmes et varie d'une manière continue de l'un à l'autre. L'auteur examine successivement diverses solutions.

Lafon (A.). — Sur les accroissements géométriques (104-114).

L'auteur s'est proposé d'étendre aux parallélogrammes et aux parallélépipèdes la notion des accroissements géométriques. Après avoir introduit une notation nouvelle, il en fait des applications aux courbures géodésiques, aux théorèmes de Gauss et de Dupin, aux problèmes sur les enveloppes.

Tchebychef (*P.*). — Sur la généralisation de la formule de M. Catalan et sur une formule arithmétique qui en résulte. (114-117).

M. Tchebychef généralise la formule

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

en remplaçant les unités des numérateurs par les termes d'une série quelconque. Il donne ensuite des applications.

Deprez (*M.*). — Sur une machine destinée à l'étude des lois du frottement et du pouvoir lubréfiant des corps gras. (118-124).

Baehr (*C.-F.-W.*). — Note sur la cinématique des fluides. (124-127).

En considérant pour tous les points du fluide qui environnent à une très petite distance un point pris pour centre le déplacement relatif par rapport à ce centre, estimé dans la direction du rayon vecteur, on trouve qu'autour de chaque point du fluide on peut décrire un système d'hyperboloïdes à une nappe séparé par le cone asymptote d'un système d'hyperboloïdes à deux nappes, ces deux systèmes jouissant de la propriété suivante : La composante du déplacement relatif est dans le sens positif du rayon vecteur pour tous les points des surfaces de l'un des systèmes, et dans le sens négatif pour tous les points des surfaces de l'autre. Sur le cône asymptote le déplacement est perpendiculaire au rayon vecteur.

Jung (*G.*). — Sur les problèmes inverses des moments d'inertie et des moments de résistance d'une section plane. (127-128).

Résumé de la solution graphique communiquée à l'Institut Lombard.

Mannheim (*A.*). — Remarque sur la surface de l'onde. (130-140).

Cornu (*A.*). — Théorie de la liaison synchronique des appareils oscillants (131-140).

Un corps en oscillation, pendule ou lame vibrante, reçoit une attraction très faible pendant un temps très court, mais à des intervalles bien égaux. Si la durée de l'oscillation diffère peu de la période de succession des attractions extérieures, le système finit par prendre un mouvement oscillatoire et permanent, de même période que ces attractions.

Gariel (*C.-M.*). — Transformation perspective d'une anamorphose relative à la formule des lentilles. (140-143).

6e Session (Le Havre); 1877.

Piarron de Mondesir. — Sur les nombres premiers. Formules pour le calcul exact de la totalité des nombres premiers compris entre o et un nombre pair quelconque 2N. (79-92).

Il s'agit ici d'une formule permettant de calculer *a priori* et exactement le nombre des nombres premiers compris entre o et un nombre pair quelconque. La formule est fondée sur une notation qui exprime, soit en plus, soit en moins, le nombre entier qui se rapproche le plus du quotient du nombre quelconque N par un nombre premier ou par le produit de plusieurs nombres premiers. La formule peut être transformée en vue de simplifier les calculs. M. de Mondesir a pu ainsi aborder le calcul du nombre total des nombres premiers compris dans le premier million, nombre qu'il a trouvé égal à 78490.

Collignon (É.). — Recherches sur le mouvement épicycloïdal. (92-125).

Le problème que l'auteur s'est proposé de résoudre consiste à réaliser le mouvement donné d'un point dans un plan, à l'aide d'un mouvement épicycloïdal satisfaisant à l'une des deux conditions suivantes : ou bien que la courbe roulante applique en temps égaux des arcs égaux sur la courbe fixe qui lui sert de directrice, ou bien que la vitesse angulaire de la courbe roulante soit constante. On est ainsi conduit à des équations différentielles, que M. Collignon intègre dans plusieurs cas intéressants.

Mannheim (A.). — Sur les plans tangents singuliers de la surface de l'onde et sur les sections faites dans cette surface par des plans parallèles à ces plans tangents. (125-127).

L'auteur déduit de l'existence des points singuliers celle de plans singuliers, et il démontre que les sections faites dans la surface de l'onde par les plans parallèles à ces plans tangents singuliers sont des anallagmatiques du quatrième ordre.

Catalan (E.). — Sur la somme des diviseurs du nombre n. (127-129).

L'auteur examine les conséquences d'un théorème donné par M. Halphen à la Société Mathématique. Il montre qu'il est facile de tirer de là d'autres propositions analogues au célèbre théorème d'Euler. Par exemple, $\psi(n)$ représentant le nombre des décompositions de n en parties entières positives, égales ou inégales, M. Catalan établit que la somme des diviseurs de n a pour expression

$$\psi(n-1)+2\psi(n-2)-5\psi(n-5)-7\psi(n-7)+12\psi(n-12)+\ldots$$

Leveau. — Note sur la comète périodique de d'Arrest. (129-133).

L'auteur rend compte de ses recherches sur cette comète. Le but de son travail a été de relier les observations faites en 1870 à celles de 1851 et 1858 et d'en déduire des positions exactes pour le retour de 1877. Le succès a couronné, comme on sait, ces efforts, et l'on a pu faire des observations d'après les éphémérides fournies par l'auteur.

Halphen. — Sur les points singuliers des courbes gauches algébriques. (132-142).

On trouve dans ce Mémoire une théorie générale des singularités quelconques des courbes gauches algébriques. La détermination des points singuliers, tangentes singulières, plans stationnaires, les relations entre l'ordre, la classe, le genre de ces courbes forment la partie la plus importante de cette étude intéressante.

Laisant (C.-A.). — Sur quelques propriétés des polygones. (142-154).

L'auteur s'est proposé surtout d'étudier les relations qui existent entre un polygone plan et celui qu'on obtient en construisant sur chacun des côtés du premier un triangle semblable à un triangle donné. La méthode des équipollences s'applique naturellement à ce genre de questions.

Piarron de Mondesir. — Sur une nouvelle formule algébrique. (154-158).

Cette formule peut être considérée comme la généralisation du binôme de Newton. L'auteur l'emploie pour démontrer la formule du Waring relative à la somme des puissances semblables des racines d'une équation.

Lemoine (Ém.). — Sur quelques questions de probabilité. (158-159).

Lucas (Éd.). — Considérations nouvelles sur la théorie des nombres premiers et sur la division géométrique de la circonférence en parties égales. (159-167).

C'est la suite des communications faites par l'auteur au Congrès de Clermont; on y trouve de nouveaux développements sur la division de la circonférence en parties égales et l'interprétation d'un passage des Œuvres de Mersenne; on y rencontre aussi des théorèmes semblables à celui de Wilson, pour la recherche des grands nombres premiers. Ce Mémoire débute par un résumé historique des recherches antérieures, dans lequel on remarquera la différence des méthodes employées; elles reposent soit sur la considération des progressions arithmétiques, soit sur celle des progressions géométriques.

Mannheim (A.). — Sur la surface de l'onde. (167-168).

L'auteur cherche et détermine quelles sont sur la surface de l'onde les transformées des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Piarron de Mondesir. — Sur la résolution de l'équation trinôme de degré impair $x^m \pm x = r$ au moyen d'un nouveau signe algébrique. (168-172).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorème d'Arithmétique sur la somme des inverses des puissances semblables des nombres premiers. (172-175).

Désignant par S_n la somme

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots,$$

et par Σ_n la somme

$$\Sigma_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots,$$

où ne figurent que les nombres premiers, on a

$$\Sigma_n = l\,S_n - \frac{1}{3}\,l S_{3n} - \frac{1}{6}\,l S_{5n} + \frac{1}{5}\,l S_{6n} + \frac{1}{7}\,l S_{7n} + \ldots,$$

où la loi est que les nombres qui contiennent un facteur carré n'entrent pas et que le signe est positif ou négatif selon que le nombre des facteurs premiers du nombre est pair ou impair.

Mannheim (*A.*). — Sur les normales de la surface de l'onde. (175-176).

Les points où une normale quelconque de la surface de l'onde rencontre les plans principaux de cette surface, le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette normale déterminent quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

On a une propriété analogue en considérant le point où la normale est rencontrée par le diamètre perpendiculaire à celui qui passe par son pied.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur un déterminant. (177-179).

M. Glaisher, généralisant une proposition connue, décompose en facteurs les déterminants, tels que le suivant :

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c & d & e \\ b & c-x & d & e & a \\ c & d & e-x & a & b \\ d & e & a & b-x & c \\ e & a & b & c & d-x \end{vmatrix},$$

que l'on savait décomposer seulement pour $x = 0$.

Guyesse (*P.*). — Note sur les sondages à grande profondeur. (181-188).

Jablonski. — Sur une classe d'équations différentielles (188-194).

Intégration du système

$$\frac{dy_1}{Py_1 - P_1} = \ldots = \frac{dy_n}{Py_n - P_n},$$

où $P_1, \ldots, P_t$ sont des fonctions linéaires de $y_1, \ldots, y_n$.

Gohierre de Longchamps. — Note sur l'intégration d'une équation aux différences finies. (194-197).

Cette équation est la suivante :

$$(x+2)\mathrm{F}(x) = 1 + (x-1)\mathrm{F}(x-1).$$

La méthode de l'auteur consiste à changer de fonction et à procéder en quelque sorte d'une manière récurrente.

Normand (J.-A.). — Sur les occultations d'étoiles par Mars, observables pendant l'opposition de 1877. (199-202).

Baehr (G.-F.-W.). — Sur un moyen mécanique de déterminer les rayons de courbure des différentes sections normales en un point quelconque d'une surface, par l'observation du temps d'oscillation d'une règle placée sur la surface. (203-204).

Soient l la demi-longueur, d la demi-hauteur d'une règle homogène, r le rayon de courbure de la section, g la gravité, t la durée d'une oscillation. On aura

$$t = \pi\sqrt{\frac{l^2+4d^2}{3g(r-d)}},$$

équation que donne r si t est déterminé par l'observation.

Fouret (G.). — Théorèmes sur les normales aux surfaces algébriques. (205-208).

L'auteur généralise quelques théorèmes déjà donnés par M. Mannheim et les étend à des surfaces algébriques quelconques, définies par leur degré, leur classe et leur rang. Les démonstrations reposent sur le théorème suivant que l'on doit à M. de Jonquières : le nombre des points de contact des surfaces d'un système (μ, ν, ρ) avec une surface algébrique d'ordre m, de classe n, et de rang r indépendante des surfaces du système est $m\nu + n\mu + r\rho$.

Grolous (J.). — Note sur la convergence des séries. (209-211).

Glaisher (J.-W.-L.). — Théorème de Trigonométrie. (211-213).

Si l'on a

$$\varphi(x) = \mathrm{A} + i\mathrm{B} = \left(1+\frac{ix}{a}\right)\left(1+\frac{ix}{b}\right)\cdots,$$

on en déduit

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{b} + \ldots = \operatorname{arc\,tang}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

L'auteur fait plusieurs applications.

Lucas (Éd.). — Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester. (213-214).

Catalan (*E.*). — Sur quelques développements de l'intégrale elliptique de première espèce. (214-219).

Parmi les résultats qu'obtient M. Catalan au moyen d'ingénieuses transformations, nous citerons seulement celui-ci, dans lequel $F_1(c)$ représente l'intégrale complète de première espèce de module c,

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty T_s \left(\frac{1-b}{32}\right)^s,$$

où T_5 désigne un nombre entier.

Duvergier (*A.*). — Perfectionnement à l'indicateur Richard. (219-222).

7e Session (Paris); 1878.

Jonquières (*E. de*). — De la représentation des nombres par des formes quadratiques binaires. Application à l'analyse indéterminée. (40-49).

Le problème de la représentation d'un nombre par une forme quadratique binaire donnée peut être résolu très simplement dans le cas fort étendu où cette forme est $u^2 + tv^2$, t désignant un nombre rationnel positif ou négatif. Le nouveau mode de solution consiste à faire dépendre la représentation du nombre donné N de la décomposition préalable de son carré en une somme quadratique de même forme que celle qui est demandée.

M. de Jonquières se propose deux objets distincts :

1° Faire connaître deux formules générales qui permettent d'écrire immédiatement toutes les décompositions propres du carré d'un nombre donné N et de ce nombre lui-même en une somme quadratique de la forme $u^2 + tv^2$, toutes les fois qu'une telle décomposition est possible;

2° Montrer comment la dépendance mutuelle qui existe entre les représentations propres de N^2 et celles de N, chacune à chacune, trouve son application dans la résolution des systèmes de deux équations indéterminées du deuxième degré en nombres entiers et premiers, dans certains cas où l'on a à considérer simultanément un nombre indéterminé y et son carré y^2. Les équations

$$y = x^2 + tu^2,$$
$$y^2 = z^2 + tv^2,$$

avec les conditions

$$u = x + \alpha, \quad v = z + \beta,$$

rentrent dans cette catégorie.

Gohierre de Longchamps. — Sur les normales aux coniques. (49-53).

Considérant les coniques comme des courbes unicursales, on trouve, en appliquant cette idée aux normales, des démonstrations simples de propriétés connues et de quelques autres qui sont nouvelles. L'auteur a complété ainsi le théorème de Joachimsthal, et montre que le cercle qui passe par les pieds de trois normales menées d'un point et par le point de la conique diamétralement opposé au pied de la quatrième normale, A', passe aussi : 1° par la projection du centre de la conique sur la tangente en ce point A'; 2° par la projection du point P d'où l'on mène des normales sur la droite qui joint le point A' au second point de rencontre avec la conique de la normale au point A, diamétralement opposé à A'.

Collignon (*É.*). — Enveloppe des ellipses planétaires obtenues en faisant varier la direction, mais non la grandeur de la vitesse initiale. (53-56).

Généralisation de la propriété de la parabole de sûreté, démontrée par des procédés élémentaires et de pure Géométrie.

Catalan (*E.*). — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et de la surface des ondes. (56-62).

Suite au Mémoire du même auteur *Sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes* (Académie de Belgique, 1868). La question est surtout traitée au point de vue analytique.

Mannheim (*A.*). — Sur la surface de l'onde. (63-67).

L'auteur fait usage d'un nouveau mode de représentation des plans tangents à une surface réglée, et il retrouve ainsi des résultats qu'il avait déjà fait connaître au Congrès de Nantes, et en outre quelques conséquences nouvelles qui donnent par exemple la solution de la question suivante :

On donne un pinceau de normales; on fait tourner d'un angle droit chacun des rayons de ce pinceau autour d'un point fixé dans les plans passant respectivement par ce rayon et par ce point fixé. Après la rotation, chaque rayon est venu prendre une nouvelle position et appartient à un pinceau de normales; construire les foyers et les plans focaux de ce nouveau pinceau.

Collignon (*É.*). — Sur une manière de rendre tautochrones les oscillations d'un point le long d'une courbe plane. (68-80).

Le procédé employé par M. Collignon consiste à substituer au point matériel un solide de révolution assujetti à rouler sur une voie dont la construction géométrique est indiquée. L'auteur fait ensuite l'application au pendule composé.

Laisant (*A.*). — Sur la cinématique du plan. (81-88).

Application de la méthode des équipollences aux principales questions de Cinématique plane : vitesses, accélérations des divers ordres, mouvement d'une figure invariable. On sait que les méthodes de Bellavitis sont très propres à l'étude de ce genre de questions.

Gilbert (*Ph.*). — Sur la réduction des forces centrifuges composées dans le mouvement relatif d'un corps solide. (88-92).

Dans ce mouvement les forces centrifuges composées de tous les points sont réductibles à une force R et à un couple G. Partant d'une expression particulière de la force centrifuge composée, on exprime les composantes parallèles à trois axes liés aux corps, en fonction des composantes de la rotation du système de comparaison et de la rotation relative du corps lui-même. De là M. Gilbert déduit : 1° le théorème de M. Resal; 2° une construction géométrique très simple de la résultante R; 3° une construction géométrique également très simple de l'axe du couple résultant G; 4° diverses propriétés des forces composées en général. Les formules relatives à l'axe G donnent immédiatement l'équation des mouvements par rapport aux axes d'inertie du corps, obtenue par M. Quet.

Lucas (É.). — Sur l'emploi de l'arithmomètre Thomas dans l'Arithmétique supérieure. (94-95).

Picquet. — Mémoire sur les courbes et les surfaces anallagmatiques. Conséquences relatives à quelques courbes et surfaces du quatrième degré. (95-132).

Ce Mémoire est divisé en sept Chapitres. Dans le premier l'auteur donne l'équation générale de la courbe ou de la surface anallagmatique de degré m et sa classe en fonction de l'onde de multiplicité des points cycliques ou du cercle de l'infini.

Dans le deuxième Chapitre, il en est déduit une classification des courbes ou des surfaces anallagmatiques. Pour un degré donné m, il y a autant d'espèces qu'il y a d'entiers de même parité que m et inférieurs à m, y compris zéro. En particulier, pour le quatrième degré, il y en a deux dont l'une avait été étudiée, mais dont l'autre est signalée ici pour la première fois.

Dans le troisième Chapitre, il est démontré que la courbe déférente de l'anallagmatique de degré m et d'indice k est de classe $m-k$ et de degré $k(2m-3k-1)$, avec $m-2k$ sommets à l'infini.

La surface déférente de l'anallagmatique de degré m et d'indice k est de classe $m-k$, de degré $k(3m^2-9mk+7k^2-4m+6k+1)$, et admet le plan de l'infini comme plan tangent multiple d'ordre $m-2k$.

Le quatrième Chapitre étend à toutes les courbes du quatrième ordre à 1 point double les résultats démontrés pour les anallagmatiques de degré 4 et d'indice 1. Il y est démontré en particulier que les points de contact des six tangentes menées du point double à une pareille courbe sont sur une même conique.

Le cinquième Chapitre est consacré à la démonstration d'un nouveau mode de génération applicable à toutes les courbes du quatrième degré à point double.

Dans le sixième Chapitre l'auteur considère les surfaces du quatrième degré à directrice rectiligne double et du cinquième degré à directrice rectiligne triple.

Enfin, dans le septième Chapitre, M. Picquet examine le cas où la surface du quatrième degré est involutive, c'est-à-dire où les deux plans tangents passant en chaque point de la directrice double forment une involution.

Mannheim (A.). — Transformation par polaires réciproques d'un pinceau de normales, et extensions. (132-135).

M. Mannheim emploie la théorie des polaires réciproques pour la transformation des pinceaux de droites et établit ainsi différentes propositions nouvelles.

Laisant (*A.*). — Sur une généralisation de la division harmonique. (135-136).

L'auteur étend au plan la propriété des quatre points harmoniques sur une droite en se servant de la représentation des imaginaires.

Lalanne (*L.*). — Sur l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. (138-139).

Tagliaferro (*N.*). — Sur de nouvelles fonctions numériques transcendantes (140-144).

Broch (*O.-J.*). — Note sur la convergence de la série du binôme de Newton pour le cas de $x = 1$. (145-147).

M. Broch reproduit ici la démonstration qu'il donne pour ce cas dans ses cours à l'Université de Christiania.

Gilbert (*Ph.*). — Sur l'application des équations de Lagrange aux mouvements relatifs. (147-152).

On sait que Bour a donné les équations différentielles de Lagrange sous la forme convenable pour l'application aux mouvements relatifs. Ces équations sont ici établies par M. Gilbert d'une manière immédiate et leur interprétation géométrique conduit à un théorème général important sur le mouvement apparent d'un système dont le centre de gravité est fixé sur la terre. Appliqué aux problèmes du gyroscope complet traités par M. Lottner et par Bour, ce théorème fournit presque sans calcul les équations différentielles du mouvement, même en tenant compte des quantités du même ordre que le carré de la rotation terrestre. Dans le cas où l'axe du gyroscope est libre dans tous les sens, l'intégration s'effectue au moyen des fonctions elliptiques. Dans le cas où cet axe ne peut se mouvoir que dans un plan fixe par rapport à la terre, on démontre qu'il oscille par rapport à sa position d'équilibre comme un pendule simple, dont le plan d'oscillation tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante.

Mannheim (*A.*). — Construction de la normale à la surface trajectoire d'un point d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. (152-154).

Cette construction ne s'appuie pas sur l'existence des droites D, Δ, et demeure applicable quand elles sont imaginaires.

Mannheim (*A.*). — Construction des centres de courbure principaux de la surface de vis à filet triangulaire. (156-159).

Tchebychef. — Sur les parallélogrammes les plus simples symétriques autour d'un axe. (159-163).

Applications mécaniques du beau théorème sur les fonctions qui approchent le plus de zéro.

Lucas (*É.*). — Sur les formules de Cauchy et de Lejeune-Dirichlet. (164-173).

Ce Mémoire est le développement de théorèmes intéressants, dus à Aurifeuille et Le Lasseur. L'auteur a rapproché les résultats obtenus par ces savants de ceux que l'on doit à Gauss, Cauchy, Dirichlet relativement à la transformation de $4\frac{x^p-1}{x-1}$ en une forme quadratique.

Fouret (*C.*). — Sur les surfaces de vis. (173-179).

Les surfaces hélicoïdales de même axe et de même pas forment dans leur ensemble un implexe dont les caractéristiques sont toutes deux égales à l'unité. De ce fait M. Fouret déduit immédiatement plusieurs propriétés intéressantes de ces surfaces hélicoïdales. Entre autres résultats, on trouve que la courbe d'ombre propre d'une surface de vis à filet carré, éclairée par un point lumineux quelconque, est l'intersection de cette surface par une surface de troisième ordre.

Laisant (*A.*). — Formule relative à des sommations algébriques. (179-180).

Laisant (*A.*). — Sur la déformation métallique des surfaces. (180-181).

8e Session (Montpellier); 1879.

Laisant (*C.-A.*). — Notice historique sur les travaux des première et deuxième sessions jusqu'en 1878 inclusivement. (64-117).

Cette Notice fort étendue rend compte des diverses communications présentées à l'Association Française dans les sessions précédentes. Elle est divisée de la manière suivante :

I. Analyse algébrique. — Calcul des probabilités. — Théorie des nombres.
II. Géométrie.
III. Calcul infinitésimal et calcul des fonctions.
IV. Mécanique rationnelle. — Mécanique appliquée.
V. Mécanique céleste et Astronomie. — Géodésie. — Topographie. — Arpentage.
VI. Physique mathématique.
VII. Questions diverses.

Elle se termine par la note finale suivante :

« La Notice historique qu'on vient de lire peut donner une idée de l'importance croissante des communications mathématiques dans l'ensemble des travaux de l'Association Française pour l'avancement des Sciences... »

Aux travaux analysés ci-dessus il importe d'ajouter ceux communiqués soit à la section de Physique, soit à celle du génie civil et militaire, soit à celle de navigation, et qui ne sont souvent autre chose que des applications directes des Mathématiques.

Amigues (*E.*). — De quelques propriétés d'une famille de courbes représentées par une équation différentielle à deux variables. (118-128).

Collignon (*Éd.*). — Problème de Géodésie. (129-137).

A partir d'un point M pris sur la surface d'un ellipsoïde de révolution, du globe terrestre, par exemple, on mesure suivant le méridien et suivant le parallèle deux arcs très petits, correspondants chacun à une variation d'une seconde en latitude et en longitude. On demande les dimensions de l'ellipsoïde; la latitude λ du point M est supposée connue.

Ce problème, appliqué au sphéroïde terrestre, se trouve résolu dans les Traités de Géodésie par une méthode approximative, fondée sur la faible valeur de l'excentricité de l'ellipse méridienne. L'auteur s'est proposé de reprendre la question d'une manière générale sans faire aucune hypothèse sur l'excentricité de la courbe cherchée.

Il remarque pour cela que le problème revient à construire une ellipse, connaissant un point et le cercle osculateur en ce point, ainsi que la distance de ce point à un axe. Cette construction est faite d'une manière géométrique.

Simon (*Ch.*). — Mémoire sur la nouvelle navigation astronomique. (138-143).

Ce travail est une étude de pure géométrie. Quand on considère à un point de vue purement théorique ce qu'on a appelé la *nouvelle navigation astronomique,* il est naturel de se demander quelles sont les cartes sur lesquelles subsisterait la théorie des droites de hauteur. On reconnaît aisément que ce sont celles où les angles sont conservés, et l'on est ainsi conduit à examiner ce que deviendrait la théorie de la navigation si l'on faisait usage de cartes construites à la même échelle que celle de Mercator, mais en projection stéréographique sur l'équateur, et la conclusion qui se présente d'elle-même est que, dans la pratique courante, les nouvelles cartes n'offriraient aucun avantage sur les anciennes, mais qu'il pourrait être utile, pour la résolution de certains problèmes, d'employer concurremment les deux systèmes de cartes.

Ritter (*F.*). — Quelques inventions mathématiques de Viète. (143-149).

Parmentier. — Sur la quadrature des paraboles du troisième degré. (150-154).

Démonstration d'un théorème connu avec applications numériques.

Schoute (*P.-H.*). — De la projection sur une surface. (155-161).

L'auteur appelle *projection d'une courbe sur une surface* le lieu des pieds des normales menées à la surface des différents points de la courbe. Il commence par démontrer quelques théorèmes connus et ajoute quelques propositions nouvelles.

Collignon (*Éd.*). — Note sur l'inscription dans le cercle d'un polygone régulier de dix-sept côtés. (162-170).

Le but de cette Note est de faire connaître une démonstration géométrique nouvelle, qui repose sur l'emploi de certains angles auxiliaires dont la considération permet de simplifier un peu la théorie de cet intéressant problème.

Berdellé (*Ch.*). — Sur l'élévation aux puissances et le calcul d'intérêts composés. (170-176).

Berdellé (*Ch.*). — Propriétés des puissances de 5 et de leurs multiples. (176-179).

Schoute (*P.-H.*). — Sur les courbes tracées sur une surface du deuxième ordre. (180-287).

Cet article est un complément aux études de MM. Chasles, Cayley et d'autres géomètres sur les courbes tracées sur les surfaces du second degré.

Roche (*É.*). — Sur l'aplatissement terrestre et la distribution de la matière à l'intérieur du globe. (187-190).

L'état intérieur de la terre, au point de vue de la répartition de la masse au centre, est lié à trois éléments astronomiques, savoir : la densité moyenne, la valeur numérique de la précession et enfin l'aplatissement superficiel. Il résulte de là trois conditions auxquelles doit satisfaire la loi des densités des couches terrestres, mais qui sont insuffisantes pour déterminer cette loi.

M. Roche, en admettant la fluidité et une certaine hypothèse sur la compressibilité des couches, avait trouvé autrefois que l'on satisfait à ces conditions au moyen d'une loi très simple qui ferait varier la densité de 10,6 au centre du globe à 2,1 à la surface. Cette loi, d'où l'on déduisait la variation de la pesanteur à l'intérieur du globe, s'accordait avec l'expérience de M. Airy sur l'oscillation du pendule au fond d'une mine.

Dans ces derniers temps, l'hypothèse de la fluidité a été vivement attaquée par MM. Hopkins et W. Thomson. Sans prendre parti sur cette question, M. Roche remarque que considérer la terre comme un bloc solide à peu près uniforme, ayant à son centre un noyau très dense et enveloppé d'une couche sphérique assez mince et beaucoup moins dense, constitue une hypothèse tout opposée à celle du fluide compressible. Mais par sa netteté cette hypothèse se prête au calcul et, en la combinant avec les valeurs connues de la densité moyenne, de la précession et de l'aplatissement, l'auteur a pu arriver à la détermination des inconnues qu'elle renferme.

Tout calcul fait, on trouve que le bloc composant la majeure partie du globe terrestre aurait une densité égale à 6. La masse centrale serait le $\frac{1}{14}$ de la masse entière.

Enfin la couche extérieure à laquelle M. Roche attribue la densité moyenne 2,7 aurait une épaisseur égale à $\frac{1}{9}$ du rayon. Sa masse serait le $\frac{1}{7}$ de la masse entière.

Alexéief. — Sur l'intégration de l'équation $y'' + Py' + Qy = 0$. (190-192).

L'auteur montre que, lorsque l'équation linéaire du second ordre admettra une intégrale première de la forme

$$Ay^2 + Byy' + Cy'^2 = 1,$$

où A, B, C sont des fonctions de x, l'intégration complète de l'équation sera toujours ramenée aux quadratures.

Ragona (*D.*). — Sur une nouvelle méthode pour mesurer la déclinaison magnétique en un lieu donné. (193).

Schoute (*P.-H.*). — Sur la transformation conjuguée. (194-205).

Les courbes planes du troisième ordre qui passent par huit points donnés ont encore un neuvième point commun qui, avec les huit points donnés, forme la base du faisceau. Quand on ne fixe que sept points de cette base et qu'on fait mouvoir le huitième, le neuvième se meut aussi. Ces deux points forment donc dans le plan des courbes du troisième ordre une correspondance birationnelle en involution, que M. Schoute commence par étudier. Il considère ensuite la correspondance entre un plan simple et un plan double. Les deux points du plan simple qui correspondent à un point du plan double forment une correspondance involutive birationnelle, à laquelle M. Schoute donne le nom de *transformation conjuguée*. Une telle correspondance a déjà été étudiée par M. de Paolis. M. Schoute reprend cette théorie, en faisant l'étude de quelques cas spéciaux et en mettant en évidence plusieurs points de vue nouveaux.

Laisant (*C.-A.*). — Sur la transformation exponentielle. (206-211).

Il s'agit ici de la transformation définie par l'équation $z' = e^z$, où z et z' sont deux variables imaginaires. L'auteur donne les principales propriétés géométriques qui se rapportent à cette transformation.

Guieysse (*P.*). — Étude sur les sondages. (211-235).

1. Sondes à grande profondeur. — Détermination des courants de surface en pleine mer et des courants de fond. — Sondes d'atterrissage.
2. Sondes en embarcation.

Delsaulx. — Note sur une propriété caractéristique des surfaces du second degré dans la théorie de l'électricité statique. (236-239).

L'auteur se propose de démontrer que, parmi toutes les surfaces convexes, les surfaces du second degré jouissent seules de la propriété que, dans l'équilibre électrique, les actions élémentaires sur un point intérieur se détruisent deux à deux.

Forestier. — Note sur les équations d'une même courbe en coordonnées polaires par rapport au même axe. (240-241).

Landré (*Corneille-L.*). — Remarques sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables. (241-245).

Pellet (A.-E.). — Sur les équations de degré premier solubles par radicaux. (245-249).

L'auteur démontre, par des considérations purement algébriques, le théorème de Galois relatif aux équations de degré premier solubles par radicaux, en appliquant la méthode qu'il a développée, en 1878, dans sa thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris.

Dewulf et *Schoute (P.-H.).* — Déterminer une courbe unicursale du quatrième ordre ayant des points doubles en A_1 et A_2, et passant par les sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. (249-253).

Appell (P.) — Sur certaines équations différentielles linéaires contenant un paramètre variable. — Sur des polynômes satisfaisant à une équation différentielle du troisième ordre. (253-260).

Dans le premier paragraphe de ce Mémoire, l'auteur étudie les fonctions satisfaisant à une équation linéaire de la forme

$$A_0 \frac{d^p y}{dx^p} + A_1 \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} + \ldots + A_p y = my,$$

où $A_0, \ldots, A_p$ sont des fonctions données de x, et m un paramètre variable. Il considère plus particulièrement le cas où $m = 3$, et il généralise sous certaines hypothèses des formules bien connues relatives aux polynômes de Legendre et de Jacobi.

Dans la seconde Partie, M. Appell considère les polynômes qui naissent de la série

$$\sum \frac{a\ldots(a+n-1)\, b\ldots(b+n-1)\, c\ldots(c+n-1)}{1.2\ldots n\ldots d\ldots(d+n-1)\, e\ldots(e+n-1)}\, x^n,$$

lorsque c est égal à un nombre entier négatif.

Marsilly (L.-J.-A. de C. de). — Mémoire sur une méthode de calcul appropriée aux corps discontinus qui obéissent à des actions à distance. (261-273).

Escary. — Valeur finale de la fonction Y_n pour des valeurs indéfiniment croissantes de l'entier n. (274-278).

La forme en intégrale définie sous laquelle Jacobi a mis la fonction Y_n de Laplace permet d'obtenir la valeur finale de ce polynôme pour des valeurs croissantes de n.

Brioschi (F.). — Recherches sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (278-283).

Applications de la théorie des formes à celle des équations linéaires selon les méthodes que la Science doit à M. Brioschi.

Hermary. — Sur le jeu du Solitaire. (284-295).

L'auteur se propose de simplifier la théorie de ce jeu si difficile, donnée par Reiss dans le *Journal de Crelle,* et, après lui, par M. Ruchonnet dans le t. III de la *Correspondance mathématique.*

9e Session (Reims); 1880.

Gilbert (Ph.). — Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. (61-65).

Schoute (P.-H.). — Sur une transformation géométrique et sur la généralisation d'un problème de la théorie des enveloppes dites « courbes de sûreté ». (65-72).

M. Schoute se propose de déterminer l'enveloppe des ellipses obtenues comme mouvement régi par une attraction centrale proportionnelle à la distance du mobile au centre d'attraction, en supposant que l'on fasse varier la direction, mais non la grandeur de la vitesse initiale. Cette enveloppe est une ellipse.

Les différentes ellipses considérées sont les projections obliques d'un même cercle, ce qui conduit M. Schoute à étudier les progressions d'une courbe donnée sur un plan et les enveloppes sous certaines conditions.

Catalan (E.). — Sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies. (73-78).

Soit

$$y_p = 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \ldots + n^p x^{n-1} + \ldots,$$
$$P_p = y_p (1-x)^{p+1};$$

on a

$$\frac{P_p}{(1-x)^p} = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{-e^{-\cos\varphi} + (1+x)\cos(\sin\varphi) - x e^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} \cos p\varphi\, d\varphi,$$

$$y_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} \sin p\varphi\, d\varphi.$$

M. Catalan s'occupe ensuite de l'expression des sommes des puissances de la suite des nombres naturels et des nombres de Bernoulli par des intégrales définies.

Collignon (É.). — Sur les polygones inscriptibles. (78-91).

Application de la Statique à la démonstration de ce théorème bien connu : *De tous les polygones qu'on peut construire dans un plan avec des côtés donnés, le plus grand est celui qui est inscriptible dans le cercle.*

Longchamps (G. de). — Sur les séries récurrentes proprement dites et sur un théorème de Lagrange. (91-96).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur les équations à trois et à quatre périodes des racines de l'unité. (96-98).

Gilbert (*Ph.*). — Mouvement d'un point pesant sur un cercle tournant autour d'un axe vertical. (98-104).

Un cercle tourne avec une vitesse angulaire constante ω', autour d'un axe vertical ST situé dans son plan; trouver le mouvement d'un point pesant de masse m, assujetti à se mouvoir sans frottement sur le cercle.

Collignon (*É.*). — Observations sur un système particulier de cartes d'égale superficie. (104-114).

Le système considéré est ainsi défini : on appelle L la longitude et λ la latitude d'un point quelconque de la sphère, x et y les coordonnées rectangulaires correspondantes de la carte, et l'on pose, en considérant le rayon de la sphère comme égal à l'unité,

$$x = \mathrm{L}, \qquad y = \sin\lambda.$$

Longchamps (*G. de*). — Sur les fonctions récurrentes du troisième degré. (115-117).

a, b, c étant les racines de l'équation

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0,$$

on pose $abc = r$, et l'on cherche à calculer les fonctions D_n, E_n, S_n, définies comme il suit :

$$r^n \mathrm{D}_n = (a^n + b^n)(b^n + c^n)(c^n + a^n),$$

$$r^n \mathrm{E}_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}\,\frac{b^n - c^n}{b - c}\,\frac{c^n - a^n}{c - a},$$

$$\mathrm{S}_n = a^n + b^n + c^n.$$

La méthode employée consiste principalement à transformer une fonction de trois lettres en une fonction de deux lettres seulement.

Catalan (*E.*). — Sur la quadrature des courbes paraboliques. (118-120).

Laquière. — Théorie géométrique des courbes anallagmatiques, sections planes de la cyclide. (121-131).

Application de la Géométrie euclidienne à la démonstration des propriétés connues des courbes anallagmatiques.

Laquière. — Construction nouvelle du cercle coupant trois cercles donnés et de la sphère coupant quatre sphères données, sous des angles respectivement déterminés. Enveloppe de la sphère variable coupant trois sphères fixes sous des angles donnés respectivement constants. (132-135).

Cayley (*A.*). — Note sur la théorie des courbes de l'espace. (135-139).

La courbe unicursale d'ordre $2p$ dépend de $8p$ constantes. Elle est donc déterminée si l'on se donne $4p$ points. Mais, ces $4p$ points étant donnés, la courbe n'est pas déterminée uniquement; par exemple, pour $p = 2$, c'est-à-dire pour une courbe quartique de seconde espèce, ou, autrement dit, pour une excubo-quartique, le nombre des courbes est égal à 4. M. Cayley se propose ici de traiter la question analytiquement, mais encore dans un cas particulier pour la position des huit points que l'on se donne.

Marsilly (*L.-J.-A. de C. de*). — Note sur la communication du mouvement dans un milieu rationnellement distribué. (140-150).

Stephanos (*C.*). — Sur quelques systèmes de surfaces du second degré, dont les deux systèmes de droites appartiennent à deux complexes linéaires. (150-156).

Les systèmes considérés sont les uns composés d'un nombre doublement infini de surfaces du second degré ayant quatre points et quatre plans tangents communs, les autres sont composés d'un nombre simplement infini de surfaces du second degré ayant huit points et huit plans tangents communs.

Schoute (*P.-H.*). — De la transformation conjuguée dans l'espace. (156-179).

Considérons dans l'espace des éléments qui, pris chacun avec son degré déterminé de multiplicité, représentent un nombre de $\frac{n(n^2+6n+11)}{6} - 3$ conditions pour chaque surface de l'ordre n qui y passe; ces surfaces F_n constituent un système triplement infini, c'est-à-dire un système linéaire. Si, de plus, on choisit ces éléments, cette base du système, en sorte que trois surfaces F_n, qui n'appartiennent pas au même faisceau, passent encore par deux points qui n'appartiennent pas à la base, les surfaces qui passent par un point p passeront par un second point p' qui se déplace quand on fait mouvoir le point p. M. Schoute étudie la correspondance birationnelle en involution qui se trouve ainsi définie.

Lemoine (*Em.*). — Questions de probabilités et valeurs relatives des pièces du jeu des échecs. (179-183).

Lemoine (*Em.*). — Questions de probabilités. (183-184).

On range, au hasard, dans leur boîte, les seize petits cubes du jeu du taquin; quelle est la probabilité qu'un des cubes occupera dans la boîte le rang que marque le chiffre écrit sur ce cube?

Lemoine (*Em.*). — Théorème de Géométrie. (184).

Soient ABC un triangle; A'B'C' le triangle formé en joignant entre eux les points de contact A'B'C' du cercle inscrit à ABC avec les côtés; de A'B'C' on déduit par le même procédé un triangle A″B″C″, et ainsi de suite. Démontrer que l triangle $A^nB^nC^n$ tend à devenir équilatéral quand n croît indéfiniment.

Landry (*F.*). — Méthode de la décomposition des nombres en facteurs premiers. (185-189).

La méthode présentée par M. Landry dans cette Note s'applique aux nombres peu considérables (de six chiffres au plus). Avec des nombres plus grands, les calculs deviendraient par trop prolixes.

Smith. — Sur l'équation à six périodes. (190-191).

Guccia (*J.*). — Sur une classe de surfaces, représentables, point par point, sur un plan. (191-200).

M. Guccia s'occupe dans cette Note des surfaces qui possèdent deux droites multiples qui ne se coupent pas, et dont les ordres de multiplicité ont une somme égale à l'ordre de la surface diminuée d'une unité. Telles sont : la surface générale du troisième ordre, la surface du cinquième ordre à deux droites doubles qui ne se coupent pas [Clebsch, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (*Math. Annalen*, vol. I). — Cremona, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (*Rendiconti dell' Istituto Lombardo*, IV_2, fascicule 9)].

L'auteur détermine les conditions qui doivent être données dans le plan pour que la surface ainsi représentée soit déterminée; il étudie enfin les courbes tracées sur la surface.

Henry (*Ch.*). — Sur divers points de la théorie des nombres. Remarques historiques. (201-207).

1. Une assertion fausse et une rectification de Fermat.

On sait que Fermat avait cru que les nombres de la forme $2^{2^n}+1$ étaient premiers. On croyait que Euler, le premier, avait démontré que cette proposition était fausse en trouvant que $2^{2^5}+1$ est divisible par 641. M. Ch. Henry a trouvé, dans une lettre de Torricelli à Carcavi, ce passage relatif à la question proposée : *Præterea non tam plausibile mihi videbatur inventum illud.*

2. Sur une méthode de décomposition des grands nombres.

Le procédé dont il s'agit repose sur le théorème suivant :

Si un nombre impair est premier, il est, et d'une seule manière, la différence de deux carrés entiers.

Cette méthode est déjà signalée dans le *Dictionnaire des Mathématiques* de Montferrier (art. *Nombre premier*); elle a reçu de notables perfectionnements grâce aux travaux de MM. Aurifeuille, Landry, Le Lasseur et Lucas.

3. Sur une formule de décomposition

$$2^{4i+2}+1=(2^{2i+1}+2^{i+1}+1)(2^{2i+1}-2^{i+1}+1).$$

Cette formule, retrouvée et employée par M. Le Lasseur, existe déjà : 1° dans les manuscrits de Sophie Germain (manuscrit 9118 des fonds français de la Bibliothèque nationale, p. 84); et même 2° dans les œuvres de Nicolas de Béguelin (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1772, p. 296, et 1777, p. 255).

Escary. — Intégration, sous forme finie, des formules de Fresnel relatives à l'intensité et à l'anomalie, dans sa théorie de la diffraction de la lumière. (207-222).

Glaisher (J.-W.-L.). — Une identité trigonométrique. (222-223).

Glaisher (J.-W.-L.). — Sur quelques équations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques. (223-224).

Salanson (A.). — Nouvelle application des méthodes Lalanne pour le calcul des expériences photométriques. (225-227).

Catalan (E.). — Sur une décomposition en facteurs. (228-229).

1° $$\begin{cases} (2r)^{4k+2} + 2(q-r)(2r)^{2k+1} + q^2 \\ = [(2r)^{2k+1} + (2r)^{k+1} + q][(2r)^{2k+1} - (2r)^{k+1} + q]; \end{cases}$$

2° La formule précédente, pour $r = q = 1$, devient la formule de M. Le Lasseur

3° $$3^{6k+3} + 1 = (3^{2k+1} + 1)(3^{2k+1} + 3^{k+1} + 1)(3^{2k+1} - 3^{k+1} + 1).$$

Casey (J.). — Sur les équations des cercles circonscrits ou inscrits à des polygones plans et sphériques. (230-238).

Desboves (A.). — Sur la résolution en nombres entiers ou complexes de l'équation $U^n \pm V^n = S^n + W^n$. (239-243).

Les cas où $n = 2$ ou 3 sont bien connus. Passant au cas de $n = 4$, on a l'équation

$$U^4 = V^4 + S^4 + W^4,$$

qu'Euler considère comme impossible; mais jusqu'ici l'impossibilité n'a pas encore été démontrée. Il n'en est plus de même de l'équation

$$U^4 + V^4 = S^4 + W^4;$$

on a comme solutions :

$$\begin{aligned}
U &= (x^2+y^2)(2x^5 - yx^4 + 2y^2x^3 + 18y^3x^2 - y^5) + 8xy^2(2x^4+y^4), \\
V &= (x^2+y^2)(x^5 - 18y^2x^3 + 2y^3x^2 + y^4x + 2y^5) + 8x^2y(x^4 + 2y^4), \\
S &= (x^2+y^2)(2x^5 + yx^4 + 2y^2x^3 - 18y^3x^2 + y^5) + 8xy^2(2x^4+y^4), \\
W &= (x^2+y^2)(-x^5 + 18y^2x^3 + 2y^3x^2 - y^4 + 2y^5) + 8x^2y(2x^4+y^4).
\end{aligned}$$

Pour $x = 1$, $y = 3$,

$$59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4,$$

solution bien plus simple que celle donnée par Euler dans les *Mémoires de Saint-Pétersbourg*

$$477069^4 + 8947^4 = 310319^4 + 428397^4.$$

M. Desboves termine par quelques considérations générales et par la solution en nombres complexes de l'équation

$$U^5 + V^5 = S^5 + W^5.$$

Laquière. — Des carrés doublement magiques. (243-254).

Laquière. — Note sur une amusette arithmétique. (255-257).

Placer un certain nombre des entiers naturels consécutifs aux points d'intersection d'une série de circonférences concentriques avec une série de diamètres, ainsi qu'au centre, de telle sorte que la somme des termes contenus, soit sur une même circonférence, soit sur un même diamètre, reste toujours la même.

Schoute (P.-H.). — Sur l'évaluation d'une intégrale définie par la théorie des probabilités. (258-262).

La résolution de ce problème : *Quelle est la probabilité pour qu'une droite, qui coupe un cercle donné, coupe encore un autre cercle donné dans le même plan,* permet, en employant deux marches différentes, d'évaluer l'intégrale

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \arcsin\frac{R}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\theta}}\,d\theta.$$

On trouve

$$\frac{1}{\pi r}\left[(R+r)\arcsin\frac{R+r}{a}-(R-r)\arcsin\frac{R-r}{a}\right.$$
$$\left.+\sqrt{a^2-(R+r)^2}-\sqrt{a^2-(R-r)^2}\right].$$

NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE, RÉDIGÉE PAR M. E. CATALAN, AVEC LA COLLABORATION DE MM. MANSION, LAISANT, BROCARD, NEUBERG ET ÉD. LUCAS [1].

Tome V; 1879.

Brocard (H.). — Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers. (1-7, 33-39, 65-71, 113-117, 263-269).

Aperçu historique, d'après S. Günther, *Ziele und Resultäte der neueren mathematisch-historischen Forschungen* (Erlangen, 1876), complété par des recherches de l'auteur. Travaux de Gauss, Eisenstein, Schlömilch, Dirichlet, Serret, Le Besgue, Tchebychef. Notes par M. Catalan, où il signale, entre autres choses, une erreur de M. Curtze relativement à la série de Lambert.

Realis (S.). — Note sur quelques équations indéterminées. (Fin, *voir* t. IV, p. 325, 346, 369). (8-11).

---

(1) Voir *Bulletin*, 1re série, t. VIII, p. 217; t. X, p. 146; 2e série, t. I, p. 269; t. II, p. 111; t. IV, p. 56. La *Nouvelle Correspondance mathematique* paraissait mensuellement par livraison de deux ou trois feuilles. Le prix d'abonnement était : 10 fr. pour la Belgique, 12 fr. pour l'Union postale. Ce Recueil est remplacé, depuis 1881, par un autre intitulé *Mathesis* (*voir* ci-dessous, p. 189).

Lucas (*Éd.*). — Questions de Géométrie élémentaire. (12-13).

Démonstration de plusieurs propositions élémentaires, et, en particulier, de la suivante, très remarquable, dont la première Partie appartient à Steiner. Si les diagonales d'un octaèdre se coupent à angle droit, les projections du point de concours A des diagonales sur les faces de l'octaèdre sont situées sur une sphère; les perpendiculaires abaissées de A sur chacune des faces rencontrent les faces opposées en huit points situés sur la même sphère.

Mansion (*P.*). — Démonstration élémentaire de la formule de Stirling, d'après M. J.-W.-L. Glaisher, F. R. S. (44-53).

Laisant (*C.-A.*). — Sur le polarimètre polaire de M. Amsler. (Suite, *voir* t. IV, p. 57). (71-76; 107-121).

Le Paige (*C.*). — Sur la multiplication des déterminants. (76-79).

Jamet (*V.*). — Sur la multiplication des déterminants. (79-81).

Van Aubel (*H.*). — Sur les courbes du troisième degré. (81-87).

Mansion (*P.*). — Remarques sur les théorèmes arithmétiques de Fermat. (88-91; 122-125).

Fermat a déclaré en 1640 et en 1654 qu'il ne parvenait pas à démontrer que 2^n+1 est toujours premier quand $k=2^n$. On ne peut donc pas dire qu'il s'est trompé relativement à cette proposition empirique.

Catalan (*E.*). — Quelques identités. (91-94).

Le produit de deux nombres par leur somme ne peut être un cube. Si

$2p=a+b+c$, on a $a^2+b^2+c^2=p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2$.

Si n_p est le $(p+1)$ coefficient binomial dans $(1+x)^n$, on a, d'après M. E. Cesàro,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}=n_1-\frac{1}{2}n_2-\frac{1}{3}n_3-\dots-(-1)^n\frac{n_n}{n}.$$

Bombled. — Sur la série $1+2^px+3^px^2+\dots$. (95-97).

Realis (*S.*). — Question d'analyse indéterminée. (126-128).

L'équation

$$z_1^3+z_2^3+\dots+z_n^3=(5n+3)z^3$$

est toujours résoluble d'une infinité de manières, en nombres entiers positifs ou négatifs.

Catalan (*E.*). — Sur une suite de nombres impairs. (128-129).

De Longchamps (*G.*). — Sur les conchoïdales. (145-149).

Par un point A pris sur une courbe F, menons une tangente AI coupant deux autres courbes en B, C. Portons sur la tangente AI une longueur AI = BC. Le lieu du point I est une *conchoïdale*. Tracé de la tangente à la cissoïde, à la strophoïde, à la lemniscate, au limaçon de Pascal, etc., considérés comme des conchoïdales.

Realis (*S.*). — Théorèmes d'Arithmétique. (150).

Jamet (*V.*). — Sur la Géométrie de la sphère. (151-156).

Théorie des transversales.

Laisant et *Beaujeux*. — Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson. (156-160; 177-182).

Soit p un nombre premier, q un entier $< p-1$. On a

$$(1.2.3\ldots q)[1.2\ldots(p-q+1)]+1 = \text{multiple de } p.$$

Conséquences nombreuses.

Lucas (*É.*). — Problèmes sur les normales à l'ellipse. (161-165).

Catalan (*E.*). — Un problème traité par Euler. (169).

Lucas (*É.*). — Sur l'analyse indéterminée biquadratique. (183-186).

Soit à résoudre l'équation indéterminée $y^2 = f(x)$, en nombres rationnels, $f(x)$ étant une fonction du quatrième degré à coefficients rationnels. On posera

$$y\varphi(x) = F(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de degré p, où x^p a pour coefficient l'unité, $F(x)$ une fonction de degré $p+2$. On devra avoir

$$[F(x)]^2 = f(x)[\varphi(x)]^2,$$

équation de degré $2p+4$ contenant $2p+3$ coefficients inconnus. Si l'on connaît $2p+3$ solutions rationnelles de $y^2 = f(x)$, cette équation de degré $2p+4$ servira à en trouver une de plus.

Dostor (*G.*). — Centre de gravité du périmètre d'un quadrilatère quelconque. (187-188).

Starkof. — Sur l'intégration des équations linéaires. (225-230).

Chadu. — Sur le cercle des neuf points. (230-232).

Neuberg (*J.*). — Sur la courbure des lignes. (233-234).

Ribaucour (*A.*). — Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères. (257-263; 305-315; 337-343; 385-393; 417-425).

Première Partie. — I. De tous les points d'une courbe donnée, on décrit des cercles de rayons fonctions de la position de ce point. L'enveloppe de ces cercles a deux branches dont les points correspondants sont réunis par une *ligne de contact* perpendiculaire à la tangente à la courbe donnée, au centre du cercle variable et distante de ce centre d'une quantité a donnée par la formule

$$a\,ds = r\,dr,$$

ds étant la différentielle de l'arc de la courbe primitive. On conclut de cette formule, par exemple, les théorèmes suivants :

1° *Les cordes de contact des cercles concentriques aux premiers et tels que l'on ait*

$$r'^2 = r^2 + \text{const.}$$

sont les mêmes que pour les premiers.

2° *Si* $r = \rho$, *rayon de courbure de la courbe primitive, la corde de contact passe par le centre de courbure de sa développée.*

3° *Si* $r = \delta$, δ *étant la distance comptée depuis la courbe donnée jusqu'à une seconde courbe, dans une direction fixe, la corde de contact, relativement au cercle de rayon* r, *ayant son centre en* A, *a pour pôles le point* S *d'intersection des tangentes en* A *à la courbe lieu des centres et en* B *point correspondant de la deuxième courbe.*

4° *Étant données deux courbes* A, B, *si l'on prend pour* r *la distance entre un point de* B *et le point où la tangente en* B *coupe* A, *la série des cercles* r *sera orthogonale à la courbe* B ; *la corde de contact, dans ce cas, passe par le centre de courbure de* B *au point considéré. La corde de contact a une enveloppe touchée par chaque corde en un point situé en ligne droite avec les centres de courbure des deux branches de l'enveloppe des cercles aux points où elles sont rencontrées par cette corde.*

II. Déformons la ligne des centres (A), de manière à en faire une droite (D) tangente en A à (A). Soient (e), (e') les enveloppes des cercles relatives à la droite (D) ; (E), (E′) les enveloppes de (e), (e'), quand on fait rouler (A) sur (D); c, c', C, C′ les centres de courbure de (e), (e'), (E), (E′). On aura le théorème suivant :

Lorsque l'on déforme la ligne des centres (A), *en la laissant tangente à* (D) *au point* A, *la droite qui joint les centres de courbure* C, C′ *passe par un point fixe de* (D) *et rencontre la normale à la développée de* (A) *en un point dont la distance à la normale en* A *à* (A) *est constante pendant la déformation.*

III. Propriétés relatives de plusieurs séries de cercles, dont les rayons sont dans un rapport constant.

IV. Si l'on déforme la ligne des centres (A) dans une portion de sa longueur, la somme algébrique des deux arcs correspondants de l'enveloppe reste constante.

V. Propriété analogue pour l'aire comprise entre les deux branches de l'enveloppe et les cordes de contact extrêmes.

VI. Propriétés relatives aux centres de gravité, dans le cas étudié § III.

Deuxième Partie. — Extension des résultats précédents aux enveloppes de sphères.

Neuberg (*J.*). — Sur les triangles homologiques (270-275).

Lévy (*L.*). — Exposition des premières propriétés des surfaces du second degré. (276-278; 321-323; 348-350).

Neuberg (*J.*). — Sur les tétraèdres homologiques. (315-320).

Brocard (*H.*). — Propriété du triangle. (323-325; 343-347; 393-397; 425-430).

Catalan (*E.*). — Une propriété du nombre 365. (325).

Neuberg (*J.*). — Sur la cycloïde. (351-355).

Une cycloïde peut être engendrée de la manière suivante : un point A se meut avec une vitesse v sur une droite D; autour de ce point A tourne une droite E avec une vitesse angulaire v'; le point B situé sur E à une distance AB $=$ R telle que $v'\mathrm{R} = v$, engendre une cycloïde; les autres points de E engendrent des cycloïdes allongées ou raccourcies. Le mouvement de E est dit cycloïdal. Toute droite qui a un mouvement cycloïdal à l'un de ses points engendre une cycloïde, tandis que tous les autres engendrent des cycloïdes allongées ou raccourcies. On trouve aisément que la normale, la tangente à la cycloïde, une droite faisant un angle constant sont animées d'un mouvement cycloïdal.

Mansion (*P.*). — Principes de la théorie des développoïdes des courbes planes. (356-363; 398-397).

Brocard (*H.*). — Notes sur les questions de mathématiques du Concours de l'École Polytechnique. (364-370).

Mansion (*P.*). — Esquisses biographiques : J. Booth. (375).

De Longchamps (*G.*). — Sur les cubiques unicursales. (403-408).

Catalan (*E.*). — Sur la décomposition d'un cube en quatre cubes. (409-411).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Multiplication de deux séries convergentes. (430-432).

Traduit du danois du *Journal de Zeuthen,* 1879, p. 95-96. On peut multiplier deux séries convergentes, d'après la règle habituelle, même si la série des modules de l'une d'elles n'est pas convergente.

Realis (*S.*). — Questions d'analyse numérique. (433-435).

Catalan (*E.*). — Sur une épure de Géométrie descriptive. (435-437).

BIBLIOGRAPHIE. (14-18 ; 205-209 ; 255).

CORRESPONDANCE. (18-22 ; 103 ; 166-168 ; 195-201 ; 235-238 ; 279 ; 370-374 ; 437-448).

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES. (23-30 ; 53-64 ; 103-109 ; 130-142 ; 169-176 ; 209-219 ; 242-254 ; 280-299 ; 326-335 ; 376-381 ; 412-416 ; 449-451).

QUESTIONS PROPOSÉES. (31-32 ; 64 ; 110-112 ; 142-144 ; 176 ; 201-205 ; 209-224 ; 256 ; 300-303 ; 335-336 ; 381-384 ; 451-454).

EXTRAITS ANALYTIQUES. (97-100 ; 188-194).

VARIÉTÉS. (101-102 ; 144-197 ; 239-242 ; 438-449).

RECTIFICATIONS. (144 ; 150 ; 198 ; 224 ; 303-304 ; 344 ; 416).

TABLE DES MATIÈRES. (455-564).

Tome VI; 1880.

Ribaucour (*A.*). — Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères. (Fin). (1-8).

Voir t. V, p. 257, 305, 337, 385, 417.

Neuberg (*J.*). — Sur le nombre des sphères qui touchent quatre plans donnés. (8-18).

Discussion complète, par la Géométrie seule, de tous les cas qui peuvent se présenter. Il y a huit sphères au maximum, mais ce nombre peut se réduire.

Brocard (*H.*). — Propriété du triangle. (19-23, 97-100).

Suite, *voir* t. V, p. 323, 343, 393, 425.

Saltel (*L.*). — Application du théorème de Rolle à la théorie de l'osculation. (24-30).

Catalan (*E.*). — Sur un système d'équations linéaires. (30-32).

Catalan (*E.*). — Sur quelques développements de $\cos mx$ et de $\sin mx$. (100-105).

Neuberg (*J.*). — Propriétés de l'ellipse. (105-109).

Laisant (*A.*). — Généralisation d'une formule de M. Catalan. (109-111).

Realis (*S.*). — Remarque sur une équation indéterminée. (111-113).

Dubois (*E.*). — Sur le théorème des faisceaux. (114-118).

Cesaro (*E.*). — Sur l'existence de certains polyèdres. (118-119).

Il n'y a que cinq espèces de polyèdres dont tous les angles solides ont le même nombre d'arêtes et les faces le même nombre de côtés. Ce sont le tétraèdre, l'hexaèdre à faces quadrilatères, l'octaèdre et l'icosaèdre à faces triangulaires, le dodécaèdre à faces pentagonales.

Catalan (*E.*). — Sur l'intégrale $\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$. (151-155).

On arrive à la substitution d'Euler qui rend la différentielle rationnelle, par les substitutions naturelles

$$x = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi, \quad \sin\varphi = z, \quad z = \sqrt{2}\sin\theta.$$

Le Paige (*C.*). — Sur une propriété des déterminants hémisymétriques d'ordre pair. (155-158).

Dubois (*E.*). — Sur une famille de courbes cycloïdales. (158-165).

Neuberg (*J.*). — Exercices de Mathématiques élémentaires. (165-168; 215-216; 364-365).

Wassilief. — Esquisse biographique. Alexandre Popof. (169).

Desmartres. — Sur les surfaces à génératrices circulaires. (193-201, 300-305, 337-341).

Les normales aux différents points d'une surface engendrée par un cercle, le long d'une de ces génératrices circulaires, rencontrent, outre l'axe de cette génératrice, une conique fixe qui peut servir à construire ces normales. Les surfaces dont les génératrices circulaires sont les lignes géodésiques sont la sphère et le cylindre.

Catalan (*E.*). — Des coniques satisfaisant à quatre conditions. (201-206).

Brocard (*H.*). — Note sur divers articles de la *Nouvelle Correspondance*. (206-215).

Neuberg (*J.*). — Sur les normales à l'ellipse. (241-250, 289-299).

Résumé extrêmement bien fait de la théorie des normales aux coniques, contenant des démonstrations et des propositions nouvelles.

Lucas (*É.*). — Sur l'extension du théorème de Descartes. (250-253).

Les théorèmes de M. Laguerre sur la limite supérieure du nombre des racines supérieures à une quantité a sont démontrés par M. Lucas, comme Segner et Gauss ont démontré celui de Descartes.

Catalan (*E.*). — Remarques sur une série. (253-255).

L'auteur établit d'une manière très simple la transformation de Clausen de la série de Lambert.

Brocard (*H.*). — Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers. (Suite, voir t. V.) (255-263, 481-488, 529-542).

Recherches de Piarron de Mondesir, Meissel, Riemann, Genocchi, Desboves, James Glaisher et J.-W.-L. Glaisher.

Realis (*S.*). — Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell. (306-312, 342-350).

Cesaro (*E.*). — Sur la série harmonique. (312-314).

La somme des n premiers termes de la série harmonique est comprise entre ln et $ln+\frac{1}{2}$. (Démonstration élémentaire.)

Laquière. — Théorie géométrique des courbes anallagmatiques, sections planes de la cyclide. (351-354, 402-406, 453-432).

Cesaro. — Une démonstration de la formule de Stirling. (354-357).

Simplification de la méthode exposée t. V, p. 44.

Mansion (*P.*). — Dérivée des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. (358-364, 385-396).

Catalan (*E.*). — Sur la quadrature des courbes paraboliques. (396-402).

Démonstration très simple du théorème de Gauss.

Landry. — Décomposition de $2^{64}+1$. (417).

Le Lasseur. — Autres décompositions. (417-418).

Décomposition de nombres très grands en leurs facteurs; 2918000731816531 est premier.

Catalan (*E.*). — Sur la cyclide. (439-446).

Résumé des propriétés de cette surface en suivant autant que possible la marche indiquée par Dupin.

Realis (*S.*). — Problème d'analyse indéterminée.

Carnoy (*J.*). — Théorèmes sur les coniques.

Cesaro (*E.*). — Quelques formules. (450-452).

Catalan (*E.*). — Sur une propriété des surfaces du second degré. (489-490).

Le Paige (*C.*). — Sur quelques propriétés des déterminants. (489-496).

Déterminants de déterminants.

Laquière. — Observations sur la question 229.

Sur les quadrilatères articulés.

Cesaro (*E.*). — Sur les formes approchées des solides d'égale résistance. (502-503).

Radicke (*A.*). — Démonstration du théorème de v. Staudt et de Clausen. (503-507).

Radicke (*A.*). — Démonstration d'un théorème de Stern. (507-509).

Cesaro (*E.*). — Une question de maximum traitée par Poncelet. (548-551).

Berger. — Quelques théorèmes extraordinaires. (551-552).

Catalan (*E.*). — Un nouveau théorème empirique. (552-553).

La somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres naturels ou neuf fois cette somme est décomposable en trois carrés entiers et positifs.

Bibliographie. — (217-219, 315-317).

Correspondance. — (32-44, 119-122, 170-175, 219-228, 263-264, 317-325, 366-370, 408-417, 453-463, 509-512).

Solutions des questions proposées. — (48-93, 122-140, 176-191, 229-237, 325-333, 370-383, 418-424, 463-475, 513-525, 554-562).

MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par P. MANSION, Professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, Professeur à l'École des Mines de Liège. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars (²).

Mansion (*P.*). — Démonstration élémentaire du théorème de Taylor pour les fonctions d'une variable imaginaire. (3-6).

Démonstration élémentaire de la formule

$$fZ = fz_0 + \frac{Z - z_0}{1} f' z_0$$
$$+ \frac{(Z - z_0)^2}{1.2} f'' z_0 + \ldots + \frac{(Z - z_0)}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)} z_0 + \int_{z_0}^{Z} \frac{(Z - z)^{n-1} f^n z \, dz}{1.2\ldots(n-1)},$$

où z est de la forme $x + y\sqrt{-1}$. De la forme du reste ici indiquée, on déduit celle de M. Darboux et celle de M. Falk. Cette dernière forme du reste, qui suffit pour établir complètement la théorie des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire, est aussi obtenue en ne s'appuyant que sur le théorème de Rolle, donc sans Calcul intégral.

(¹) Ce Volume est le dernier de la *Nouvelle Correspondance*. M. Catalan avait su grouper autour de lui des collaborateurs zélés. Son action avait été féconde. Il est regrettable qu'il ait été conduit à cesser la publication de son intéressant Recueil.

(²) *Mathesis* fait suite à la *Nouvelle Correspondance mathématique*, mais a un caractère un peu plus élémentaire. Ce Recueil paraît par livraisons mensuelles de 16 ou 24 pages in-8. Le prix d'abonnement est : 7 fr. 50 c. pour la Belgique; 9 fr. pour l'Union postale. Le Tome I contient VIII-228 pages et un Supplément de 64 pages.

Mansion (*P.*). — Généralisation d'une propriété des podaires. (7).

Neuberg (*J.*). — Questions de Mathématiques élémentaires. (7-10, 26-27).

Mansion (*P.*). — Sur un nouveau principe de Calcul des probabilités. (10).

Mansion (*P.*). — Sur l'évaluation approchée des aires planes. (17-22, 33-36).

Voir plus bas l'analyse du *Supplément*.

Mansion (*P.*). — Une nouvelle formule de Calcul différentiel. (23-25).

Formule de M. Teixeira donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction composée.

Hermite (*C.*). — Sur la série

$$\frac{1}{(\log 2)^n}+\frac{1}{(\log 3)^n}+\ldots+\frac{1}{(\log x)^n}+\ldots.$$

Cette série est divergente pour toute valeur de n. Autre démonstration par M. E. Catalan, p. 58; Note par M. Baehr sur la même série, p. 58.

Liebrecht (*E.*). — Discussion de l'équation du troisième degré. (28-29).

Verstraeten et *Mister*. — Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoïde à plan directeur. (49-51; 137-139).

Cette courbe est une hélice (Guillery) dont la tangente a la même inclinaison que celle des rayons lumineux.

Cesáro (*E.*). — Sur la série harmonique. (51-53; 143-144).

En ne s'appuyant que sur le développement en série de $\log(1+x)$, l'auteur établit les inégalités suivantes, où H_n désigne la somme

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

C la constante d'Euler :

$$\log\left(n+\frac{1}{2}\right)+0,57 < H_n < \log\left(n+\frac{1}{2}\right)+0,60,$$

$$H_n = l\sqrt{n(n+1)}+C+\frac{\theta}{6n(n+1)},\quad 0<\theta<1.$$

Ruex (*P.*) et *Neuberg* (*J.*). — Sur un lieu géométrique. (55-57).

Lieu géométrique des points de rencontre des tangentes communes à deux coniques, l'une mobile d'une certaine manière.

Lucas (*É.*). — Notes de Géométrie analytique. (65-66).

Démonstrations très simples des théorèmes suivants :

Si trois points d'une droite demeurent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point décrit un ellipsoïde; si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre, un cinquième point décrit une ellipse et la droite reste parallèle à un cône de révolution.

Mansion (*P.*). — Sur une intégrale définie. (67-70).

Günther (*S.*). — Note sur la logocyclique ou strophoïde. (81-84).

Tangente; aire; longueur d'un arc exprimée au moyen d'un arc d'hyperbole équilatère et d'un arc de lemniscate.

Barbarin. — Puissance d'un point par rapport à une conique à centre. (85-87).

Gilbert (*Ph.*). — Exercice de Géométrie infinitésimale. (97-99).

Cesáro (*E.*). — Démonstration élémentaire et généralisation de quelques théorèmes de M. Berger. (99-102).

Voici quelques-uns de ces théorèmes :

Pour $n = \infty$, *la moyenne de la somme des diviseurs d'un nombre entier est* $\frac{1}{6}n\pi^2$; *celle des inverses des diviseurs,* $\frac{1}{6}\pi^2$. M. Cesáro donne un principe général qui permet de trouver la valeur d'un grand nombre de moyennes analogues.

Neuberg (*J.*). — Sur les figures semblables. (106-108).

D'Ocagne (*M.*). — Partage des polygones. (109-110).

Catalan (*E.*). — Carré magique de la villa Albani. (121).

Brocard (*H.*). — Ecole Polytechnique de Paris. Concours de 1881. (122-123).

Neuberg (*J.*). — Sur une application de l'Algèbre directive. (123-127).

Lucas (*É.*). — Questions d'Arithmétique. (134).

Mansion (*P.*). — Sur la sommation de certaines séries, d'après M. E. Catalan. (139-142).

Séries ayant pour terme général une expression décomposable en fractions de la forme $\frac{A}{(x+k)(x+k+1)}$.

Neuberg (*J.*). — Sur le centre des médianes antiparallèles. (153-154; 173-176; 185-190).

Le point k du plan d'un triangle ABC, dont les distances aux côtés sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés, jouit d'une foule de propriétés qui le placent au nombre des points *remarquables* du triangle. M. J. Neuberg a réuni les théorèmes, déjà connus, concernant ce point (appelé *point de Grebe*, en Allemagne) et a ajouté quelques nouvelles propositions intéressantes.

Si x, y, z sont les distances d'un point quelconque aux côtés de ABC, k est le point pour lequel $x^2+y^2+z^2$ est minimum (Gauss); c'est aussi le centre des ellipses décrites par les points tels que $x^2+y^2+z^2$ reste constante (E. Cesàro).

Les droites AK, BK, CK, appelées par M. Lemoine *médianes antiparallèles*, sont symétriques des médianes de ABC par rapport aux bissectrices; elles partagent les côtés correspondants dans le rapport des carrés des côtés adjacents et passent par les intersections A', B', C' des tangentes menées par A, B, C à la circonférence ABC. K est le centre de gravité du triangle qui a pour sommets les projections de K sur les côtés de ABC.

Soient A_1, B_1, C_1 les projections de K sur les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés de ABC. Les triangles isoscèles A_1BC, B_1CA, C_1AB sont semblables; l'angle à la base vérifie la formule

$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C \text{ (Brocard).}$$

Les droites AC_1, BA_1, CB_1 se coupent en un même point ω; les droites BC_1, CA_1, CB_1 concourent en un second point ω'.

Les points ω, ω', que M. J. Neuberg appelle *points de Brocard*, du nom du géomètre qui les a considérés pour la première fois, sont les foyers d'une conique touchant les côtés de ABC aux pieds des médianes antiparallèles.

Le centre O de la circonférence ABC et les six points ω, ω', k, A_1, B_1, C_1 appartiennent à une même circonférence (cercle de Brocard), qui est le lieu des centres des médianes antiparallèles des triangles circonscrits à ABC et dont les côtés font un même angle avec un côté adjacent de ABC.

Les parallèles aux côtés du triangle A'B'C', menées par K et limitées respectivement par les angles A, B, C, sont égales entre elles (Lemoine); leurs extrémités sont situées sur une même circonférence et sont les sommets de deux triangles inscrits à ABC et ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de ABC. Ces mêmes points étant les sommets de trois rectangles inscrits à ABC, k est le point de concours des droites qui joignent les milieux des côtés de ABC aux milieux des hauteurs correspondantes.

Soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle formé par trois parallèles à BC, CA, AB, à des distances proportionnelles à ces côtés. Les côtés des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$, dont K est le centre de similitude, se coupent en six points d'une même circonférence dont le centre est sur la droite KO. Ces six points sont aussi sur le périmètre d'un triangle $\alpha''\beta''\gamma''$ homothétique à A'B'C' par rapport à K.

En particulier, les parallèles aux côtés de ABC, menées par K, rencontrent le périmètre de ABC en six points d'une même circonférence (Lemoine); les projections des pieds H_a, H_b, H_c, des hauteurs de ABC sur les côtés sont sur une même circonférence. Le centre de la dernière courbe est au milieu des droites joignant les droites H_a, H_b, H_c, aux points de concours des hauteurs des triangles AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aB_b.

Les centres des médianes antiparallèles des triangles ABC, $H_a H_b H_c$ sont en ligne droite avec l'intersection des hauteurs de ABC (Edm. van Aubel).

Mansion (*P.*). — Sur la série harmonique et la formule de Stirling. (169-172).

L'auteur établit les formules suivantes :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{\theta}{2n(2n+1)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

$$\log(1.2.3\ldots N) = \frac{1}{2}(C+1) + \left(N + \frac{1}{2}\right)\log N - \frac{\theta}{2},$$

en ne supposant connue que l'aire de l'hyperbole équilatère; C est la constante d'Euler.

Realis (*S.*). — Sur une somme de cubes. (176-177).

Jeřábek et *Neuberg*. — Sur un hexagone équilatéral, inscrit à un triangle donné. (191-193).

Biographie et bibliographie. — (11, 39-41. 70-71. 110-113, 144-145, 158-161, 178).

Notes mathématiques. — (58, 66-67, 87-89, 155-158).

Questions d'enseignement. — (103-106, 193-198).

Solutions de questions proposées. — (28-30, 42-47, 59-61, 71-78, 90-94, 113-118, 127-133, 145-151, 161-167, 179-183, 199-203).

Questions proposées. — (12-15, 30-31, 48, 62, 78-79, 95-96, 118-119, 135-136, 168, 184, 203-207).

Questions d'examen. — (16, 32, 63-64, 79-80, 119-120, 162).

Rectifications. — (32 ,48, 80, 88, 151).

Table des auteurs. — (208).

Supplément. — Sur l'évaluation approchée des aires planes; par M. P. Mansion. (1-64).

Parmi les formules vraiment pratiques pour le calcul des aires planes, il n'y en a que deux qui soient démontrées rigoureusement, savoir celle de Poncelet et celle de Parmentier; pour les autres et en particulier pour la plus exacte de toutes, celle de Simpson, on ne donne pas de limite supérieure et de limite inférieure de l'erreur qu'elles comportent, de sorte qu'au fond elles sont établies d'une manière purement empirique.

Dans le présent Mémoire, l'auteur obtient, d'une manière simple, et souvent de plusieurs manières, la *limite de l'erreur* et sa représentation géométrique, non seulement pour les formules de Parmentier et de Poncelet, mais aussi pour celle des trapèzes, pour les deux formules de Simpson, pour celles de Weddle, de Catalan et de Ch. Dupin, pour une formule inédite de Parmentier et pour une formule nouvelle. Il compare ensuite ces diverses formules au point de vue de leur exactitude relative, en supposant l'ordonnée de la courbe développable en série au moyen du théorème de Taylor, entre certaines limites plus ou moins rapprochées.

Le résultat le plus simple et le plus important est établi en ne s'appuyant que sur le premier Livre de Géométrie :

L'aire S *comprise entre une courbe dont la concavité est toujours tournée dans le même sens, deux ordonnées extrêmes et une base à laquelle elles sont perpendiculaires, est comprise entre celle d'un polygone inscrit dont les sommets sont des ordonnées équidistantes qui le décomposent en trapèzes de même hauteur, et ce polygone où les deux trapèzes extrêmes seraient remplacés par des rectangles de même hauteur, ayant pour bases respectivement la seconde et l'avant-dernière ordonnée des sommets du polygone.*

Analytiquement, avec les notations habituelles, $s = \int_{x_0}^{x_n} y\,dx$ est compris entre

$$h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-2}+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right),$$
$$h\left(\frac{y_1}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-2}+y_{n-1}+\frac{y_{n-1}}{2}\right).$$

Parmi les autres résultats obtenus, nous citons les suivants :

1° Parmi les formules expéditives, la plus exacte est celle de Parmentier.

2° Parmi les formules très exactes, mais peu expéditives, la meilleure est celle de Simpson :

$$S = \frac{h}{3}(A+4B),$$
$$A = \frac{y_0}{2}+y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}+\frac{y_{2m}}{2},$$
$$B = y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1},$$

quand le nombre des divisions de la base est pair. 3° L'aire à chercher est comprise entre l'aire $T = h(A+B)$ du polygone inscrit et la somme $M = 2hB$ des trapèzes circonscrits de Poncelet. La formule de Simpson peut s'écrire

$$S = \frac{1}{3}(2T+M);$$

par suite, l'erreur qu'elle comporte est inférieure à la plus grande des deux différences

$$\frac{1}{3}(2T+M)-T = \frac{h}{3}(B-A),\quad M-\frac{1}{3}(2T+M) = \frac{2h}{3}(B-A),$$

donc

$$\frac{2h}{3}(B-A),$$

résultat nouveau extrêmement simple. 4° Si le nombre des divisions de la base est impair, la formule de Simpson se transforme dans la formule de M. Catalan, qui est presque aussi exacte.

BULLETTINO di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni (¹).

Tome XII; 1879.

Favaro (Ant.). — Intorno alla vita ed alle Opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico padovano del secolo xv. (1-74, 115-251).

M. Favaro, dans son consciencieux travail, a voulu élever un monument durable à la gloire de Prosdocimo de' Beldomandi, son compatriote et l'un de ses plus anciens prédécesseurs à l'Université de Padoue. L'œuvre était difficile et laborieuse, et le savant professeur nous avoue que, perdant tout à fait courage, il aurait abandonné sa patriotique entreprise, sans les encouragements de ses amis, et surtout sans l'aide du prince Balthasar Boncompagni.

Prosdocimo, mathématicien, philosophe, astronome et musicien, enseignait l'astrologie à Padoue en 1422; il mourut en 1428, dans cette ville. On ne connaît pas la date de sa naissance, mais la conjecture la plus probable, c'est qu'il naquit de 1360 à 1370. Il écrivit en 1410 son *Tractatus Algorismi.* Cet Ouvrage, imprimé pour la première fois le 22 février 1483, à Padoue, ne contient pas un mot d'Algèbre; s'il assigne une place importante à Prosdocimo dans l'histoire de l'Arithmétique, il ne justifie donc nullement ce qu'a dit Montucla dans son *Histoire des Sciences mathématiques* (t. I, p. 537) qu'à Prosdocimo revenait l'honneur d'avoir été, avec Léonard de Pise, l'un des importateurs de la science algébrique en Europe. M. Favaro cite les dix Ouvrages suivants de Prosdocimo, tous relatifs à l'Astronomie : *Commentarium Sphæræ* (Commentaire sur le traité *De Sphaera* de Jean de Sacrobosco, imprimé à Venise en 1531). — *Canones de motibus corporum supercœlestium.* — *Tabulæ mediorum motuum, equationum, stationum et latitudinum planetarum, eleuationis signorum, diuersitatis aspectus Lunæ, mediarum coniunctionum et oppositionum lunarium, feriarum, latitudinum climatum, longitudinum et latitudinum ciuitatum.* — *Stellæ fixæ verificatæ tempore Alphonsi.* — *Tractatus de electionibus.* — *Canon ad inueniendum tempus introitus Solis in quodcumque* 12 *signorum in Zodiaco.* — *Canon ad inueniendum introitum Lunæ in quodlibet* 12 *signorum in Zodiaco.* — *Canones magistri Ioannis de Saxonia super Tabulas Alphonsi, per Prosdocimo de Beldomandis* (sic). — *Canones operatiui et compositiui Astrolabii.* — Et enfin l'*Astrolabium.*

Profondément versé dans la théorie de la musique, qui faisait alors partie intégrante du *Quadrivium* des Mathématiques, Prosdocimo écrivit de nombreux Ouvrages sur la science musicale. Il était musicien dans toute l'acception du mot,

(¹) Voir *Bulletin,* V_2, 164.

tel qu'on l'entendait au moyen âge : *Musicus cognoscit, sentit, discernit, eligit, ordinat et disponit omnia quæ ipsam tangunt scientiam.* Plusieurs de ces Ouvrages ont été imprimés par les soins de M. de Coussemaker (*Scriptores de Musica,* t. III), savoir : le *Tractatus de contrapuncto,* écrit en 1412 ; le *Tractatus practice de musica mensurabili* (qui n'est qu'un abrégé revu et amendé de la *Musique spéculative* de Jean de Muris) ; le *Tractatus practicæ de musica mensurabili ad modum Italicorum*; le *Libellus monocordi;* et la *Brevis summula proportionum.*

Il en est d'autres qui sont restés manuscrits, tels que *Expositiones tractatus practicæ cantus mensurabilis magistri Johannis de Muris* (ms. de 1404) ; *Tractatus planæ musicæ* (ms. de 1412) ; *Opusculum contra theoricam partem, sive speculativam Lucidarii Marchetti Patavini,* et enfin la *Musica speculativa.*

N'oublions pas de dire que M. Favaro a relevé quelques erreurs commises par Baldi, Montucla, Libri, Fétis, Hoefer, etc., relativement à la personne ou aux écrits de Prosdocimo de' Beldomandi.

Riccardi (*P.*). — Nuovi Materiali per la storia della Facoltà matematica nell' antica Università di Bologna. (299-312).

Cette étude peut être considérée comme une suite au Mémoire du professeur Silvestro Gherardi, publié à Bologne en 1846 et traduit en allemand par le professeur Curtze en 1871. Elles est suivie d'un Appendice contenant le programme des leçons de Mathématiques professées par Cavalieri, de 1642 à 1645, à l'Université de Bologne. Ce programme démontre, ainsi que le fait observer M. Riccardi, que le modeste et religieux Bonaventure Cavalieri ne se borna pas à approuver *in petto* la doctrine de Copernic, mais qu'il eut le courage de l'enseigner publiquement, bien que sous forme d'hypothèse.

Eneström (*Gust.*). — Notice sur la correspondance de Jean Ier Bernoulli. (313-314).

En 1797, toute la correspondance de Jean Ier Bernoulli fut acquise, au prix de 60 ducats, par l'Académie Royale des Sciences de Stockholm. L'Académie semble l'avoir si bien *gardée* depuis cette époque, dit M. Eneström, qu'à Stockholm même on ignorait son existence, en l'année 1848, et que personne ne put renseigner sur ce dépôt le Dr Wolf, qui s'était avisé de poser une question à ce sujet dans les *Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern.* Cette précieuse correspondance a été retrouvée il y a quelques années. Pour donner une idée de son importance, qu'il suffise de dire qu'elle se compose de plus de 1400 lettres, dont 900 au moins en français, plus de 500 en latin et 1 en allemand, écrites par le marquis de L'Hôpital, Varignon, Jean Bernoulli, Moivre, Montmort, Chr. Wolf, Euler, Dortous de Mairan, Cramer, Maupertuis, etc. Il y a là un trésor enfoui, qui demeure inutile pour la science, et pourtant, dit M. Eneström, en terminant sa trop courte Notice, « plusieurs de ces lettres jettent une grande lumière dans l'histoire des Mathématiques de ce temps ».

Żebrawski (*T.*). — Quelques mots au sujet de la Note de M. Maximilien Curtze sur l'orthographe du nom et la patrie de Witelo. (315-317).

Les observations du Dr Zebrawski, membre de l'Académie des Sciences de Cracovie, s'appliquent à une Note publiée dans le t. IV du *Bullettino* (année 1871), p. 49-76, par M. Curtze, professeur au gymnase de Thorn.

« Il est bien vrai », dit M. Curtze, « que Witelo vivait à Cracovie; mais doit-il à cause de cela être Polonais? Je crois que non. » A M. Curtze qui voudrait germaniser l'illustre mathématicien du XIIIe siècle, M. Żebrawski répond victorieusement : « Dans le cas où la nationalité d'un homme est mise en doute, il n'y a d'autre preuve plus claire et plus décisive que l'aveu de la personne même : à quelle nationalité veut-elle appartenir? Or, notre *Witek* dit : *In nostra terra, scilicet Poloniæ*, et cela suffit pour nous assurer qu'il ne put être que Polonais; un Allemand n'aurait pas nommé la Pologne comme son pays, *terra nostra,* et la Pologne dans ce temps-là n'était soumise à aucun gouvernement étranger. »

En France, on a toujours regardé comme étant de nationalité polonaise le célèbre physico-mathématicien, et généralement on le désigne sous le nom de Vitellio.

M. Curtze a relevé treize manières différentes dont ce nom est écrit dans divers manuscrits, mais M. Żebrawski fait voir que le véritable nom, le nom primitif est *Witek*, et que cette orthographe, défigurée en *Witelo* par un premier copiste, a pu passer ensuite par toutes les autres variantes signalées par M. Curtze.

Dall' Oppio (*Luigi*). — Fisica tecnologica, Elettricità e Magnetismo, Telegrafia elettrica, elettrometallurgia, accensione elettrica delle mine, Illuminazione elettrica, Telefoni, ecc., di Rinaldo Ferrini, Professore nel R. Istituto tecnico superiore di Milano, 1878, in-8 di pagina XVI, 574. (318-332).

Dans cet article, l'ingénieur Luigi dall' Oppio fait l'examen de l'Ouvrage publié en 1878, à Naples, Milan et Pise par le professeur Rinaldo Ferrini, membre de l'Institut Lombard. Il loue la partie du Livre qui traite des applications techniques de l'électricité et du magnétisme; mais il s'attache spécialement à la critique du Chapitre intitulé : *I principii intorno ai potenziali,* et regrette que l'auteur n'ait pas mieux profité des excellents travaux de M. Betti sur la Physique mathématique.

Hultsch (*Fred.*). — Pappi Alexandrini collectionis quæ supersunt e libris manuscriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fredericus Hultsch. Article traduit de l'allemand en italien par le Dr Alfonso Sparagna. (333-344).

Le Dr Hultsch a publié à Berlin, en trois volumes in-8°, avec interprétation latine et savants commentaires, tout ce qui reste de la collection mathématique de Pappus d'Alexandrie. Cette publication est de haute importance pour l'histoire des Mathématiques dans l'antiquité. Dans l'article analytique, traduit en italien par M. Sparagna pour le *Bullettino*, le Dr Hultsch passe en revue, Livre par Livre, le contenu de ce Recueil, dont nous ne connaissons guère, en France, que les Porismes rétablis par la merveilleuse sagacité de feu notre illustre ami, Michel Chasles. On sait combien il y a de lacunes profondément regrettables et aussi d'interpolations malencontreuses dans ce qui nous reste de Pappus, et combien de parties importantes sont entièrement perdues.

Le plus ancien manuscrit connu de la collection mathématique de Pappus appartient à la Bibliothèque du Vatican, où il est coté sous le n° 218. Il commence à la moitié du second Livre; c'est ce manuscrit qui a servi de base au grand travail édifié par le Dr Frédéric Hultsch.

Steinschneider (*Maurice*). — Intorno a Johannes de Lineriis (de Liveriis) e Johannes Siculus. Nota di M. Steinschneider. (345-351).

Dans cette Note, le savant orientaliste et mathématicien de Berlin a pour but d'apporter son contingent d'observations personnelles, et de provoquer de nouvelles recherches dans les manuscrits, pour arriver à résoudre toutes les questions relatives à deux auteurs qu'on a souvent confondus, Jean de Linières et Jean de Sicile, et pour bien déterminer les Ouvrages qui appartiennent à chacun d'eux, et dont l'attribution reste encore incertaine.

Boncompagni (*Balth.*). — Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis, e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro), scritte da Bernardino Baldi. (352-419).

Bernardino Baldi, né en 1553, mort en 1617, est auteur d'un ouvrage intitulé : *Vite de matematici* qui ne fut jamais imprimé, et dont le Prince Balthazar Boncompagni possède trois manuscrits différents, comprenant ensemble les vies de 199 mathématiciens, parmi lesquels Jean Danck de Saxe, Jean de Linières et Fra Luca Pacioli.

Jean Danck de Saxe était professeur de Mathématiques à Paris en 1330; c'est en 1331 qu'il termina, dans cette ville, son commentaire sur le livre d'astrologie judiciaire d'Abd-el-Aziz el Kabiti, plus connu sous le nom d'Alchabitius. Cet Ouvrage fut imprimé à Venise pour la première fois en 1485; on en connaît d'autres éditions publiées à Venise en 1491, 1502, 1503, 1513, et enfin à Paris, en 1521.

Jean de Linières ou de Lignières était Français, du diocèse d'Amiens. Il enseignait les Mathématiques à Paris, en même temps que Jean Danck de Saxe et Jean de Muris, célèbre docteur de Sorbonne, que l'on croit originaire de Normandie.

Le frère franciscain Luca Pacioli enseigna l'Arithmétique à Pérouse pendant les années 1477-1480; plus tard il enseigna les Mathématiques à Naples, à Florence, à Rome. Ses œuvres comprennent : 1° *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità,* imprimée pour la première fois à Venise en 1494; 2° *Compendium de divina proportione.* La Bibliothèque Ambroisienne de Milan en conserve précieusement un exemplaire manuscrit décoré de figures géométriques dessinées de la propre main de Léonard de Vinci, qui était lié d'amitié avec Fra Luca Pacioli; 3° *Trattato di architettura;* 4° *Figure di antichi caratteri;* 5° *Libellus in tres tractatus divisus;* ce Triparty, s'il faut en croire Baldi, était un Traité des corps réguliers; 6° une traduction en langue italienne des Eléments d'Euclide; 7° *Tractatus de viribus quantitatis.* Le Prince Boncompagni, qui cite, à défaut de Baldi, cette édition d'Euclide, de 1509, et ce traité resté jusqu'à présent inédit, *De viribus quantitatis,* rappelle en outre que Luca Pacioli dédia un autre Traité : *De ludis in genere cum illicitorum reprobatione*, à François de Gonzague, marquis de Mantoue, et à la marquise Isabelle, sa femme; mais le savant et illustre éditeur du *Bullettino* déclare qu'aucun exemplaire, soit imprimé, soit manuscrit, n'est parvenu à sa connaissance. On est alors porté tout naturellement à se demander si cet Ouvrage a jamais existé.

Boncompagni (*B.*). — Vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo san Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi. (420-427). — Appendice di documenti inediti relativi a Fra Luca Pacioli. (428-438).

Ces documents inédits, extraits des manuscrits de la Bibliothèque du Vatican, de la bibliothèque de l'Université de Bologne, des Archives générales de Venise, de celles de Pérouse et des Archives d'Etat de Florence, ont été reproduits avec le plus grand soin par le Prince Balthazar Boncompagni.

Henry (*Ch.*). — Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche. (477-568; 619-740).

On ne saurait qu'applaudir à la publication d'écrits authentiques inédits de Fermat, de Bachet ou de Malebranche. Mais disons tout de suite que les fragments mathématiques attribués à Malebranche par M. Ch. Henry ne sont point de Malebranche : ils sont l'œuvre d'un autre Père de l'Oratoire, Claude Jaquemet, de Valenciennes, professeur à Vienne (Dauphiné), moins connu que l'illustre métaphysicien, mais plus mathématicien que lui. Je me bornerai à dire ici que nulle part, dans les manuscrits du fonds de l'Oratoire, Malebranche n'est indiqué comme étant l'auteur de ces essais mathématiques, et que la simple lecture des pièces rapportées par M. Henry démontre surabondamment qu'elles ne proviennent point de Malebranche.

Un reproche plus grave que nous adresserons à l'auteur des *Recherches sur les manuscrits de Fermat*, etc., c'est d'avoir méconnu et rapetissé le caractère de Fermat. Qu'on en juge!

« En général », dit M. Henry, « on s'est fait une conception beaucoup trop idéale du caractère de notre géomètre; on l'a trop considéré à travers ses formules, pas assez dans sa province, dans son Parlement, à travers son milieu; répétant les éloges qui ont été décernés à son désintéressement, à son talent de jurisconsulte, les critiques n'ont pas assez deviné, sous les prudes réticences de l'éloge public, les franchises de la chronique privée. Ainsi on a dit que Fermat quitta fort peu sa patrie; cependant un passage d'une lettre adressée à Roberval nous prouve qu'il est allé à Bordeaux; Mersenne nous le montre à Bergerac; trois de ses lettres imprimées dans le *Commercium epistolicum*, de Wallis, sont datées de Castres; enfin il est mort dans cette ville le 12 janvier 1665. » — « Notre conseiller (Fermat), qui était fort riche en propriétés, à Beaumont de Lomagne, n'a pas manqué de solliciter et d'obtenir les faveurs du chancelier Seguier. C'est ce que prouvent trois lettres extraites de manuscrits autographes de la Bibliothèque Nationale. Grâce à Monsieur de la Chambre, Fermat peut donc être rangé à côté de Conrart, de Desmarets, de Chapelain, de Gomberville, de Cerisy, de Habert, d'Esprit, de Chaumont, de Priezac, de Ballesdens, etc., parmi les savants qui ont reçu les faveurs de Séguier. » — « Le jugement de Fermat a-t-il été toujours à l'abri de l'exagération quelquefois reprochée à ses compatriotes? » — « L'action directe du milieu se compliquait d'ailleurs chez notre géomètre d'une influence plus générale. La modestie a fait des progrès, au moins des progrès apparents. Les livres d'aujourd'hui n'étalent plus les prétentions de leurs ancêtres. Seul, un charlatan pourrait de nos jours songer aux hyperboles que Descartes voulait inscrire en tête d'un de ses écrits. Seule, une dupe pourrait, à l'exemple de Menelaüs, de Campanus ou de Lucas Pacioli, préconiser comme admirable l'objet de ses études. » — « Il semble aussi que Fermat ait péché par excès de précipitation. » — « A ces faiblesses de caractères (de Fermat) il convient toutefois d'opposer une grande largeur d'intelligence. » etc., etc.

Le cadre du *Bulletin* ne permet pas de relever tous les jugements téméraires et parfois puérils de M. Henry. Qu'on nous permette cependant quelques observations. La *Biographie universelle* de Michaud a dit que Fermat quitta fort peu sa patrie (ce qui est vrai), mais elle n'a pas dit qu'il ne perdit jamais de vue son clocher. Que Fermat soit allé à Bordeaux et à Bergerac, ou à Castres où l'appelait son service de conseiller, délégué à la Chambre de l'Édict, comment cela peut-il montrer qu'on s'est fait une conception beaucoup trop idéale du caractère de Fermat? Qu'on lise les trois lettres de Fermat publiées par M. Henry, et l'on y reconnaîtra le langage, non point d'un solliciteur ou d'un courtisan, mais celui d'un homme bien élevé qui a le sentiment de sa valeur et de sa dignité. M. Henry cite ces paroles du P. de Billy, savant mathématicien jésuite : « Ego correxi D. de Fermatum et ostendi quod si duo minores numeri radicum æquentur majori impossibilis est solutio per ipsius methodum : *quod ipse postea fassus est ingenue se non animadvertisse.* » Aux yeux de M. Ch. Henry, cet aveu de Fermat est une marque de faiblesse de caractère; nous y voyons, nous, tout le contraire. Ce que Fermat dit de Frenicle dont il croyait pourtant avoir à se plaindre : « Pour M. de Frenicle ses inventions en Arithmétique me ravissent, et je vous déclare ingénuement que j'admire ce génie qui, etc. », prouve une rare générosité d'âme. Je passe sous silence les anecdotes d'un goût fort douteux recueillies par M. Henry contre Lagrange, Bézout et Delisle, le maître de Lalande. Disons en finissant ce trop long article que M. Henry n'a pas mieux compris l'originalité des œuvres de Mersenne et la nature des habitudes prétendues *cachottières* (*sic*) d'une époque où l'on travaillait pour ainsi dire en commun, qu'il n'a compris la grande figure de Fermat.

Favaro (*Ant.*). — Intorno ad alcune Notizie inedite, relative a Niccolo Coppernico, raccolte e pubblicate dal Prof. Massimiliano Curtze. (775-807).

En 1874 et en 1875, M. Curtze a publié une collection de Notices sous le titre *Reliquiæ Copernicanæ*. En juin 1877, il lisait à la Société des Sciences et des Arts de Thorn un savant Rapport dont la traduction italienne par le Dr Sparagna a été insérée dans le t. XI du *Bullettino*, p. 167-171. En 1878, poursuivant ses laborieuses investigations, M. Curtze a fait paraître encore ses *Inedita Copernicana*, publication importante dont il avait soigneusement recueilli les matériaux dans les manuscrits des bibliothèques de Berlin, Frauenbourg, Upsal et Vienne, et aussi dans des livres imprimés ayant appartenu à Copernic et enrichis de notes écrites de sa propre main. L'examen du livre d'Abou Hassan Ali, intitulé : *Preclarissimus liber completus in indiciis astrorum* (Venise, 1485) a permis à M. Curtze de reconnaître que le grand astronome, tout aussi bien d'ailleurs que Tycho Brahe, Kepler et Galilée, s'était occupé d'astrologie judiciaire. Le principal des écrits inédits de Copernic, signalé par M. Curtze, n'est pas un autographe, c'est une copie. Il a pour titre : *Nicolai Coppernici de hypothesibus motuum cœlestium a se constitutis,* et se trouve dans le volume manuscrit n° 10530 de la Bibliothèque impériale de Vienne. La lettre de Copernic au chanoine Bernard Wapowski, touchant un écrit de Jean Werner intitulé : *De motu octavœ spherœ,* a été publiée dès 1854 et réimprimée en 1873 par MM. Hipler et Prowe, avec notes de ces deux érudits. M. Curtze l'a étudiée dans les deux exemplaires manuscrits qui se voient, l'un à la Bibliothèque royale de Berlin, l'autre à la Bibliothèque impériale de Vienne. Il a recueilli en outre de curieuses informations, à l'aide des notes autographes de Copernic relevées surtout dans quelques livres de la bibliothèque du chapitre de Ermland.

Boncompagni (*Balth.*). — Intorno a due scritti di Leonardo Euler. (808-811).

Dans le cahier de mai 1879 de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* de Bruxelles, le savant et sympathique directeur, M. Eug. Catalan, venant à citer un écrit d'Euler intitulé : *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques,* s'était demandé quelle était la date de la publication de cet écrit et à quel Recueil académique il pouvait bien appartenir. Le prince Balthazar Boncompagni, mieux que personne, pouvait répondre à ces deux questions, et il l'a fait de manière à donner satisfaction non seulement au mathématicien que la Belgique s'honore de compter au nombre de ses plus illustres professeurs, mais encore à tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des Sciences mathématiques. Il nous apprend en effet que cet écrit d'Euler fut publié pour la première fois, en 1782, à Middelbourg, dans les *Mémoires de la Société zélandaise des sciences* de Flessingue, et que cette première impression est indiquée dans la liste complète des Ouvrages de L. Euler, publiée à Pétersbourg en 1783, à Bâle en 1786, à Pavie en 1787, et aussi dans un Catalogue des Ouvrages d'Euler publié à Pétersbourg en 1843, et enfin dans les Catalogues de Jean Georges Mensel, 1804, et Poggendorff, 1863. Le Mémoire en hollandais, par Gerard Greeve, que M. Catalan mentionne comme suivant immédiatement le Mémoire d'Euler, n'a pas trait aux Mathématiques; il a pour titre : *Waarneeming van een hoornagtig uitwas gegroeid aan de binnenzijde van de dije,* c'est-à-dire en français : *Observation d'une excroissance cératoïde, poussée au côté interne de la cuisse.*

Dans le cahier de mai 1879 du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* on a donné une lettre de Nicolas Fuss à Condorcet, dont le post-scriptum indiquait un travail d'Euler sur le moyen de rendre rationnelle la formule intégrale $\int \frac{dx\sqrt{1+x^2}}{1-x^4}$. Le prince Balthazar Boncompagni a retrouvé l'observation d'Euler relative à ce point d'Analyse, dans un Mémoire présenté à l'Académie impériale des Sciences de Pétersbourg, le 16 septembre 1776, et publié en 1845 dans le 4e volume du *Calcul intégral* d'Euler.

Genocchi (*Angelo*). — Dimostrazione del quinto postulato di Euclide. Nota del Prof. Vincenzo de Rossi Re (812).

Le célèbre professeur et académicien de Turin prouve en quelques lignes, que cette démonstration du postulatum d'Euclide est défectueuse comme toutes les autres.

Günther (*S.*). — Invarianti, covarianti e contravarianti delle funzioni omogenee. Nota del P. Giacomo Foglini; Roma, 1879. Article traduit de l'allemand en italien par le Dr Sparagna. (813-814).

S. Günther, après avoir fait ressortir le côté pratique et vulgarisateur du travail de G. Foglini, reconnaît que la science allemande n'a encore rien produit d'équivalent dans ce genre, et exprime le vœu que ce Mémoire soit traduit en allemand.

Tychsen (*Camille*). — Lagrange, par Camille Tychsen, traduit du danois par le Dr Zeuthen. (815-827).

Ce Mémoire bio-bibliographique de Camille Tychsen sur Lagrange fut publié d'abord en danois dans le *Journal de Mathématiques* dirigé par le savant professeur de l'Université de Copenhague. Il se termine par une liste détaillée des travaux de Lagrange qui sont répandus dans les divers recueils académiques de l'Europe.

Eneström (*Gust.*). — Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler, publiées par Balthazar Boncompagni; Saint-Pétersbourg, 1877. Article traduit du suédois par MM. Leouzon le Duc et Aristide Marre. (828-838).

Ainsi que le fait observer fort judicieusement M. Gustave Eneström, les correspondances entre les savants, écrites à une époque où l'on n'avait point encore de Journaux et de Revues périodiques, sont d'une haute importance pour la connaissance du développement des sciences mathématiques. Dans l'année 1862, dix-huit lettres d'Euler à Lagrange parurent dans l'édition des Œuvres posthumes d'Euler, publiée par les frères Fuss à Pétersbourg; mais aucune lettre de Lagrange à Euler n'avait encore paru lorsque, en 1877, le prince Balthazar Boncompagni publia et reproduisit par la photolithographie onze lettres de Lagrange à Euler. Cette correspondance remonte à 1754; elle se continue en 1755, 1756, 1759, 1760 et 1762 et roule principalement sur le calcul des variations, dont la découverte est constatée dans la lettre de Lagrange du 12 août 1755, la théorie des cordes vibrantes, la théorie de la propagation du son, et l'intégration des équations différentielles partielles.

« L'histoire des Sciences mathématiques », conclut M. Eneström, « doit être reconnaissante au prince Balthazar Boncompagni pour sa précieuse publication. Le noble et savant Mécène a ainsi rendu un nouveau service à cette branche de la Science, à laquelle il applique ses forces avec un succès si éclatant. »

Biadego (*J.-B.*). — Sulla Memoria inedita di Pietro Maggi, intorno ai principii di meccanica molecolare di Ambrogio Fusinieri. Nota di Giambattista Biadego. (839-846).

Ce Mémoire de Pietro Maggi, qui fait l'objet de cette Notice de Biadego, fut écrit en l'année 1840, à propos d'une longue dissertation sur quelques principes de mécanique moléculaire, insérée par Ambroise Fusinieri dans les *Annales des Sciences du royaume Lombard-Vénitien*. Présenté à l'Académie d'Agriculture, Arts et Commerce de Vérone, dès le 10 décembre de cette même année 1840, il ne fut admis aux honneurs de la lecture en séance publique que le 3 mars 1842, et ne fut point imprimé dans les Mémoires de l'Académie. Il était resté inédit jusqu'au jour où le prince Balthazar Boncompagni lui donna l'hospitalité dans son *Bullettino*.

Maggi (*Pietro*). — Dissertazione intorno ai principii di meccanica molecolare del Dottore Ambrogio Fusinieri. (847-862).

Cette dissertation est une vigoureuse défense des principes de Newton, Volta, Berzelius et Arago contre les attaques de Fusinieri et sa nouvelle théorie de la mécanique moléculaire.

Boncompàgni (*Balth.*). — Giunte allo scritto intitolato : *Intorno alle vite inedite di tre matematici* (*Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni di Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo S. Sepolcro*) *scritta da Bernardino Baldi* (*Bullettino,* ecc., tomo XII, p. 352-438. (863-872).

Ces additions sont relatives à Luca Pacioli, et sont empruntées à neuf documents inédits, extraits des archives générales *Dei contratti* de Florence, et remontant, trois à l'année 1497, trois à l'année 1499, et trois à l'année 1500. Le testament de Fra Luca Pacioli, daté du 21 novembre 1511 à Borgo San Sepolcro clôt dignement cet appendice au Mémoire du prince Balthazar Boncompagni.

Wiedemann (*Eilhard*). — Materiali per la storia delle scienze naturali presso gli Arabi, per Eilardo Wiedemann. Traduzione dal tedesco del D^r Alfonso Sparagna. (873-876).

Ce Mémoire du D^r Eilhard Wiedemann parut d'abord en allemand dans les *Annales de Physique et de Chimie de Poggendorff,* années 1876, 1877 et 1878. Il se rapporte principalement à l'Optique, à la détermination des poids spécifiques, à la variation de la pesanteur suivant la variation de la distance au centre de la Terre, à la force de l'aimant, à la réfraction de la lumière.

Bezold (*Wilhem von*). — Materiali per la storia dell' Ottica fisiologica (Ruota de colori e visione binoculare) per Guglielmo von Bezold. Traduzione dal tedesco del D^r Alfonso Sparagna. (877-880).

Le texte original allemand de ce Mémoire fut publié pour la première fois, en 1878, dans les *Annales de Physique et de Chimie de Poggendorff.* Von Bezold y met en lumière certains passages peu connus ou mal observés du célèbre *Traité d'Optique* de Alhazen, mathématicien arabe du XI^e siècle de notre ère, publié à Bâle, en 1572, sous le titre : *Opticæ Thesaurus Alhazeni Arabis libri septem.* Enrico Narducci, de Rome, a donné, dans le tome IV du *Bullettino* (année 1871), une intéressante Notice sur une traduction italienne inédite, faite dans le XIVe siècle, de ce même *Traité d'Optique*.

Gerland (*E.*). — Sulla storia dell' invenzione dell' areometro per E. Gerland. Traduzione dal tedesco del Dr Alfonso Sparagna. (881-885).

La conclusion de cette instructive Notice, c'est que l'aréomètre ne fut inventé ni par Archimède, ni par Hypathia, mais qu'il fut inventé probablement dans le IVe siècle de notre ère et servit tout d'abord à des usages médicinaux. Dans la lettre de Synésius, évêque de Cyrène, à la savante Hypathia, le passage relatif à cet instrument demeura incompris jusqu'au jour où Fermat en donna la véritable signification. Il faut lire, p. 882 du *Bullettino,* la curieuse Note empruntée par le savant éditeur à Bernard Barcouda, imprimeur du Roy, de la Chambre de l'Edict de la Ville et Diocèse de Castres, et publiée par celui-ci, p. 84-87 d'une traduction d'italien en français du *Traicté de la Mesure des eaux courantes de Benoist Castelli,* imprimé à Castres en 1664). Barcouda s'exprime ainsi au commencement de cette Note : « Les pages qui restent vuides dans ce casier m'ont donné la pensée de les remplir de la belle observation que j'ay apprise ces jours passez, de l'incomparable M. Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, et de me souffrir souvent dans sa conversation. »

Marre (*Aristide*). — Deux mathématiciens de l'Oratoire. (886-894).

Ces deux oratoriens sont le P. Claude Jaquemet, professeur à Vienne (Dauphiné), qui eut, au dire du P. Adry, l'historien de l'Oratoire, la réputation d'un des premiers mathématiciens du royaume, et le P. Bizance, l'ami et le compagnon du P. Malebranche à Paris. Après une courte Notice sur chacun de ces deux savants oratoriens, M. Aristide Marre met sous les yeux du lecteur la reproduction fidèle d'une lettre autographe et inédite du P. Jaquemet au P. Bizance, datée de Vienne, 26 janvier 1690. Cette lettre, relative à la théorie des nombres carrés et à une proposition de Fermat sur les nombres polygones de Diophante, est la pièce capitale et la seule autographe, au milieu de toutes ces copies de la correspondance mathématique du P. Jaquemet et du P. Bizance, que M. Ch. Henry a faussement attribuée à Malebranche. Les feuillets numérotés 180 et 181 qui la renferment sont de plus petites dimensions que les autres feuillets du manuscrit 24236 du fonds français de la Bibliothèque nationale (ancien 168 du fonds de l'Oratoire), et M. Henry ne l'a pas aperçue, bien qu'il ait extrait de ce même volume manuscrit plus de soixante pages d'essais mathématiques provenant de la correspondance des PP. Jaquemet et Bizance.

Ajoutons ici que M. Marre a publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (2e série, t. IV, Ire Partie, p. 200) deux nouvelles lettres mathématiques inédites du P. Jaquemet, retrouvées par le P. Ingold, bibliothécaire actuel de l'Ordre de l'Oratoire. Elles sont adressées de Vienne au P. Reyneau, l'auteur bien connu de l'*Analyse démontrée* et des *Eléments de Mathématiques.* M. Gaston Darboux a fait voir dans une Note que la règle donnée par le P. Jaquemet, dans la première de ces deux lettres, est semblable à celle que l'on attribue à Maclaurin.

Annonces des Ouvrages récemment publiés et des Mémoires insérés

dans les principaux recueils scientifiques de l'Europe. (75-114; 252-298; 439-476; 569-618; 741-774; 895-946).

Indice degli Articoli. (947-748).

Indice dei Nomi. (949-984).

Cet index contient plus de 5000 noms par ordre alphabétique des auteurs mentionnés dans le tome XII du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Science matematiche e fisiche*, du prince Balthazar Boncompagni.

ARISTIDE MARRE.

PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY (¹).

Tome IX; novembre 1877 à décembre 1878.

Mc Coll (H.). — Le calcul des propositions équivalentes et des limites d'intégration. (9-20).

Cet article curieux a pour but l'application des Mathématiques aux opérations logiques.

L'auteur définit une méthode de calcul dans laquelle les symboles A, B, C, ... représentent des propositions. L'équation

$$A = 1$$

exprime que la proposition A est vraie; la fausseté de cette proposition se traduit par l'équation

$$A = 0.$$

Le symbole ABC désigne une proposition composée dont les propositions A, B, C sont dites les facteurs. L'équation

$$ABC = 1$$

exprime que les propositions-facteurs sont vraies toutes les trois. L'équation

$$ABC = 0$$

exprime que l'une au moins est fausse; en d'autres termes, qu'elles ne peuvent pas être vraies toutes les trois.

Le symbole $A + B + C$ désigne une proposition indéterminée dont A, B, C sont les termes. L'équation

$$A + B + C = 0$$

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 145.

exprime que les trois propositions sont fausses. L'équation

$$A + B + C = 1$$

exprime qu'elles ne le sont pas toutes, que l'une au moins est vraie. Ces définitions sont indépendantes du nombre des propositions.

L'auteur désigne par A' le contraire de la proposition A. On a donc, en vertu des définitions précédentes,

$$A + A' = 1, \qquad AA' = 0.$$

L'auteur montre que la règle de la multiplication algébrique s'applique aux propositions indéterminées; il introduit encore quelques autres symboles dans le détail desquels il serait trop long d'entrer. Comme application de son nouveau calcul il traite les deux questions suivantes :

1° Quelle est la probabilité pour que les racines de l'équation

$$ax^2 - bx + c = 0$$

soient réelles, les nombres a, b, c étant compris entre 0 et A, et toutes leurs valeurs ayant la même probabilité? Le résultat est

$$\frac{5}{36} + \frac{1}{6} l.2.$$

2° Intervertir l'ordre des intégrations dans l'intégrale multiple

$$\int_{-a}^{2a} du \int_{-u}^{2u} dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{-2x}^{\frac{y^2}{2x}} \varphi(u, x, y, z)\, dz.$$

Rayleigh (Lord). — Sur les ondes progressives. (21-26).

Clifford. — Note sur le mouvement tourbillonnaire. (26-27).

Le problème peut être énoncé ainsi : « On donne en chaque point la dilatation et la rotation. Il s'agit de déterminer la vitesse de translation ». L'auteur fait connaître une solution de ce problème reposant sur l'emploi des quaternions.

Clifford. — Sur la triple génération de la courbe des trois barres (courbe de Watt). (27-28).

Démonstration géométrique du théorème relatif à cette triple génération.

Clifford. — Sur le centre de gravité d'un octaèdre. (28).

Voici la règle donnée par l'auteur : Soient dans l'espace trois droites af, bg, ch. Leurs sommets déterminent un octaèdre. Considérons les quadrilatères $bcgh$, $cahf$, $afbg$. Les plans passant par les milieux de ces quadrilatères se coupent en un point k.

Désignons par m le centre de gravité du triangle formé par les milieux de af, bg, ch. Le centre g se trouve sur la droite mk et au milieu de cette droite.

Cayley (A.). — Sur les fonctions θ doubles. (29-30).

M. Cayley donne un aperçu de ses recherches publiées depuis *in extenso* dans le *Journal de Borchardt*, t. LXXXV, p. 214, et il explique que sa méthode relative aux fonctions θ doubles s'applique sans modification au cas des fonctions elliptiques.

Cayley (*A.*). — Sur la représentation géométrique des variables imaginaires par une correspondance réelle entre deux plans. (31-39).

Considérons deux variables imaginaires

$$u = x + yi, \qquad v = x' + y'i,$$

liées par une relation algébrique de degré m en u, n en v. Si l'on représente ces variables par deux points P, P′ pris dans deux plans Π, Π', on aura ainsi établi une correspondance (m, n) entre les points de ces deux plans. Dans un travail antérieur l'auteur avait étudié un cas particulier. Il examine ici une question générale relative à ce mode de correspondance. En général, quand le point P décrit une petite courbe ovale et revient à sa position primitive, il en est de même des points correspondants. L'auteur examine comment se modifie cette proposition quand l'ovale grandit ou qu'il est décrit autour d'un des points V auxquels correspondent deux points P′ confondus.

Tanner (*H.-W.-L.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre contenant plusieurs fonctions inconnues. (41-65).

L'auteur considère une ou plusieurs équations contenant des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ de m variables $x_1, \ldots, x_m$, et il montre d'abord que tout système de telles équations peut être ramené à une forme normale qu'il définit comme il suit : chaque équation ne contiendra que des déterminants jacobiens de la forme

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})};$$

elle sera algébriquement homogène par rapport à ces déterminants, les coefficients ne dépendant que des variables x_i.

Chaque système avec n fonctions et m variables indépendantes peut être ramené à cette forme canonique, si l'on porte le nombre des variables indépendantes à $m + n$.

Après avoir établi ce résultat, l'auteur considère exclusivement les équations dont la forme canonique est du premier degré et peut s'écrire

$$\Sigma \mathrm{P}_\alpha \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})} = 0.$$

Il cherche d'abord dans quel cas une équation de ce genre peut être ramenée à la forme

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n, u_{n+1}, \ldots, u_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = 0$$

que l'on sait intégrer. Il faut pour cela que les coefficients P satisfassent à certaines conditions. Quand ces conditions seront remplies, les fonctions u seront déterminées par un système d'équations linéaires simultanées.

L'auteur traite ensuite l'équation linéaire à deux termes qui peut toujours, en vertu d'un théorème bien connu sur les déterminants fonctionnels, se ramener à la forme

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \text{P},$$

où P dépend des x, y.

Enfin le Mémoire se termine par l'étude d'une classe d'équations que l'on peut aisément ramener à la forme simple

$$\Sigma \text{P}_{\alpha_\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = 0.$$

Rayleigh (*Lord*). — Sur la relation entre les fonctions de Laplace et de Bessel. (61-64).

L'auteur montre comment les fonctions de Bessel se déduisent de celles de Laplace par le passage à la limite, qui permet aussi d'obtenir les formules récurrentes entre les fonctions de Bessel.

Roberts (*S.*). — Sur les normales aux coniques. (65-75).

Exposition à un point de vue nouveau de différentes propriétés des normales et en particulier des normales menées d'un point à une conique.

Tanner (*H.-W.-L.*). — Sur une méthode générale d'intégration des équations aux dérivées partielles. (76-92).

Étant donnée une équation du premier ordre

$$\text{F}(z, p_1, \ldots, p_n; x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

on sait que le problème de son intégration peut s'énoncer ainsi : « Trouver n relations entre les variables z, x_ι, p_h, permettant de satisfaire à l'identité

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0. \text{ »}$$

L'auteur généralise ce point de vue et l'étend aux équations de degré supérieur à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Lamb (*H.*). — Sur les conditions pour le mouvement permanent d'un fluide. (76-77).

L'auteur donne ces conditions et en fait des applications.

Maxwell (*Clerk*). — Sur la capacité électrique d'un long cylindre mince et d'un disque de sensible épaisseur. (94-101).

Si l'on désigne par E la charge totale du corps, par ψ_0 la valeur du potentiel à l'intérieur, par Q_0 l'énergie potentielle et par K la capacité du conducteur, on a

$$\text{Q}_0 = \tfrac{1}{2}\psi_0 \text{E}, \qquad \text{E} = \text{K}\psi_0,$$

et, par conséquent,

$$\text{K} = \frac{1}{2}\frac{\text{E}^2}{\text{Q}_0}.$$

Comme Q_0 est la plus petite valeur qui corresponde à toutes les distributions possibles de la charge, on a toujours

$$K > \frac{1}{2}\frac{E^2}{Q},$$

Q étant l'énergie potentielle correspondant à une distribution quelconque de la charge.

D'après cela, on peut obtenir pour K des valeurs approchées en étudiant une loi de distribution de l'électricité à la surface du corps, qui permette de faire le calcul de Q. Si le corps est, par exemple, un cylindre long et mince de longueur l et de rayon b, on peut supposer la densité constante, et l'on obtient

$$K > \frac{1}{\log\frac{4l}{b} - 1}.$$

L'auteur étudie encore une autre loi dans laquelle la densité est exprimée par une somme de fonctions harmoniques.

L'auteur applique une méthode analogue à un disque mince de rayon a et d'épaisseur b. Il suppose que l'électricité soit distribuée sur les deux faces du disque comme si le disque était infiniment mince, et il obtient la formule

$$K > \frac{2a}{\pi - \frac{b}{a}\left(1+\frac{b^4}{a^4}\right)\log\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)};$$

ou, si $\frac{b}{a}$ est très petit,

$$K \neq \frac{2}{\pi}\left(a + \frac{b}{2\pi}\log\frac{a}{b}\right).$$

Minchin. — Sur l'équilibre astatique. (102-118).

Si un corps solide est en équilibre sous l'action des forces appliquées en différents points de ce corps, il peut demeurer en équilibre si l'on déplace le corps sans changer les points d'application, la grandeur et la direction des forces. L'étude de tels déplacements donne naissance à une théorie qui est maintenant bien connue. L'auteur montre comment on peut la traiter en employant les quaternions, qui s'y appliquent avec élégance.

Leudersdorf (C.). — Sur certaines extensions du théorème de Frullani. (118-122).

Ce travail se rapporte à des généralisations de la formule intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx = l\frac{a}{b}\,[\varphi(\infty)-\varphi(0)].$$

Si l'on pose

$$(a) = \int_0^\infty \frac{\varphi(ax)\,dx}{x}, \quad (ab) = \int_0^\infty\int_0^\infty S(ax, by)\,\frac{dx\,dy}{xy}, \quad \ldots,$$

$S(p, q, \ldots)$ désignant une fonction symétrique des lettres p, q, ..., qui ne devient jamais infinie pour des valeurs positives de ces lettres, les propositions de l'auteur se rapportent à la différence

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) - (a'_1 a'_2 \ldots a'_n).$$

Klein (*F.*). — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (123-126).

Aperçu des recherches de l'auteur, qui sont bien connues des lecteurs du *Bulletin.*

Cayley (*A.*). — Sur la théorie des groupes. (126-133).

Si l'on désigne toutes les substitutions d'un groupe par des lettres différentes, on peut construire une Table à double entrée qui donne le produit de deux substitutions quelconques du groupe. On forme ainsi un carré dans lequel les substitutions qui font dériver une ligne quelconque de la première forment un groupe isomorphe au groupe donné. M. Cayley étudie les relations entre ces deux groupes, en considérant plus spécialement le cas où les substitutions sont régulières. Il emploie, notamment, dans ce but, une suite de polygones diversement colorés et dont les côtés sont parcourus dans un ordre déterminé.

Kempe (*A.-B.*). — Sur les systèmes articulés à quatre pièces. (133-149).

Nous avons déjà donné, dans le *Bulletin,* des indications sur le problème traité par M. Kempe. C'est celui qui a été étudié par M. Darboux.

Halphen (*G.*). — Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. (149-170).

M. Halphen se propose de donner ici un aperçu des recherches qu'il a publiées sur cet intéressant sujet (*Comptes rendus,* t. LXXXIII, p. 537 et 886). Les recherches relatives aux caractéristiques reposaient, comme on sait, sur le théorème suivant : *Le nombre des coniques d'un système* $\Sigma(\mu, \nu)$ *qui satisfont à une condition simple donnée* Z *est toujours de la forme* $\alpha\mu + \beta\nu$.

Les travaux de M. Halphen ont montré que cette proposition n'est pas toujours exacte. M. Chasles n'avait considéré que deux espèces de coniques dégénérées, la conique réduite à deux droites distinctes et celle qui se réduit à deux points distincts. La première est coupée en deux points distincts par une droite quelconque, la seconde admet deux tangentes distinctes passant par un point. M. Halphen montre qu'il y a lieu de considérer une troisième conique dégénérée, formée de deux points confondus sur une droite double. Toutes les fois qu'un système présentera de telles coniques, le théorème énoncé plus haut pourra être en défaut.

Les recherches de M. Halphen reposent sur la considération de deux courbes, l'une attachée au système et l'autre attachée à la considération. Elles ont été publiées *in extenso* dans le *Journal de l'École Polytechnique* (XLV^e Cahier).

Monro (*C.-J.*). — Sur la flexion des espaces. (171-177).

L'auteur démontre le théorème suivant : *Désignons par flexion toute transformation de l'espace dans laquelle la plus courte distance de deux points* *demeure invariable : un espace à n dimensions peut subir en général une flexion dans un espace à $n + n'$ dimensions, pourvu que l'on ait $n' > \frac{1}{6}n(n-1)$.*

McColl (H.). — Sur le calcul des propositions équivalentes (second Mémoire). (177-187).

Addition au travail dont nous avons rendu compte plus haut. L'auteur définit le symbole A:B et ajoute plusieurs règles à celles qu'il a fait connaître. Il donne, en particulier, une interprétation géométrique.

Roberts (S.). — Sur la décomposition de certains nombres en une somme de deux carrés par l'emploi des fractions continues. (187-196).

Si l'on a

$$D = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

et que l'on prenne

$$P = E\left(\frac{2\beta\delta}{\beta^2+\delta^2} E\sqrt{D}\right) + 1,$$

$$Q = E\left(\frac{\beta^2-\delta^2}{\beta^2+\delta^2} E\sqrt{D}\right) + 1,$$

on aura soit

$$D = P^2 + Q^2,$$

soit

$$D = P^2 + (Q-1)^2.$$

Glaisher (J.-W.-L.). — Forme généralisée de certaines séries. (197-202).

L'auteur fait connaître plusieurs conséquences de l'équation identique

$$\left[1 + \frac{p}{p}x + \frac{p(p+2)}{p(p+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{p(p+2)(p+4)}{p(p+1)(p+2)}\frac{x^3}{3!} + \ldots\right]e^{-x}$$

$$= 1 + \frac{1}{p+1}\frac{x}{2} + \frac{1}{(p+1)(p+3)}\frac{x^4}{2^2.2!} + \frac{1}{(p+1)(p+3)(p+5)}\frac{x^6}{2^3.3!} + \ldots.$$

Rawson (R.). — Sur une nouvelle méthode de détermination des différentielles résolvantes des équations algébriques. (202-221.)

On désigne sous le nom de *différentielle résolvante* de l'équation $\varphi(x, y) = 0$ l'équation différentielle linéaire qui détermine une racine quelconque y de l'équation algébrique considérée comme fonction de x. Cette théorie a d'abord été considérée par M. J. Cockle dans un article publié en 1860 dans le *Philosophical Magazine;* elle a été beaucoup accrue par les travaux de M. R. Harley, publiés dans les *Proceedings of Manchester,* t. II, p. 181-184, 199-203, 237-241. L'auteur auquel nous empruntons ces indications cite encore les travaux suivants sur le même sujet, publiés dans le même Recueil :

Cayley (A.). — Note sur une équation différentielle.

Spottiswoode (*W.*). — Note sur les différentielles résolvantes.

Harley (*R.*). — Sur une certaine classe d'équations différentielles linéaires.

Russel (*W.-H.-L.*). — Sur la solution de la différentielle résolvante.

L'auteur cite encore différents travaux publiés dans d'autres Recueils. Puis, en se servant du théorème de Murphy, il fait connaître une nouvelle méthode de former la résolvante différentielle. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ les racines de l'équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

supposée du degré m en y; si l'on développe suivant les puissances descendantes de y

$$\log \frac{\varphi}{y^s} = \sum \frac{u_n}{y^n},$$

on aura, d'après le théorème de Murphy,

$$u_n = -\frac{1}{n}(\beta_1^n + \beta_2^n + \ldots + \beta_s^n),$$

$\beta_1, \ldots, \beta_s$ désignant s racines de l'équation.

Cette formule est appliquée à l'équation particulière

$$\varphi = y^m + ay^r + bx = 0.$$

Par des différentiations l'auteur parvient, dans ce cas, aux deux relations suivantes :

$$u'_{n+r} = -\frac{bm}{a(m-r)}\left(xu'_m - \frac{n}{m}u_n\right),$$

$$u'_{n+m} = \frac{br}{m-r}\left(xu'_n - \frac{n}{r}u_n\right),$$

et l'on voit facilement que l'on pourra déduire de là une équation différentielle pour u_n, équation qui sera absolument indépendante de s, et, par conséquent, à laquelle satisferont les $n^{\text{ièmes}}$ puissances de toutes les racines. Si l'on pose $n = 1$, on a la résolvante cherchée. L'auteur effectue le calcul de cette résolvante pour certains cas particuliers.

Le travail est suivi d'une Note rédigée par M. Harley où les mêmes résultats sont établis par une méthode qui n'emploie pas le théorème de Murphy et dont le principe est dû à M. Cayley. De plus, M. Harley donne, par l'emploi du calcul symbolique, le développement de la résolvante différentielle de l'équation considérée par M. Rawson, quelles que soient les valeurs de m et de r.

Kennedy (*A.-B.-W.*). — Note sur la solution géométrique de plusieurs problèmes de Statique qui se présentent dans la théorie des mécanismes. (221-225).

L'auteur se propose le problème suivant : *Étant donné un système plan* *articulé, une force agit sur une des tiges : trouver la construction d'une force agissant sur une autre tige et dans une direction déterminée, et qui maintienne le mécanisme en équilibre.* L'auteur considère d'abord le cas simple d'un système formé de quatre tiges. Il montre que l'on peut toujours remplacer ce système par un autre qu'il propose d'appeler « mécanisme virtuel », et qui conduit à une solution géométrique simple de la question proposée.

Walker (*J.-J.*). — D'une méthode générale dans l'analyse des courbes planes. (226-242).

L'auteur étudie un opérateur ternaire qui se présente dans l'étude de différentes questions relatives à l'intersection d'une courbe et de plusieurs droites, et il applique sa méthode à l'étude d'un problème relatif aux courbes du quatrième ordre, à savoir la détermination des points où la courbe est coupée par ses tangentes d'inflexion.

Smith (*H.-J.-S.*). — Sur les singularités des équations et des courbes modulaires. (242-272).

L'objet de cet important travail est la recherche des singularités caractéristiques de l'équation modulaire

$$F(p, q, 1) = 0,$$

où q est le carré du module d'une fonction elliptique donnée, p le carré du module transformé pour une transformation primaire de degré impair N, et l'étude de la courbe modulaire C qu'on obtient en remplaçant p, q par $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ dans l'équation précédente, ce qui donne l'équation homogène

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Désignons par P, Q, R les sommets du triangle $\alpha\beta\gamma$, par S le point $\alpha = \beta = \gamma$.

La méthode de recherche suivie par l'auteur a été déjà donnée dans ses travaux antérieurs, par exemple, dans une Note « Sur les équations modulaires », communiquée à l'Institut et imprimée en 1877 dans les *Atti d. Acc. d. Lincei.*

M. Smith considère d'abord le cas où N ne contient aucun diviseur carré; puis il considère le cas opposé. Voici un aperçu général des résultats :

Soient g, g' deux diviseurs conjugués de N, h^2 le plus grand carré contenu dans N; η le plus grand commun diviseur de g et de g', $f(\eta)$ le nombre des entiers égaux ou inférieurs à η et premiers à η; soient, en outre, $f'(g)$, $f'(g')$ définies par les équations

$$\frac{f'(g)}{g} = \frac{f(\eta)}{\eta} = \frac{f'(g')}{g'},$$
$$2\nu = \Sigma f(\eta), \qquad A + B = \Sigma f'(g), \qquad A_2 + B_2 = (A + B)^2,$$

la somme Σ s'étendant à tous les diviseurs de N, et A étant la somme des quantités $f'(g)$ pour lesquelles $g > \sqrt{N}$ [et, en même temps, si $N = \theta^2$, de $\frac{1}{2}f'(\theta)$], et A_2 contenant tous les termes du produit $\Sigma f'(g_1)$, $f'(g_2)$ pour lesquels $g_1 g_2 > N$ et la moitié de tous les termes pour lesquels $g_1 g_2 = N$. Désignons par m, n, K, J, D, T, H l'ordre, la classe, le nombre des points de rebroussement, d'inflexion, l'ordre et la classe du discriminant, et le genre de la courbe. Ces caractéristiques satisfont aux équations

$$
\begin{aligned}
m &= 2\mathrm{A}, \\
n &= 3\mathrm{A} - \mathrm{B} - \theta', \\
\mathrm{H} &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - 3\nu + 1, \\
\mathrm{K} &= 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - 6\nu + \theta', \\
\mathrm{J} &= 5\mathrm{A} - \mathrm{B} - 6\nu - 2\theta', \\
\mathrm{J} - \mathrm{K} &= 3\mathrm{A} - 3\mathrm{B} - 3\theta', \\
\mathrm{D} &= 4\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} + \mathrm{B} + \theta', \\
\mathrm{T} &= (3\mathrm{A} - \mathrm{B} - \theta')^2 - 5\mathrm{A} + \mathrm{B} + \theta, \\
\mathrm{T} - \mathrm{D} &= (2\mathrm{A} - \mathrm{B} - \theta')^2 - 4\mathrm{A}^2.
\end{aligned}
$$

Nous renverrons, pour les autres résultats qui concernent la nature des branches passant aux sommets du triangle de référence, au Mémoire de l'auteur.

Tome X; 1878-1879.

Rayleigh (Lord). — Sur l'instabilité des jets. (4-13).

L'auteur recherche quels sont les écarts à partir de la position d'équilibre qui se produisent dans un jet de fluide sous l'influence d'une perturbation donnée. Dans la première Partie il considère le cas où les forces perturbatrices sont de nature statique comme la capillarité et où l'on peut, par conséquent, faire abstraction de la translation de la masse entière du fluide. Dans la deuxième, il considère les perturbations qui se produisent dans les mouvements discontinus d'un fluide. Il considère le cas où, à l'intérieur d'un fluide, il existe une surface de séparation plane ou cylindrique telle, que de part et d'autre de cette surface les vitesses soient différentes pendant que la pression est la même. L'auteur étudie le cas où les forces perturbatrices modifient légèrement cette surface de séparation.

Crofton. — Sur les frameworks à six nœuds. (13-17).

L'auteur s'occupe d'une question très intéressante : si l'on considère n points, on sait qu'il faudra les relier par $2n - 3$ barres pour constituer un système solide; si ce système est soumis à l'action de n forces agissant sur les points et se faisant équilibre, en général, les tensions des $2n - 3$ barres seront déterminées. On peut le reconnaître directement; chaque point donne naissance à deux équations d'équilibre : on obtient ainsi $2n$ équations contenant comme inconnues les $2n - 3$ tensions. L'élimination de ces tensions donne en général les trois équations d'équilibre auxquelles doivent satisfaire les forces agissant dans un plan solide, et les équations se réduisent, toutes les fois que ces équations sont satisfaites, à $2n - 3$ équations du premier degré déterminant les tensions. Cela posé, l'auteur signale un cas exceptionnel où les $2n - 3$ équations ne pourraient pas déterminer les tensions et où par conséquent il y aurait plus de trois équations d'équilibre. Il est aisé de reconnaître que ce cas exceptionnel est caractérisé par la propriété que le système demeurerait en équilibre si l'on attribuait des tensions convenables aux barres dont il est composé.

Il est aisé de voir que ce cas exceptionnel ne se présente pas pour un nombre de points inférieurs à 6. Mais M. Crofton donne deux exemples différents de systèmes à six points dans lesquels il se présente. Dans l'un de ces exemples, les six points doivent être sur une conique; dans l'autre, les droites qui joignent deux à deux, d'une certaine manière, les six points doivent concourir en un même point.

Mc Coll (*H*). — Sur le calcul des propositions équivalentes (troisième Mémoire). (16-28).

Nous avons déjà fait connaître le but des recherches que l'auteur continue à développer dans ce travail.

Roberts (*S.*). — Sur des formes de nombres déterminées par la théorie des fractions continues. (29-41).

Dans sa dissertation inaugurale, *De æquationibus secundi gradus indeterminatis,* Göpel a beaucoup étendu la théorie de Legendre relative aux nombres premiers de la forme $4m+1$, en montrant que la théorie des fractions continues se prête à l'étude de la décomposition des nombres premiers de la forme $8m+3$ ou de leur double en un carré et le double d'un carré, de celle des nombres premiers de la forme $8m+7$ ou de leur double dans la différence entre un carré et le double d'un carré. Dans son Rapport sur la théorie des nombres (*British Association Reports,* 33e meeting), M. Smith a beaucoup généralisé ces théorèmes de Göpel. M. Roberts continue l'étude de ce sujet et indique de très nombreuses applications des considérations qu'il a développées dans le Mémoire paru au tome précédent des *Proceedings.*

Cayley (*A.*). — Théorème relatif aux fonctions elliptiques. (43-48).

Ce théorème est exprimé par l'équation suivante :

Si l'on a

$$u+v+r+s=0,$$

on aura aussi

$$-k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2}.$$

M. Cayley indique comment il y avait été conduit par l'étude des coordonnées elliptiques et il signale en même temps l'équation générale suivante, qui lui a été communiquée par M. Glaisher :

$$\begin{aligned}
&-k'^2 \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta),\\
&+\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\operatorname{cn}(\gamma+\delta)\operatorname{cn}(\gamma-\delta),\\
&-\frac{1}{k^2}\operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}(\gamma+\delta)\operatorname{dn}(\gamma-\delta),\\
&=-\frac{k'^2}{k^2}-\frac{2k'^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\gamma)(\operatorname{sn}^2\beta-\operatorname{sn}^2\delta)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)(1-k^2\operatorname{sn}^2\gamma\operatorname{sn}^2\delta)}.
\end{aligned}$$

Greenhill (*A.-G.*). — Sur les coefficients d'induction et de capacité de deux sphères électrisées. (48-55).

On considère deux sphères dont l'une est isolée et l'autre en communication avec le sol. L'auteur commence par définir ce qu'il faut entendre par coefficients d'induction et de capacité. Il en donne ensuite différentes expressions où figure le quotient différentiel d'une série hypergéométrique généralisée. Il montre, en terminant, que ses formules peuvent se transformer dans les expressions données par Poisson au moyen d'intégrales définies.

Tanner (H.-W.-Lloyd). — Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre contenant plusieurs fonctions inconnues. (55-74).

Ce travail se rattache à celui qui a été publié par l'auteur dans le volume précédent. Le système le plus simple considéré par l'auteur se compose de l'unique équation

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial z_m}{\partial x_m} = 0,$$

dont l'intégrale générale est donnée par la formule

$$z_i = (-1)^{i+1} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)},$$

où les $y_1, \ldots, y_n$ sont des fonctions entièrement arbitraires. M. Tanner considère ensuite un autre système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z_{12}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial (z_{1n})}{\partial x_n} = 0,\\
&\frac{\partial z_{21}}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z_{2n}}{\partial x_n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial (z_{n1})}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z_{n,n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0,
\end{aligned}$$

auquel il faut joindre les relations finies

$$z_{ik} + z_{ki} = 0, \quad z_{ik}z_{lm} + z_{il}z_{mk} + z_{im}z_{kl} = 0,$$

qui ne laissent subsister que $2n - 3$ fonctions inconnues et dont l'intégrale la plus générale est donnée par les formules

$$z_{ik} = (-1)^{i+k+1} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{n-2})}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)}.$$

L'auteur considère ensuite des systèmes de même nature que les précédents, mais un peu plus généraux, et il établit des propositions analogues à celles que nous venons de citer.

Halphen (G.). — Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles. (76-87).

L'auteur applique ses recherches sur la théorie des caractéristiques à la solution de la question énoncée dans le titre du Mémoire. Il montre d'abord qu'une condition quelconque est équivalente à la somme d'un nombre limité de conditions élémentaires; en sorte que le problème est ramené au suivant : Trouver le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions élémentaires.

Toute condition élémentaire, pour la définition de laquelle nous renvoyons au Mémoire de M. Halphen, est caractérisée par deux entiers positifs p et q. Cela posé, voici le théorème qui résume les recherches de l'auteur :

Soient cinq conditions élémentaires (p, q), (p', q'), (p'', q''), $p''', q''')$, $(p^{\text{iv}}, q^{\text{iv}})$, *rangées de telle sorte que l'on ait*

$$\frac{p}{q} \leqq \frac{p'}{q'} \leqq \frac{p''}{q''} \leqq \frac{p'''}{q'''} \leqq \frac{p^{\text{iv}}}{q^{\text{iv}}}.$$

Le nombre des coniques qui satisfont à ces cinq conditions est, dans tous les cas,

$$A = 8(2q+p)(2q'+p')(q''+p'')(q'''+2p''')(q^{\text{iv}}+2p^{\text{iv}}).$$

Smith (H.-J.-S.). — Note sur l'équation modulaire relative à la transformation du troisième ordre. (87-91).

Dans son Mémoire du Volume précédent, M. Smith avait montré que, si l'on pose

$$x = \frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}, \quad y = \frac{(1-\lambda^2+\lambda^4)^2}{\lambda^4(1-\lambda^2)^2},$$

on a, entre x et y, une équation du troisième ordre dont il avait donné le développement. M. Smith montre ici comment il a été conduit à ce résultat et comment il a calculé les coefficients numériques de l'équation.

Smith (H.-J.-S.). — Note sur la formule relative à la multiplication de quatre fonctions θ. (91-100).

M. Smith, dans le t. I des *Proceedings,* avait écrit cette formule sous la forme suivante. Si l'on pose

$$\theta_{\mu,\mu'}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{m\mu'} q^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2} e^{i(2m+\mu)x},$$

on aura

$$\begin{aligned}
&2\theta_{\mu_1,\mu'_1}(x_1)\,\theta_{\mu_2,\mu'_3}(x_2)\,\theta_{\mu_3,\mu'_3}(x_3)\,\theta_{\mu_4,\mu'_4}(x_4) \\
&= \prod_{j=1}^{j=4} \theta_{\sigma-\mu_j,\,\sigma-\mu'_j}(s-x_j) + \prod_{j=1}^{j=4} \theta_{\sigma-\mu_j,\,\sigma'-\mu'_j+1}(s-x_j) \\
&+ (-1)^{\sigma'} \prod_{j=1}^{j=4} \theta_{\sigma-\mu_j+1,\,\sigma'-\mu'_j}(s-x_j) + \prod_{j=1}^{j=4} \theta_{\sigma=\mu_j+1,\,\sigma'-\mu'_j+1}(s-x_j),
\end{aligned}$$

s, σ, σ' désignant les quantités définies par les équations

$$\begin{aligned}
2s &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\
2\sigma &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4, \\
2\sigma' &= \mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 + \mu'_4.
\end{aligned}$$

L'auteur déduit de cette formule générale onze formules particulières. Il les applique ensuite aux fonctions Al.

En terminant, il fait connaître la formule relative aux fonctions θ multiples, qui est analogue à la précédente.

Walker (*J.-J.*). — Preuve par les quaternions du théorème de Minding. (100-101).

Tait (*P.-G.*). — Démonstration par les quaternions du même théorème. (101-103).

Il s'agit ici du théorème énoncé en 1835, dans le *Journal de Crelle,* relativement aux faces appliquées à un corps dont l'orientation change.

Cockle (*J.*). — Sur les équations différentielles, totales et partielles; sur un nouveau cas soluble des premières et un cas exceptionnel des secondes. (105-120).

Ce travail traite de questions très variées. Nous signalerons en particulier la suivante. Si l'on considère l'expression

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz,$$

elle admettra trois facteurs différents suivant que l'on supposera x, y ou z constants.

L'auteur étudie les relations entre ces trois facteurs et il est ainsi conduit à deux fonctions qu'il propose de nommer *discriminoïdes.*

Dickson (*J.-D.-H.*). — Discussion de deux séries doubles servant au calcul du nombre des termes de déterminants d'une certaine forme. (120-122).

Si l'on désigne par $u_{n,r}$ le nombre des termes dans un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre dont la colonne principale contient r zéros, on aura

$$u_{n,r} = (n - r)\,u_{n-1\,r-1} + (r - 1)\,u_{n-1\,r-2},$$
$$u_{n,r} = u_{n,r+1} + u_{n-1,r}.$$

Ces formules permettent de calculer $u_{n,r}$. Le travail contient les résultats dans une Table à double entrée.

Clifford (*W.-K.*). — Note sur l'usage des fonctions de nombres alternés pour la détermination des invariants et des covariants des formes homogènes en général. (124-129). — Sur les sommes binaires de variables alternées. (214-221).

Ces deux Mémoires contiennent des propositions tirées par M. Spottiswoode des papiers qu'a laissés le regretté Clifford. Les nombres alternés dont il est question sont ceux qui ont été étudiés par Grassmann, Cauchy, etc., et dont le calcul est régi par les équations suivantes :

$$\alpha_i^2 = 0, \quad \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 = \ldots = 1,$$

qui permettent de décomposer tout déterminant en facteurs linéaires.

D'après cela, si l'on considère des formes linéaires par rapport à plusieurs séries de variables, il suffira de les multiplier pour obtenir leurs invariants simultanés, ceux qui correspondent à des substitutions linéaires indépendantes effectuées sur les variables de chaque série.

Hirst (A.). — Note sur les complexes engendrés par deux plans corrélatifs. (131-143).

Ce travail fait suite à celui qui a été inséré dans le t. V des *Proceedings*.

L'auteur y étudie le complexe du second degré que l'on obtient si, considérant deux plans corrélatifs, on joint un point A de l'un des plans à un point quelconque de la droite a qui correspond à ce point A dans l'autre plan. On obtient ainsi des droites appartenant à un complexe du second degré; mais à un complexe très particulier dont la surface des singularités se décompose en deux surfaces du second degré dont l'une est formée des deux plans considérés. L'auteur examine complètement toutes les propriétés du complexe dans leurs relations avec les deux plans d'où on l'a déduit.

Cayley (A.). — Sur un théorème relatif aux figures en relation conforme. (143-146).

Quand deux figures planes se correspondent point par point, à un élément ds de l'une des figures correspond un élément ds' de l'autre.

En augmentant ds dans le rapport $\frac{ds'}{ds}$ et en le faisant tourner de l'angle entre ds' et ds, on obtiendrait un élément égal et parallèle à ds'.

M. Cayley cherche dans quel cas l'extension et la rotation à faire subir à l'élément ds seront les mêmes pour tous les éléments ayant leur origine en un point et il trouve que cela a lieu dans le cas où la relation entre les deux points équivaut à une équation

$$f(r, r') = 0,$$

entre deux variables imaginaires

$$z = x + yi, \quad z' = x' + y'i.$$

Routh (E.-J.). — D'une méthode pour construire, par l'analyse, des fonctions X, Y,... qui possèdent la propriété exprimée par l'équation $\int XY\,d\sigma = 0$, et qui sont telles qu'une fonction donnée peut être développée en une série de la forme

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \ldots.$$

(146-167).

L'auteur étudie un problème d'Algèbre qui peut être considéré comme la généralisation de celui que l'on rencontre dans l'étude des surfaces du second degré, quand on cherche à déterminer le système de diamètres conjugués commun à deux surfaces du second degré de même centre.

Soient

$$V = A_1^2 X_1^2 + \ldots + A_n^2 X_n^2,$$

$$V = a_1 X_1^2 + \ldots + b_1 (X_2 - X_1)^2 + b_2 (X_3 - X_2)^2 + \ldots + b_{n-1} (X_n - X_{n-1})^2,$$

deux formes quadratiques; le système d'équations

$$(1) \qquad \frac{\partial U}{\partial X_i} = p\,\frac{\partial V}{\partial X_i}$$

détermine conjointement avec l'équation

$$V = H^2,$$

où H désigne une constante, n systèmes de valeurs pour $X_1, \ldots, X_n$. Soient $X_1, \ldots, X_n$; $X_1, \ldots, Y_n$ deux tels systèmes de valeurs. On aura

$$(2) \qquad A_1^2 X_1 Y_1 + \ldots + A_n^2 X_n Y_n = 0.$$

Cela posé, l'équation (1) peut s'écrire

$$a_i X_i + b_{i-1}(X_i - X_{i-1}) - b_i(X_{i+1} - X_i) = p A_i^2 X_i.$$

Si l'on considère maintenant X_m comme la valeur d'une fonction X de x correspondant à $x = m$, l'équation précédente devient une équation aux différences qu'il est aisé de transformer en une équation différentielle du second ordre, et l'équation (2) donne alors la propriété exprimée par l'équation

$$\int_0^l XY A_x^2\,dx = 0.$$

L auteur donne plusieurs autres propositions de même nature.

Tanner (*H.-W.-L.*). — Sur les déterminants à n dimensions. (167-180).

L'auteur fait remarquer que la notation topographique n'est plus applicable ici, et il emploie une notation qui peut être considérée comme la généralisation de la notation *ombrale* de M. Sylvester. Il fait voir comment un terme peut être représenté par un diagramme et comment on peut déterminer son signe. Puis il développe les propositions relatives à l'échange de deux séries d'indices dans chaque élément, propositions pour lesquelles il y a lieu de faire une distinction suivant que le degré du déterminant est pair ou impair. Ainsi un déterminant de degré pair ne change pas de valeur quand on échange deux séries quelconques d'indices dans tous les éléments. Au contraire, un déterminant d'ordre impair acquiert alors n valeurs différentes.

Walker (*J.-J.*). — Note sur les courbes planes. (180-185).

L'auteur traite successivement de la réduction de l'équation d'une cubique à la forme

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dw^3 = 0,$$

de certaines courbes dérivées et de l'enveloppe des diamètres d'une cubique.

Spottiswoode (*W.*). — Sur les vingt et une coordonnées d'une conique dans l'espace. (185-196).

De même qu'une droite peut être représentée par six coordonnées homogènes entre lesquelles existe une relation quadratique, de même une conique dans l'espace peut être définie par vingt et un nombres entre lesquels existent d'ailleurs de nombreuses identités qui laissent indépendantes seulement huit d'entre elles. L'auteur développe la condition pour que deux coniques se coupent et il montre que les coordonnées sont les mineurs d'un certain déterminant du cinquième ordre. Dans une Note à la suite du Mémoire, M. Cayley montre comment on peut écrire la condition pour qu'une droite rencontre la conique en fonction linéaire des vingt et une coordonnées.

Zeuthen (*H.-G.*): — Déduction de différents théorèmes géométriques d'un seul principe algébrique. (196-204).

Le principe algébrique employé par l'auteur est le suivant : soit $f = a_x^2\, \alpha_y^2$ une forme quadratique en x_1, x_2 et y_1, y_2, les deux discriminants par rapport aux x et par rapport aux y sont deux formes du quatrième degré qui ont les mêmes invariants.

M. Zeuthen en déduit un grand nombre de conséquences en considérant les correspondances (2, 2) qui se présentent dans plusieurs questions de Géométrie. Par exemple, si l'on considère les droites se coupant en un point variable d'une cubique et passant l'une et l'autre par un point fixe de la cubique, on a le théorème sur le rapport anharmonique des tangentes menées d'un point à une cubique. Le travail contient des applications plus nouvelles aux surfaces du second ordre d'un faisceau et aux courbes gauches.

Spottiswoode (*W.*). — Sur la représentation graphique employée par Clifford. (204-214).

Il s'agit ici de la représentation graphique des invariants donnée par Clifford pour les invariants, représentation qui est en rapport étroit avec celle qu'adoptent les chimistes pour représenter les combinaisons dans la théorie atomique.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

Tome XCIV; 1882.

N° 14; 3 avril.

Hermite. — Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce. (901).

La formule de Jacobi

$$\int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}\, dx = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}$$

renferme un logarithme dont les déterminations multiples répondent aux diverses valeurs que prend l'intégrale suivant le chemin décrit par la variable.

(¹) Voir *Bulletin*, VI_2, 73.

M. Hermite, dans le cas des fonctions complètes

$$\Pi(a) = \int_0^{K} \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx,$$

$$i\Pi'(a) = \int_K^{K+iK'} \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx,$$

cherche comment on doit lever l'indétermination, quand on suppose les deux intégrales rectilignes.

La formule de Jacobi donne

$$\Pi(a) = K \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \mu i \pi,$$

μ étant un entier qui est nul si a est réel, et si, en posant

$$a = p + iq,$$

q est compris entre $-K'$ et K'. Enfin $\Pi(a)$ est une fonction doublement périodique de la variable a continue entre les parallèles au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, aux distances

$$K', \quad 3K', \quad \ldots, \quad (2m-1)K'$$

de l'origine et qui change brusquement de valeur, en s'augmentant de la constante $i\pi$, lorsque, en franchissant une de ces droites, on s'élève au-dessus de l'axe des x réels.

Pour la seconde fonction complète de seconde espèce, on a

$$\Pi'(a) = K' \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\pi a}{2K} + \mu\pi.$$

Si le point a est compris entre les deux parallèles à l'axe des x purement imaginaires situées à la distance K de cet axe, on a

$$\mu = 0,$$

et pour tout point représenté par l'expression $a + 2mK$, a étant toujours compris entre les deux parallèles, on aura

$$\mu = m.$$

Saint-Venant (de). — Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. (904).

Darboux. — Sur une classe de courbes unicursales. (930).

Les propositions dont il s'agit ont été données par M. Darboux dans son cours à la Sorbonne en janvier 1880 : elles ont un rapport intime avec quelques-unes des intéressantes propriétés communiquées par M. Laguerre et relatives aux hypercycles.

Soient n droites $d_1, \ldots, d_n$. Si l'on marque sur ces droites des points $O_1, \ldots, O_n$, destinés à servir d'origine aux segments comptés sur ces droites, une droite variable δ interceptera sur ces droites fixes des segments $O_1A_1, \ldots, O_nA_n$. Si l'on assujettit ces n segments à satisfaire à la relation linéaire

$$\sum \lambda_i O_i A_i = k,$$

la droite δ enveloppera une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe au plus, admettant la droite de l'infini pour tangente $n - 1^{\text{ple}}$.

Si $n+1$ droites fixes interceptent sur une droite variable n segments entre lesquels a lieu une relation linéaire et homogène, la droite mobile enveloppe une courbe de la même nature.

On énoncera facilement les propositions réciproques.

On aperçoit là des généralisations immédiates de propriétés bien connues de la parabole. En faisant la perspective, on obtient des propositions qui sont les généralisations analogues des propriétés anharmoniques des tangentes à une conique quelconque.

Laguerre. — Sur les hypercycles. (933).

Appell. — Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels. (936).

Soit un parallélogramme élémentaire formé avec les périodes ω, ω'; soit C un cercle intérieur à ce parallélogramme et de centre O; soit E la position du parallélogramme extérieur à C; soit $f(x)$ une fonction aux périodes ω, ω' holomorphes dans E; soient x un point de E, C′ une circonférence de cercle de centre a, extérieure à C et assez voisine de C pour que x soit extérieur à C′; soit enfin

$$Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du},$$

la considération de l'intégrale

$$\int f(u)\, Z(u-x)\, du,$$

prise le long du parallélogramme, conduit aux formules

$$f(x) = \frac{A_0}{2\pi i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n Z^{(n)}(a-x),$$

$$2\pi i A_n = -\frac{1}{1.2\ldots n}\int_{C'} (u-a)^n f(u)\, du;$$

le coefficient de $Z(a-x)$ est nul.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ des points tous différents situés dans un parallélogramme des périodes et tels que, pour $\nu = \infty$, $\lim a_\nu = a$, $a_\nu = \infty$; soient, en outre, $f_1(x, a_1)$, $f_2(x, a_2)$, ... des fonctions méromorphes doublement périodiques ayant respectivement pour pôles les seuls points $a_1, a_2, \ldots$, il existe une fonction uniforme doublement périodique $F(x)$ admettant le point a pour point singulier essentiel et les points a_ν pour pôles, de telle façon que la différence $F(x) - f_\nu(x, a_\nu)$ soit régulière au point a_ν. C'est une généralisation du théorème de M. Mittag-Leffler sur les fonctions uniformes; M. Appell en déduit une généralisation analogue du théorème de M. Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (938).

Tarry. — Relation générale entre sept points quelconques d'une section conique. Conique d'homologie. Propriétés communes à trois figures homographiques. (941).

Conséquences de la proposition suivante :

Étant donnés deux triangles ABC et A'B'C' inscrits dans une conique, si par un point P de cette conique on mène une droite quelconque la coupant en un second point H et que sur cette droite PH on prenne un autre point quelconque D, les deux coniques HDABC et HDA'B'C' qui passent par les deux points H et D se coupent en deux autres points situés sur une droite fixe.

Cette droite fixe est la polaire du point P par rapport à la conique qui a pour triangles conjugués les deux triangles ABC et A'B'C'.

N° 15; 10 avril.

Tisserand. — Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. (997).

Dans une Note insérée dans les *Comptes rendus,* t. XCIII, p. 525, l'auteur s'est occupé d'une question traitée par Lagrange, concernant les déplacements séculaires des orbites de trois planètes; il indique aujourd'hui un cas particulier qui conduit à une question curieuse examinée par Le Verrier.

« Il existe entre Jupiter et le Soleil une position telle que, si l'on y plaçait une petite masse dans une orbite d'abord peu inclinée à celle de Jupiter, cette petite masse pourrait sortir de son orbite primitive et atteindre de grandes inclinaisons sur le plan de l'orbite de Jupiter par l'action de cette planète et de Saturne. Il est remarquable que cette position se trouve à très peu près à une distance double de la distance de la Terre au Soleil, c'est-à-dire à la limite inférieure de la zone où l'on a rencontré jusqu'ici les petites planètes... »

Les recherches de M. Tisserand confirment et précisent cette conclusion; en désignant par a le demi-grand axe de l'orbite d'une planète de petite masse m, l'auteur montre que l'inclinaison peut s'élever jusqu'à 25°, mais que, pour a non compris entre 1,98021 et 2,08021, le maximum de l'inclinaison devient égal à 7°.

Saint-Venant (de). — Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. (1004).

L'auteur a, dans une Communication antérieure (3 avril), traité ce problème en prenant pour point de départ les recherches de M. Boussinesq (*Savants étrangers,* t. XXIII) et en supposant la masse fluide indéfinie dans tous les sens au-dessus du plan de son fond. Il a indiqué en particulier un procédé graphique pour obtenir les lignes transformées des lignes fluides formées par les molécules dans l'intérieur du réservoir. Il complète ses recherches dans deux Communications (nos 15 et 17). Dans l'un, il substitue à ce procédé graphique, la continuation des courbes d'après leur équation en coordonnées polaires et fait des diverses formes qu'elles peuvent affecter, soit dans le passé, soit dans l'avenir, une discussion approfondie. Dans l'autre, il montre comment les résultats obtenus s'étendent avec une grande approximation au cas d'un large vase entretenu plein, pourvu que l'on ne considère que les parties du fluide éloignées des parois latérales. Enfin on peut obtenir la loi des vitesses dans des vases ou réservoirs des dimensions horizontales finies; il suffit pour cela de prolonger leurs fonds en les supposant percés, comme un crible, d'une infinité d'ouvertures disposées périodiquement, ou en multipliant à l'infini les orifices fictifs extérieurs au vase et de calculer au moyen de séries doubles les effets composés des appels que tous ces orifices exerceront sur les éléments du fluide donné.

Villarceau (*Y.*). — Essai philosophique sur la méthode nommée par son auteur *Science de l'ordre.* (1008).

A propos du Mémoire inséré dans le tome II des *Annales du Bureau des Longitudes,* où il a vérifié l'exactitude des formules de Wronski, M. Yvon Villarceau montre comment les réflexions les plus simples conduisent naturellement au choix des axes convenables pour l'étude du mouvement d'une masse sollicitée par une force prépondérante venue du Soleil et par des forces perturbatrices, comment on peut obtenir d'une façon rigoureuse l'équation différentielle de la trajectoire et deux intégrales premières du mouvement, en sorte qu'on n'a besoin de recourir à la méthode de la variation des constantes arbitraires que pour effectuer les intégrations restantes (deux intégrations du premier ordre).

Gonnessiat. — Observations de la comète a 1882, faites à l'Observatoire de Lyon. (1030).

Tacchini. — Observations des éruptions solaires en 1881. Spectre de la comète Wells. (1031).

Laguerre. — Sur les hypercycles. (1033).

Soient A, B, C, D les quatre tangentes communes à un hypercycle et à un cycle donné, soient C′ et D′ les tangentes conjuguées de deux quelconques d'entre elles, C et D; les quatre semi-droites A, B, C′ et D′ sont également tangentes à un même cycle. L'auteur examine diverses conséquences de cette proposition et donne en particulier la construction du cercle osculateur en un point quelconque de la courbe; le cas où les semi-droites A, B sont opposées est l'objet d'une étude spéciale. Il montre enfin que tout hypercycle (sauf un cas particulier) est la transformée par semi-droites réciproques d'une parabole. Le cas exceptionnel, examiné par M. Laguerre dans une Communication postérieure (n° 17), où il est impossible de transformer un hypercycle en une parabole, est celui où son paramètre p est nul. La courbe est alors de la troisième classe et est désignée par l'auteur sous le nom d'*hypercycle cubique;* elle peut être définie comme une courbe de troisième classe ayant une tangente double, touchant la droite de l'infini et passant par les ombilics du plan. M. Laguerre indique diverses propriétés intéressantes de ces courbes.

Picard (*E.*). — Sur l'intégration par les fonctions abéliennes de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre. (1036).

L'auteur s'occupe des équations aux dérivées partielles de la forme

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

où f est un polynôme, et qui admettent comme intégrales des fonctions abéliennes des deux variables x et y : il montre comment on peut, de cette équation, déduire un système de deux équations différentielles totales, donnant, s'il est possible, les solutions cherchées.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (1038).

Soit une équation différentielle linéaire quelconque

$$(1) \qquad \frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \ldots + P_1 \frac{dv}{dx} + P_0 v = 0.$$

Dans cette équation $P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}$ sont des fonctions rationnelles en x et en y, et y est lié à x par une relation algébrique

$$(2) \qquad f(x,y) = 0.$$

Une ou plusieurs des fonctions P deviendront infinies pour certaines positions du point analytique (x, y) ; ce seront les points singuliers de l'équation différentielle; à chacun d'eux correspondra une équation déterminante dont les racines pourront être imaginaires ou incommensurables ou bien être toutes des multiples de $\frac{1}{n}$, n étant un entier positif.

Dans ce dernier cas, le point singulier est de la première catégorie; dans le cas contraire, il est de la seconde catégorie.

Il existera en général deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$, jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental;

2° Si l'on fait

$$x = F(z), \quad y = F_1(z),$$

la relation (2) est vérifiée.

3° Quand z reste intérieur au cercle fondamental, le point analytique (x, y) ne peut passer par aucun point singulier de la seconde catégorie;

4° Si (x, y) passe par un point singulier de la première catégorie, $F(z)$ et $F_1(z)$ ont leurs $n-1$ premières dérivées nulles.

Alors les intégrales de l'équation (1) sont fonctions zétafuchsiennes de z.

L'auteur examine ensuite, dans le cas où il n'y a pas de points singuliers de la première ou de la seconde catégorie, les diverses formes auxquelles on peut amener le polygone qui correspond à ses fonctions fuchsiennes.

Dans le cas de $p = 1$, les fonctions F, F_1 se réduisent à des fonctions doublement périodiques, et l'on retrouve ainsi les résultats obtenus par M. Picard.

La même marche permet de retrouver aussi les résultats connus relativement à l'intégration algébrique des équations linéaires.

Enfin il y a d'autres manières d'exprimer x, y, v par des fonctions uniformes de z; on peut en particulier exprimer x et y par des fonctions fuchsiennes $F(z)$, $F_1(z)$ existant dans tout le plan.

Dans une Communication postérieure (n° 17), M. Poincaré expose le mode de formation d'une infinité de fonctions fuchsiennes qui sont toutes fonctions rationnelles de l'une d'entre elles $F(z)$, qui existent dans tout le plan, dont les points singuliers, isolés et en nombre infini, sont tous situés sur l'axe des quantités réelles, deviennent infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du deuxième ordre, lesquels sont eux-mêmes infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du troisième ordre, etc.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une seule variable. (1040).

Dans trois Communications successives (nos 15, 16, 17), M. Mittag-Leffler complète les beaux résultats concernant la forme des fonctions uniformes, d'après la nature de leurs singularités, dont on a rendu compte précédemment.

Soient données :

1° Une suite infinie de valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$, toutes intégrables et assujetties à la condition $\lim_{\nu=\infty} \operatorname{mod} a_\nu = R$, où R est une quantité positive quelconque;

2° Une suite de fonctions entières de la variable y, s'annulant toutes pour $y = 0$,

$$G_\nu(y) = C_1^{(\nu)} y + C_2^{(\nu)} y^2 + C_3^{(\nu)} y^3 + \ldots;$$

il est toujours possible de former une fonction analytique $F(x)$ ayant le caractère d'une fonction uniforme de x, tant que l'on a

$$\operatorname{mod} x < R,$$

n'ayant dans ce domaine d'autres points singuliers que $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et telle que, dans le voisinage de $x = a_\nu$, $F(x)$ puisse s'exprimer sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + P(x - a_\nu),$$

où $P(x - a_\nu)$ désigne, selon l'habitude, une série procédant suivant les puissances entières et positives de $x - a_\nu$. C'est toujours par le même procédé que l'on parvient à la formation de la fonction $F(x)$; cette fonction formée, on trouve de suite l'expression générale des fonctions qui jouissent de la même propriété en ajoutant une fonction arbitraire développable en série de Taylor dans le cercle $\operatorname{mod} x < R$.

Voici maintenant d'autres généralisations qui concernent le cas où l'ensemble (P) des valeurs singulières fournit un ensemble fini (P′) de points limites.

Supposons d'abord que (P′) se réduise à la seule valeur a et soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ l'ensemble (P — P′).

Soit donnée une suite infinie de fonctions entières de la variable y

$$G_\nu(y) = c_1^{(\nu)} y + c_2^{(\nu)} y^2 + \ldots;$$

il est toujours possible de former une fonction analytique

$$F(x;\ a_\nu;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

n'ayant d'autres points singuliers que les points (P) et telle que, pour chaque valeur déterminée de ν, la fonction $F(x)$ ait, dans le voisinage de a_ν la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+P(x-a_\nu).$$

Supposons maintenant que (P') comprenne m valeurs a; $\nu=1, 2,\ldots,m$, et que l'on ait décomposé les valeurs $(P-P')$ en m groupes $a_{\mu\nu}$; $\mu=1, 2,\ldots$; $\nu=1, 2,\ldots, m$, telles que le groupe $a_{\mu\nu}$, où $\mu=1, 2,\ldots$ et où ν est fixe, ait la seule valeur limite a_ν.

Soit donnée une suite de fonctions entières

$$G_{\mu\nu}(x)=c_1^{(\mu\nu)}y+c_2^{(\mu\nu)}y^2+c_3^{(\mu\nu)}y^3+\ldots,$$
$$(\mu=1,\ 2,\ \ldots;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Si l'on forme les m fonctions

$$F_\nu(x;\ a_{\mu,\nu};\ \mu=1,\ 2,\ \ldots),\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

telles que F_ν n'admette pas d'autres points singuliers que a_ν et $a_{\mu\nu}$; $\mu=1, 2,\ldots$, et que la différence

$$F_\nu-G_{\mu\nu}\left(\frac{1}{x-a_{\mu\nu}}\right)$$

ait, pour $x=a_{\mu\nu}$, une valeur finie et déterminée, la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m} F_\nu(x;\ a_{\mu\nu};\ \mu=1,\ 2,\ldots)$$

sera une fonction uniforme et homogène n'ayant d'autres points singuliers que les valeurs (P) et telle que, pour chaque valeur déterminée de $\mu\nu$, on puisse, dans le voisinage de $x=a_{\mu\nu}$, la mettre sous la forme

$$G_{\mu\nu}\left(\frac{1}{x-a_{\mu\nu}}\right)+P_{\mu\nu}(x-a_{\mu\nu}).$$

On en déduit immédiatement la forme la plus générale des fonctions qui ont ce même caractère.

Enfin M. Mittag-Leffler étend le même mode de formation à tous les cas où de l'ensemble des valeurs singulières (P) on peut déduire une suite limitée (P'), (P''),..., (P''), (P') étant l'ensemble des points limites de (P), (P'') l'ensemble des points limites de (P'),..., et (P'') étant nul.

Vaneček. — Sur l'inversion générale. (1042).

Voici la définition du mode d'inversion qu'étudie M. Vaneček. (1042).

Soient C une conique (*fondamentale*), D une droite (*directrice*) dans le plan de la conique et L une figure contenue dans le même plan; la polaire A d'un point a de L rencontrera D en un point a_1 dont la polaire A_1 passe par le pôle d de la droite D et par a.

Le point d'intersection a_2 de ces deux polaires est le transformé du point a.

Enfin on peut généraliser encore ce mode d'inversion en substituant une courbe quelconque à la directrice D.

Boussinesq. — Résistance d'une barre prismatique et homogène,

de longueur supposée infinie, au choc transversal et au choc longitudinal. (1044).

L'auteur montre que ce problème est compris dans celui du mouvement d'une barre qui, s'étendant le long de l'axe des x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, porterait à l'origine $x = 0$ une certaine masse étrangère, et y recevrait, après s'être trouvée primitivement en repos, des impulsions successives capables d'imprimer à cette masse étrangère, pour le cas où elle serait seule, des accélérations données $F(t)$: il résout ce dernier problème.

N° 16; 17 avril.

Bigourdan. — Observation des planètes (221), (222) (223), (224) et de la comète a 1882 (Wells), faites à l'Observatoire de Paris. (1101).

Bigourdan. — Éléments et éphémérides de la comète a 1882 (Wells) (1104).

Coggia. — Observations faites à l'Observatoire de Marseille. (1105).

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (1105).

Voir plus haut.

Darboux. — Sur une propriété du cercle. (1108).

On sait que, si l'on considère deux tangentes fixes d'un cercle et une tangente variable et si l'on attribue des sens convenables à ces trois droites, le périmètre du triangle qu'elles forment est constant. On peut énoncer cette proposition sous la forme suivante :

Si une courbe est telle que sa tangente forme avec deux droites fixes un triangle de périmètre constant, elle jouit de la même propriété quand on substitue aux deux droites une infinité d'autres systèmes de deux droites fixes.

Cette proposition admet la généralisation suivante :

Si l'on considère n couples de droites et une droite variable qui forme, avec les n couples des triangles dont les périmètres ont une somme constante, cette droite variable enveloppera une courbe unicursale qui conservera la même définition quand on substituera aux couples primitifs n autres couples dépendant de deux paramètres arbitraires.

Les courbes auxquelles on est ainsi conduit peuvent être caractérisées de la manière suivante : elles sont d'une classe quelconque m, elles admettent la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $m - 2$ et de plus elles coupent cette droite aux points à l'infini sur le cercle. Exceptionnellement elles peuvent admettre la droite de l'infini comme tangente multiple d'ordre $m - 1$ et se réduire à des courbes considérées par l'auteur dans une Communication précédente.

Réciproquement, chacune de ces courbes admettra la génération précédente; il faudra prendre n triangles si la courbe est de la classe $2n$ ou $2n-1$. Pour démontrer cette propriété, on est conduit à étudier la question suivante, qui a été, de la part de M. Stephanos, l'objet de recherches approfondies : Étant donnée une forme binaire homogène de degré pair $2n$, déterminer deux formes de degré $n+1$ dont elle soit la jacobienne. L'auteur indique une généralisation de la définition donnée et termine par l'énoncé de la proposition suivante :

Considérons une courbe unicursale de classe n, admettant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $n-2$. En général, cette courbe qui touche en $n-2$ points la droite de l'infini la coupera en outre en deux autres points, distincts des points de contact. Si ces deux points viennent se confondre à la fois avec les points à l'infini sur le cercle et avec deux des $n-2$ points de contact, les $n-3$ segments interceptés sur la tangente variable à la courbe par les $n-2$ tangentes doubles de cette courbe seront liés par une relation linéaire.

Brassinne. — Sur un passage de la *Mécanique analytique* relatif au principe de la moindre action. (1110).

L'auteur déduit de ce passage la proposition suivante :

Un système de corps est en mouvement et chacun d'eux a une vitesse particulière; le principe de la moindre action établit une relation entre la force vive totale développée et le temps nécessaire pour la produire.

Si, dans les mêmes conditions, on fait varier les masses et les vitesses, de telle sorte que la quantité de mouvement de chacun ne change pas, la force vive totale variera en proportion du temps employé à la produire.

N° 17; 24 avril.

Saint-Venant (de). — Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. (1139).

Voir plus haut.

Laguerre. — Sur les hypercycles. (1160).

Voir plus haut.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (1163).

Voir plus haut.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (1166).

Voir plus haut.

Méray (C.). — Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré. (1167).

Étant donné un système quelconque de m équations du premier degré à coefficients entiers (positifs, nuls ou négatifs) entre les $n(\geqq m)$ inconnues $x, y, z, \ldots s, t, \ldots, u, v$:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 s + h_1 t + \ldots + i_1 u + j_1 v + k_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v + k_m = 0, \end{cases}$$

assigner, quand ils existent, tous ses systèmes de solutions entières.

On suppose que les déterminants d'ordre m tirés du tableau des coefficients ne soient pas tous nuls.

Nommons indéfiniment (k) les $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ déterminants formés par l'association de m quelconques des n premières lignes du tableau des coefficients et k les $\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}$ déterminants de même ordre formés par l'association de la dernière colonne de ce tableau avec $m-1$ quelconques des n premières.

Pour que le système (1) admette quelques systèmes de solutions entières, il est nécessaire et suffisant que le plus grand entier positif d qui divise tous les déterminants (h) divise aussi tous les déterminants (k). Cette condition étant remplie, tous les systèmes de solutions sont donnés, chacun une seule fois, par des formules

$$\begin{gathered} x = \xi + x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_{n-m}\theta_{n-m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = \varphi + v_1\theta_1 + v_2\theta_2 + \ldots + v_{n-m}\theta_{n-m}, \end{gathered}$$

dans lesquelles toutes les lettres désignent des entiers précisant les propriétés suivantes : 1° les $n-m$ nombres θ sont absolument indéterminés; 2° le déterminant de $n-m$ colonnes quelconques du tableau

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & \ldots v_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ x_{n-m} & y_{n-m} & z_{n\ m} & \ldots v_{n-m}, \end{matrix}$$

est égal au quotient par d de celui des déterminants (k) dont les éléments ne servent pas de coefficients aux inconnues désignées par les lettres qui figurent dans les $n-m$ colonnes en question; par suite, tous les déterminants d'ordre $n-m$ ont 1 pour plus grand commun diviseur.

N° 18; 1er mai.

Jordan. — Rapport sur un Mémoire de M. Stephanos intitulé : *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne*. (1230).

Nous extrayons ce qui suit de ce Rapport :

« .... Dans la première Partie de son Mémoire, M. Stephanos prend pour point de départ la définition suivante, introduite par M. Rosanes :

Deux formes f et f_1, d'ordre $m+1$, sont dites *conjuguées* si l'invariant simultané linéaire par rapport aux coefficients des deux formes est égal à zéro.

Les formes conjuguées à une même forme f constituent un réseau à m paramètres

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_{m+1} f_{m+1},$$

dont l'auteur donne l'expression générale en fonction des racines, égales ou inégales, de l'équation $f = 0$.

Soit plus généralement

$$(1) \qquad af + a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k$$

un réseau de formes à k paramètres.

Les formes conjuguées à toutes celles de ce réseau constituent un second réseau à $m - k$ paramètres

$$(2) \qquad a_{k+1} f_{k+1} + \ldots + a_{m+1} f_{k+1}.$$

Ces deux réseaux ont les mêmes covariants. Cette proposition importante, que M. Stephanos établit d'une manière aussi simple qu'ingénieuse, doit être considérée comme la clef de son analyse.

M. Gordan avait en effet montré que les covariants du faisceau (1) (combinant des formes $f, f_1, \ldots, f_k$) coïncident avec les covariants d'une forme unique à $k+1$ séries de variables. M. Stephanos substitue à cette forme la forme équivalente relative au réseau conjugué. Cette expression contient encore un facteur superflu qu'il supprime. Il remplace enfin, à l'exemple de M. Gordan, cette forme unique à plusieurs séries de variables par un système équivalent de eovariants élémentaires à une seule série de variables.

Appliquant ces considérations générales au cas particulier d'un faisceau de formes

$$af + a_1 f_1,$$

M. Stephanos en tire une série de relations entre les covariants élémentaires de M. Gordan relatifs à ce faisceau, ainsi que entre ces covariants et une forme quelconque du faisceau; il en déduit en particulier :

1° L'expression générale des jacobiennes des faisceaux qui contiennent une forme donnée;

2° La condition pour qu'une forme f divise la jacobienne d'un faisceau contenant une autre forme φ. Il est remarquable que cette condition soit symétrique par rapport aux deux formes f et φ.

Nous citerons encore la proposition suivante :

Si deux faisceaux

$$af + a_1 f_1 \quad \text{et} \quad a_2 f_2 + a_3 f_3$$

ont la même jacobienne, à tout faisceau contenu dans le réseau

$$af + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$$

correspondra un faisceau complémentaire ayant la même jacobienne.

Dans la seconde partie de son Mémoire, M. Stephanos résout dans tous ses détails le problème suivant :

« Déterminer les faisceaux de formes biquadratiques qui ont pour jacobienne une forme donnée du sixième ordre. »

Ces faisceaux ont, en outre de α, un second covariant élémentaire θ du second ordre; ils seraient complètement déterminés si θ était connu.

Mais θ peut lui-même être déterminé au moyen de la relation qui le lie à α et qui a été donnée dans la première Partie du Mémoire. En discutant cette condition, on trouve que la fonction inconnue θ s'exprime au moyen des covariants de α et d'un invariant irrationnel I, dépendant d'une équation du cinquième degré. Le problème comporte donc cinq solutions.

Soient $I_1, \ldots, I_5$ les racines de l'équation en I, $\theta_1, \ldots, \theta_5$ les valeurs correspondantes de θ. Si nous posons, pour abréger,

$$i = (\alpha, \alpha)_4, \quad A = (\alpha, \alpha)_6,$$
$$\theta_{rs} = (\theta_r, \theta_s)_2, \quad G_k = -\frac{15\lambda}{2A + 15 I_k},$$

λ désignant une constante, on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma G_k = 0, \quad \Sigma \theta_k = 0, \quad \Sigma G_k \theta_k = 0, \quad \Sigma G_k \theta_k^2 = 0, \\ i = \frac{1}{5} \Sigma \theta_k^2, \quad \alpha = \frac{1}{5\lambda} \Sigma G_k \theta_k^3, \end{array} \right.$$

Réciproquement, si l'on a cinq formes quadratiques θ_k et cinq constantes G_k différentes de zéro liées par des relations telles que (3), les formes θ_k seront les covariants quadratiques de cinq faisceaux ayant pour jacobienne la fonction

$$\alpha = \frac{1}{5\lambda} \Sigma G_k \theta_k^3.$$

Deux des formes θ deviennent égales si l'équation en I admet la racine $-\frac{2A}{15}$; elles restent distinctes, bien que l'équation en I admette des racines égales, lorsque l'invariant gauche de α est nul.

M. Stephanos cherche ensuite à déterminer des formes quadratiques y et n définies par la relation

$$(\alpha, n)_1 + yn = 0.$$

Ce problème comporte une infinité de solutions si α est un cube parfait. Dans le cas contraire, il n'en existe que dix, qu'on obtient généralement en posant

$$y_{rs} = \theta_r + \theta_s, \quad n_{rs} = \lambda(\theta_r - \theta_s),$$

λ désignant un facteur constant.

La forme n_{rs} jouit de cette propriété remarquable, que son carré est conjugué aux formes des faisceaux correspondants à θ_r et à θ_s.

M. Stephanos déduit de cette proposition une construction géométrique très élégante des cinq faisceaux cherchés...

Barnaud et *Leygne*. — Détermination de la différence de longitude entre Paris et Besançon. (1234).

Appell. — Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. (1238).

Les cercles qui limitent l'aire S considérée par l'auteur tournent tous leur convexité vers l'intérieur de S : si α_k est le centre du cercle C_k, on aura

$$\text{Nord} \left| \frac{z - \alpha_k}{x - \alpha_k} \right| < 1;$$

z étant un point du contour, x un point de S_1, on aura donc

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{x-\alpha_k}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(\frac{Z-\alpha_k}{x-\alpha_k}\right)^\nu;$$

en substituant cette série à la place de $\frac{1}{z-x}$ dans la portion de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

qui correspond au cercle C_k et procédant de même pour les autres arcs de cercle, on mettra $f(x)$ sous forme d'une série de fractions rationnelles; cette série représentera zéro dans l'aire extérieure à tous les cercles auxquels appartiennent les arcs tels que C_k.

En supposant la même aire située à l'intérieur d'un parallélogramme de côtés ω, ω', en supposant en outre que les aires S', S'', ..., homologues à S dans les parallélogrammes du réseau défini par le premier parallélogramme n'empiètent sur aucun des cercles auxquels appartiennent les arcs C_k, en prenant enfin pour point de départ l'intégrale

$$\int f(z)\,Z(z-x)\,dx,$$

l'auteur parvient à un développement analogue en série de fonctions doublement périodiques.

Picard (*E.*). — Sur certaines formes quadratiques ternaires. (1241).

La considération du groupe de substitutions linéaires considérées par M. Picard dans les Communications antérieures (février et mars 1882) le conduit à isoler des formes quadratiques ternaires générales certaines formes particulières dont il développe les propriétés.

Draper. — Sur des photographies du spectre de la nébuleuse d'Orion. (1243).

N° 19; 8 mai.

Darboux. — Sur la représentation sphérique des surfaces. (1290).

Dans une Communication antérieure, M. Darboux a établi la proposition suivante :

Considérons une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = A\frac{\partial z}{\partial\rho} + B\frac{\partial z}{\partial\rho_1} + Cz, \tag{1}$$

où A, B, C sont des fonctions de ρ et ρ_1.

Supposons que l'on connaisse quatre solutions particulières de cette équation, liées par une relation homogène du second degré. On pourra toujours, en combinant linéairement ces solutions, ramener cette relation à la forme

$$u^2 + v^2 + w^2 = p^2. \tag{2}$$

Cela posé, les équations

$$x = \frac{u}{p}, \quad y = \frac{v}{p}, \quad z = \frac{w}{p}$$

définissent toujours un système orthogonal (A), formé des lignes

$$\rho = C, \quad \rho_1 = C_1.$$

De plus, si θ désigne une solution nouvelle quelconque de l'équation aux dérivées partielles, le plan

$$uX + vY + wZ + \theta = 0$$

enveloppera, quand ρ et ρ_1 prendront toutes les valeurs possibles, une surface dont les lignes de courbure auront pour image sphérique les courbes du système orthogonal (A).

Voici maintenant des conséquences de ce théorème :

Supposons que l'équation aux dérivées partielles appartiennent à la classe de celles qui admettent quatre solutions particulières de la forme

$$z_1 = A_1 B_1, \quad z_2 = A_1 B_2, \quad z_3 = A_2 B_1, \quad z_4 = A_2 B_1,$$

où A_1, A_2 sont des fonctions d'une seule variable, solutions particulières d'une même équation linéaire du second ordre, et B_1, B_2 des fonctions d'une autre variable, définies également par une équation linéaire du second ordre; il est clair que les quatre solutions particulières précédentes sont liées par la relation du second degré

$$z_1 z_4 = z_2 z_3,$$

et l'on pourra appliquer le théorème fondamental.

En particulier, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = i[f(\alpha + i\beta) - \varphi(\alpha - i\beta)]z \tag{3}$$

admet comme solution particulière le produit d'une fonction P de $\alpha + i\beta$ par une fonction Q de $\alpha - i\beta$, et si l'on prend par P_1, P_2 les intégrales de l'équation

$$P'' = P[f(\alpha + i\beta) + m] \tag{4}$$

où m est une constante et pour Q_1, Q_2 celles de l'équation

$$Q'' = Q[\varphi(\alpha - i\beta) + m]$$

on verra facilement que les quatre solutions de l'équation aux dérivées partielles (3)

$$\begin{aligned} u &= P_1 Q_2 + P_2 Q_1, & w &= P_1 Q_1 + P_2 Q_2, \\ v &= i(P_2 Q_1 + P_1 Q_2), & p &= P_1 Q_1 + P_2 Q_2, \end{aligned}$$

vérifient la relation (2), et, par suite, définissent un système sphérique orthogonal. Si les fonctions f et φ sont imaginaires conjuguées, et si Q_1 et Q_2 sont les solutions respectivement conjuguées à P_1, P_2, ce système sera réel, et il est aisé de voir qu'il sera isotherme. Ce système et ceux qui s'en déduisent en remplaçant P_1 et P_2 par d'autres solutions de l'équation (4) sont dits *correspondants* à l'équation

$$y'' = y[f(x) + m].$$

On peut ramener à la forme (3) l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho_1 \partial\rho_2} = -\frac{m(m+1)}{(\rho - \rho_1)^2} z,$$

étudiée par Euler et par Poisson; en cherchant à ramener à la même forme l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{m(m+1)\,A'B'}{(A-B)^2},$$

où A est une fonction de α, B une fonction de β, équation qui se déduit d'ailleurs de la précédente, M. Darboux parvient à la conclusion suivante :

On saura trouver toutes les surfaces ayant pour représentation sphérique les systèmes isothermes correspondant aux trois équations

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{x^2} - h^2\right],$$

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{\sin^2 x} - h^2\right],$$

$$y'' = y\,[m(m+1)\,k^2 \operatorname{sn}^2 x + h].$$

Les formules d'intégration définissant la surface ne contiendront les fonctions arbitraires sous aucun signe d'intégration définie, tant que m sera entier.

Cette proposition comprend tout ce que l'on sait relativement aux surfaces à lignes de courbures planes, à celles dont la représentation est formée d'ellipses sphériques orthogonales, etc. On trouve une infinité de surfaces algébriques dont les lignes de courbure sont algébriques.

Dans une autre Communication sur le même sujet, M. Darboux montre comment on peut étendre les résultats précédents à des systèmes isothermes, contenant des constantes dont le nombre croîtra indéfiniment.

On doit à M. Moutard la proposition suivante : Toutes les fois que l'on sait intégrer l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \lambda z,$$

on sait aussi trouver l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \omega\,\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,z,$$

où ω désigne une solution particulière de l'équation (4).

En appliquant ce résultat aux équations de la forme (3) et en choisissant pour ω une solution de la forme $\omega = \theta(\alpha + i\beta)\sigma(\alpha - i\beta)$, on sera conduit à l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = i\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' - \sigma\left(\frac{1}{\sigma}\right)''\right] z,$$

qui est de même forme que l'équation (3); donc :

Toutes les fois que l'on saura résoudre le problème de la représentation sphérique pour les systèmes orthogonaux correspondant à l'équation

$$y'' = yf(x), \tag{6}$$

on saura aussi la résoudre pour les systèmes correspondant à l'équation

$$y'' = y\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' + m\right], \tag{7}$$

où θ *désigne une solution de l'équation* (6). *Plus généralement, chaque solution particulière du premier problème donnera, par une quadrature, une solution du second.*

Cette proposition se trouve, en quelque sorte, complétée par le curieux théorème que voici :

Toutes les fois que l'on saura intégrer, pour toutes les valeurs de la constante m, l'équation linéaire

$$y'' = y[f(x) + m], \tag{8}$$

on pourra aussi intégrer l'équation

$$y'' = y\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' + m\right], \tag{9}$$

θ *désignant une intégrale particulière de l'équation* (8), *où l'on a fait* $m = \nu$; *l'intégrale de l'équation précédente sera*

$$y = u' - u\frac{\theta'}{\theta},$$

u désignant l'intégrale générale de l'équation (8).

Bouquet de la Grye. — Sur les marées de l'île Campbell. (1293).

N° 20; 15 mai.

Mouchez. — Observations des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris, pendant le premier trimestre de l'année 1882. (1327).

Haton de la Goupillière. — Tambours spiraloïdes pour les câbles d'égale résistance. (1338).

Darboux. — Sur la représentation sphérique des surfaces. (1343).

Voir plus haut.

Resal. — Note sur l'application d'un théorème de Poncelet au calcul approximatif des arcs des courbes planes.

Le théorème dont il s'agit concerne l'approximation avec laquelle on peut substituer une expression linéaire de la forme $\alpha u + \beta v$ à un radical de la forme $\sqrt{u^2+v^2}$. M. Resal substitue d'après cette règle l'expression

$$ds = \beta\, dx + \alpha\, dy$$

à l'expression exacte

$$ds = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\, dx.$$

Janssen. — Observations faites pendant l'éclipse du 17 mai. (1388).

Cruls. — Sur les observations de la comète télescopique à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (1400).

André (*Ch.*). — Sur un nouveau cas de formation du ligament noir et de son utilité pour l'observation du passage de Vénus. (1401).

Poincaré. — Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires. (1402).

Considérons deux équations différentielles linéaires

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_{m-1}\frac{d^{m-1}_y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_1\frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P'_{m-1}\frac{d^{m-1}_y}{dx^{m-1}} + \ldots + P'_1\frac{dy}{dx} + P'_0 y = 0,$$

où les P et les P′ sont des fonctions rationnelles en x et en z, z étant défini en fonction de x par une relation algébrique

$$f(x, z) = 0.$$

M. Poincaré dit que les deux équations sont de la même *famille* si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme

$$\Lambda\left(Q_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + Q_{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + Q_0 y\right),$$

y étant l'intégrale générale de la première, les Q étant des fonctions rationnelles de x et de z et Λ une fonction quelconque de ces variables. Si les fonctions P et P′ sont de degré déterminé, il y aura certaines fonctions de leurs coefficients qui auront la même valeur pour toutes les équations d'une même famille; ce sont les *invariants de famille*.

L'auteur montre comment on peut déterminer et étudier les invariants de famille, sur les équations de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \theta y = 0,$$

où θ est une fonction rationnelle de x seulement.

Picard (E.). — Sur les fonctions uniformes affectées de coupures. (1405).

En supposant que, pour une telle fonction, les coupures soient rectilignes et en nombre fini n, M. Picard montre que la fonction considérée $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k(z),$$

où la fonction $\varphi_k(z)$ est continue et uniforme, sauf pour la $k^{\text{ième}}$ coupure.

Il établit aussi, pour les fonctions de cette nature, un théorème sur la possibilité de leur décomposition en facteurs primaires.

N° 22; 29 mai.

Ledieu. — Du cycle de raisonnement. Son emploi pour valider les hypothèses et les propositions fondamentales de toute science. Application à la Mécanique. (1441).

D'Abbadie et *Tisserand.* — Rapport sur un Mémoire de M. *Bouquet de la Grye* intitulé « Étude sur les ondes à longues périodes dans les phénomènes des marées ». (1446).

Darboux. — Sur une proposition relative aux équations linéaires. (1456).

Cette proposition a été énoncée à la fin de l'analyse des Communications de M. Darboux sur la représentation sphérique des surfaces. L'auteur en donne la démonstration.

Bouniakowski. — Démonstration d'un théorème relatif à la fonction $E(x)$. (1459).

Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$, on a

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-5}{4}} E(\sqrt{\mu p}) = \frac{(p-1)(p-5)}{12}.$$

Barbier (E.). — Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face. (1461).

Vaneček. — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1463).

Voici en quoi consiste ce mode de transformation.

Considérons une surface F du second ordre, puis une courbe L du $l^{ième}$ ordre, une courbe M de l'ordre m et une surface P de l'ordre p.

La courbe L doit être transformée par rapport à la surface fondamentale, à la courbe M et à la surface P.

Un point l de la courbe L a un plan polaire λ par rapport à la surface fondamentale F. Ce plan λ coupe la courbe M en divers points, le plan polaire μ de l'un d'eux m détermine avec λ une droite $\lambda\mu$ qui perce la surface P en p points. Considérons entre eux un seul point p, dont le plan polaire π coupe la droite $\lambda\mu$ en un point r; le point r est le transformé du point l.

Boussinesq. — Sur un potentiel à quatre variables, qui rend presque intuitive l'intégration de l'équation du son et la démonstration de la formule de Poisson concernant le potentiel inverse à trois variables. (1465).

Soient m une masse quelconque fixe, dans un espace rapporté à trois axes de coordonnées rectangles x, y, z et ρ, ou $\rho(x_1, y_1, z_1)$ la densité de la partic $dm = \rho d\varpi$ de cette masse qui remplit l'élément de volume $d\varpi$ occupant la situation (x_1, y_1, z_1). Imaginons qu'on décrive, d'un point donné (x, y, z) comme centre et avec un rayon donné r, une sphère dont $\sigma = 4\pi r^2$ désignera la surface, puis qu'on évalue, pour chacun des éléments $d\sigma$ de cette surface, ayant les coordonnées x_1, y_1, z_1, l'expression $\frac{\rho d\sigma}{r}$, et qu'on fasse la somme des valeurs qu'elle prend sur tous les éléments de σ. On obtiendra ainsi l'intégrale double $\varphi = \int \frac{\rho d\sigma}{r}$, fonction des quatre paramètres x, y, z, r définissant la sphère; c'est cette fonction que l'auteur appelle potentiel à quatre variables, ou sphérique.

Cette fonction et sa dérivée par rapport à r vérifient l'équation

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \tag{1}$$

à la limite $r = 0$, la fonction φ s'annule, sa dérivée par rapport à r est égale à $4\pi\rho(x, y, z)$, la dérivée seconde par rapport à r est nulle : il suffira donc de superposer ces deux solutions en y prenant les deux fonctions arbitraires $4\pi\rho(x, y, z)$ différentes, pour avoir l'intégrale générale de (1) avec les deux fonctions arbitraires de x, y, z auxquelles on voudra que se réduisent, pour $r = 0$, φ et $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$.

L'auteur applique l'équation (3) aux mouvements produits dans un fluide élastique indéfini par de petites dilatations ou ramifications primitives données.

N° 23; 5 juin.

Wolf (C.). — Histoire des étalons du mètre. (1503).

Dans le travail communiqué à l'Académie le 8 août 1881 et qui a paru en entier dans les *Annales de Chimie et de Physique,* M. Wolf n'avait pu suivre l'histoire des deux mètres de l'Observatoire et du Conservatoire qu'à partir du

16 ventôse an VIII, date de lenr échelonnage définitif par Lefèvre-Gineau, Coulomb, Delambre et Méchain. Une facture de Lenoir, faisant partie des Archives de l'Académie, permet à M. Wolf de remonter un peu plus haut et d'ajouter quelques détails intéressants à ceux que nous a laissés Delambre sur la fabrication du mètre définitif.

Boussinesq (*J.*). — Sur les ondes produites par l'émersion d'un solide à la surface d'une eau tranquille, quand il y a lieu de tenir compte des deux coordonnées horizontales. (1505).

N° 24; 12 juin.

Resal (*H.*). — Sur un point de la théorie mathématique du jeu de billard. (1548).

L'auteur traite du choc d'une bille assujettie à se mouvoir sur un plan (S) contre un autre plan (S′) perpendiculaire au précédent. Il montre comment on peut tenir compte du frottement et déterminer le mouvement de la bille à la fin du choc.

Lœwy (*M.*). — Programme des travaux astronomiques à effectuer par l'expédition scientifique envoyée au pôle sud. (1561).

Mouchez. — Observation du passage de Vénus au cap Horn. (1563).

Vaneček (*J.-S.*). — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (583).

L'auteur étend aux surfaces le mode de transformation qu'il a déjà appliqué aux courbes dans sa précédente Communication.

Deprez (*M.*). — Sur la loi suivant laquelle varie la force électromotrice d'une machine magnéto-électrique en fonction de la résistance du circuit extérieur. (1586).

N° 25; 19 juin.

Thollon. — Éclipse totale du Soleil observée à Souhag (haute Égypte) le 17 mai (temps civil) 1882. (1630).

Trépied. — Observation de l'éclipse totale du 17 mai. (1636).

Puiseux (*A.*). — Sur l'éclipse du 17 mai. (1643).

Darboux (*G.*). — Sur une équation linéaire. (1645).

L'auteur considère l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\mu(\mu+1)}{\operatorname{sn}^2 x} + \frac{\mu'(\mu'+1)\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} + \frac{\mu''(\mu''+1)k^2\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x} + n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2 x + h\right],$$

et montre qu'on peut lui appliquer les méthodes que M. Hermite a fait connaître pour l'équation de Lamé.

Boussinesq (*J.*). — Les déplacements qu'entraînent de petites dilatations ou condensations quelconques produites dans tout milieu homogène et isotrope indéfini sont calculables à la manière d'une attraction newtonienne. (1648).

N° 26; 26 juin.

Gyldén (*H.*). — Sur la seconde comète de l'année 1784. (1686).

Tannery (*J.*). — Sur les intégrales eulériennes. (1698).

On sait que M. Prym a montré que la fonction $\Gamma(x)$ peut se mettre sous la forme $\Gamma(x) = P(x) + Q(x)$, où l'on a

$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x+2} - \ldots,$$

et où $Q(x)$ est une fonction transcendante entière. On obtient aisément le coefficient de x^n dans le développement en série de $Q(x)$ sous forme d'une intégrale définie; mais la complication de cette intégrale définie fait désirer la connaissance d'un autre développement plus simple. M. Tannery est parvenu, dans le cas où la variable x est réelle, à l'expression suivante:

$$eQ(x) = \cfrac{1}{2 - x - \cfrac{1(1-x)}{4 - x - \cfrac{2(2-x)}{6 - x - \cfrac{3(3-x)}{8 - x - \ldots}}}},$$

dont il donne la démonstration.

Appell. — Sur les fonctions abéliennes. (1702).

Généralisation des théorèmes sur le nombre des zéros et des infinis d'une fonction doublement périodique compris dans un même parallélogramme élémentaire.

Considérons les p fonctions abéliennes

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_p &= f_1(u_1, \ldots, u_p) = s_1, \\ x_1x_2 + \ldots \quad &= f_2(u_1, \ldots, u_p) = s_2, \\ x_1, \ \ldots, \ x_p &= f_p(u_1, \ldots, u_p) = s_p. \end{aligned}$$

Si l'on donne à $s_1, \ldots, s_p$ des valeurs déterminées, les équations précédentes donneront pour $u_1, \ldots, u_p$ une infinité de systèmes de valeurs; imaginons ces systèmes partagés en groupes de telle façon que deux systèmes de valeurs

$$u'_1, \ldots, u'_p \quad \text{et} \quad u''_1 - u''_p$$

se trouvent dans des groupes différents ou dans le même groupe suivant que les différences

$$u'_1 - u''_1, \ldots, u'_p - u''_p$$

forment ou non un système de périodes. M. Appell démontre les deux théorèmes suivants :

1° Le nombre des systèmes appartenant à un même groupe est m^p, quels que soient $s_1, s_2, \ldots, s_p$;

2° Les m^p systèmes de valeurs formant un même groupe se partagent de plusieurs façons en m^{p-1} sous-groupes formés chacun de m systèmes tels que, si l'on désigne par

$$\begin{array}{lll} u_1, & \ldots, & u_p, \\ u'_1, & \ldots, & u'_p, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ u_1^{(m-1)}, & \ldots, & u_p^{(m-1)} \end{array}$$

les m systèmes de l'un de ces sous-groupes, on ait les relations

$$u_i + u'_i + \ldots + u_i^{(m-1)} = C_i,$$

dans lesquelles les C_i sont des constantes indépendantes des valeurs attribuées à $s_1, \ldots, s_p$.

Picard (E.). — Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. (1704).

Complément à une Communication du 9 mars 1881, où l'auteur a examiné des cas de réduction des intégrales hyperelliptiques du premier genre aux fonctions elliptiques. Après avoir rappelé ses premiers résultats, M. Picard s'attache à montrer comment on obtiendra la substitution analytique qui transforme l'intégrale abélienne en une intégrale elliptique.

MONATSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (1).

Année 1878.

Kummer. — Sur les surfaces qui sont de même ordre et ont les mêmes singularités que leurs surfaces polaires réciproques. (25-36).

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 184.

De telles surfaces s'obtiennent, en général, par la considération de congruences de droites pour lesquelles l'ordre et la classe sont des nombres égaux, si la congruence considérée est de même nature que la congruence polaire réciproque; la surface focale est alors, en général, de même ordre que la surface polaire réciproque et présente les mêmes singularités; c'est la voie qui a conduit M. Kummer à la surface du quatrième ordre à laquelle son nom est resté attaché. Il donne aujourd'hui un nouvel exemple de la fécondité de cette méthode, en considérant une congruence du troisième ordre et de la troisième classe.

Les congruences de cette nature se divisent en deux espèces d'égale généralité; pour les unes les trois droites qui passent par un même point sont toujours dans un même plan; pour les autres il n'en est pas ainsi; c'est de cette deuxième espèce que traite M. Kummer.

En désignant par x, y, z les coordonnées d'un point d'un rayon, par ξ, η, ζ ses cosinus directeurs, en posant

$$u = y\zeta - z\eta, \quad v = z\xi - x\zeta, \quad w = x\eta - y\xi,$$

en désignant enfin par K, L, M, K', L', M' six fonctions linéaires à coefficients constants des quantités $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$, il est clair que les deux équations du second degré

$$LM' - L'M = 0, \quad MK' - M'K = 0$$

déterminent une congruence du quatrième ordre et de la quatrième classe; mais, ces deux équations étant satisfaites par les deux équations

$$M = 0, \quad M' = 0,$$

qui déterminent une congruence du premier ordre et de première classe, on voit que, en supprimant les rayons qui appartiennent à cette congruence, il reste une congruence du troisième ordre et de la troisième classe : celle-ci pourra être définie par les trois équations

$$K = \lambda K' = 0, \quad L - \lambda L' = 0, \quad M - \lambda M' = 0,$$

qui contiennent le paramètre variable λ.

Ces trois équations, ordonnées par rapport à ξ, η, ζ, prennent la forme

$$\begin{aligned}
(p - \lambda p')\xi + (p_1 - \lambda p'_1)\eta + (p_2 - \lambda p'_2)\zeta &= 0,\\
(q - \lambda q')\xi + (q_1 - \lambda q'_1)\eta + (q_2 - \lambda q'_2)\zeta &= 0,\\
(r - \lambda r')\xi + (r_1 - \lambda r'_1)\eta + (r_2 - \lambda r'_2)\zeta &= 0.
\end{aligned}$$

En éliminant ξ, η, ζ, on trouve une équation du troisième degré en λ dont les coefficients sont du deuxième degre en x, y, z; les trois racines de cette équation correspondent aux trois droites qui passent par le point (x, y, z); en écrivant que cette équation a une racine double, on obtient la surface focale de la congruence, que l'on peut aussi regarder comme l'enveloppe d'une surface du deuxième degré; elle est du huitième ordre. C'est la surface F qu'étudie M. Kummer.

Elle est du même ordre que la surface polaire réciproque et présente les mêmes singularités; en effet, la congruence polaire réciproque se déduit de la congruence précédente par l'échange, dans les fonctions K, ..., M', des coefficients de u, v, w et de ξ, η, ζ; on voit que les surfaces focales de la congruence donnée et de la congruence polaire réciproque ne diffèrent que par les valeurs des constantes.

La courbe d'inflexion de la surface F, obtenue en écrivant que les trois racines de l'équation en λ sont égales, est du douzième ordre.

La surface F a douze plans tangents singuliers qui la touchent suivant des courbes courbées du second degré.

Elle a douze points singuliers pour lesquels les cônes des tangentes sont du second degré.

Les douze points singuliers se rangent en six couples, dont chacun est situé sur l'une des six droites suivant lesquelles se coupent les plans tangents singuliers correspondants.

Chaque plan tangent singulier est quatre fois osculateur de la courbe d'inflexion. Les quatre points d'osculation appartiennent à la conique suivant laquelle le plan touche la surface F.

Les génératrices rectilignes d'un même système d'une des surfaces du second degré qui correspond à une valeur particulière de λ sont toutes des rayons de la congruence considérée; en faisant varier λ, ces génératrices engendrent tous les rayons de la congruence considérée; en prenant les génératrices de l'autre système, on obtient une autre congruence ayant la même surface *focale*, qui, ainsi, peut être engendrée de deux manières distinctes.

Kronecker. — Sur les séries de puissances. (53-58).

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int e^z\, d\log z,$$

où $z = x + yi$, est égale à $+1$ ou à zéro suivant que x est positif ou négatif, lorsqu'on prend l'axe des y pour chemin d'intégration depuis $y = -\infty$ jusqu'à $y = +\infty$.

Ceci posé, soit la série régulièrement (*gleichmässig*) convergente

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-\lambda_n \zeta},$$

où $\zeta = \xi + i\eta$, et où les quantités réelles λ croissent avec l'indice n; la remarque précédente fournit le résultat suivant :

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\, e^{wz}\, d\log z = \sum_{k=0}^{k=n} c_k,$$

où l'on suppose que x est positif, que le chemin d'intégration va sur l'axe des y, de $-\infty$ à $+\infty$ et où w est une quantité comprise entre λ_n et λ_{n+1}. Cette égalité donne, non seulement la détermination des coefficients e_n, mais encore des quantités λ_n qui sont les valeurs qui rendent discontinue la fonction de w définie par l'intégrale

$$\int f(z)\, e^{wz}\, d\log z,$$

laquelle reste constante entre deux valeurs consécutives de λ. En multipliant cette équation par

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \Phi(w)\, dw,$$

faisant une sommation depuis $n = 0$ jusqu'à $n = r$, et posant enfin

$$f(z) = z\mathrm{F}(z),$$

on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int\int \mathrm{F}(z)\,\Phi(w)e^{wz}\,dw\,dz = \sum_{n=0}^{n=r-1} c_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_r} \Phi(w)\,dw;$$

dans le premier membre, l'intégration par rapport à w doit être effectuée depuis une valeur égale ou inférieure à λ_0, jusqu'à λ_r.

En prenant

$$\Phi(w) = \zeta e^{-wz}\ (x < \xi)$$

et en supposant r infini, on obtient la formule remarquable

$$\frac{1}{2\pi i}\int\int \mathrm{F}(z)\,e^{w(z-\zeta)}\,dw\,dz = \mathrm{F}(\zeta).$$

En effectuant d'abord l'intégration par rapport à w, on tombe sur la formule de Cauchy; en effectuant l'intégration par rapport à z, on retrouve le développement en série de

$$\mathrm{F}(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-\lambda_n \zeta}.$$

L'intégrale dont on est parti est égale à 1 pour $x = 0$; ainsi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin y\, d\log y = 1,$$

et, par suite, la valeur de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha v \cos\beta v\, d\log v$$

est égale à 1 ou zéro, selon que la valeur absolue de α est égale ou inférieure à β.

Cette remarque permet de déterminer, dans les séries supposées uniformément convergentes,

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos\mu_n v,$$

$$\psi(v) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \sin\nu_n v,$$

où les quantités positives μ_n et ν_n vont en croissant avec l'indice n, d'une part, les coefficients a, b de l'autre, les quantités μ, ν elles-mêmes, ainsi qu'il résulte des égalités

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\sin vw\, d\log v = \sum_{k=0}^{k=n} a,\quad \mu_n < w < \mu_{n+1},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v)\cos vw\, d\log v = \sum_{k=n}^{k=\infty} b,\quad \nu_{n-1} < w < \nu_n.$$

Enfin un calcul tout semblable à celui qui a été décrit précédemment conduit aux équations suivantes, où $\Phi(v)$ et $\Psi(v)$ sont mis à la place de $\frac{1}{v}\varphi(v)$, $\frac{1}{v}\psi(v)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^{\mu_r} \Phi(v)\Phi_1(w)\sin vw\, dw = \sum_{n=0}^{n=r} a_n \int_{\mu_n}^{\mu_r} \Phi_1(w)\, dw,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^{\nu_r} \Psi(v)\Psi_1(w)\cos vw\, dw = \sum_{n=0}^{n=r} b_n \int_0^{\nu_n} \Psi_1(w)\, dw.$$

Et en particulier, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v)\sin uw \sin vw\, dv\, dw = 2\pi\,\Phi(u),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(v)\cos uw \cos vw\, dv\, dw = 2\pi\,\Psi(u),$$

égalités qui conduisent immédiatement à la série de Fourier.

Kronecker. — Sur les fonctions de Sturm (95-121).

Kronecker. — Sur la caractéristique d'un système de fonctions (145-152).

Ces Communications de l'illustre algébriste se rapportent à un ordre d'idées dont l'origine se trouve dans les Mémoires de l'auteur, insérés dans les *Monatsberichte* de l'année 1869. L'ensemble des publications de M. Kronecker sur ce sujet sera analysé ultérieurement.

Wangerin. — Sur la réduction de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

à des équations différentielles ordinaires. (152-166).

Étant donné un corps à l'intérieur ou à l'extérieur duquel cette équation doit être vérifiée, le procédé que l'on suit ordinairement consiste à trouver un système triple orthogonal ρ, ρ', ρ'', tel que la surface qui limite le corps soit contenue dans l'un des faisceaux, le faisceau ρ par exemple : on cherche ensuite à satisfaire à l'équation aux dérivées partielles, où les variables ρ, ρ', ρ'' remplacent les variables x, y, z par des expressions de la forme

$$V = \lambda R R' R'',$$

où R est fonction de ρ seulement, etc., et où chacune des fonctions R, R', R'' contient, outre la coordonnée qui y figure, deux paramètres arbitraires. La solution générale est donnée par la somme de toutes les solutions particulières. Les corps pour lesquels cette méthode réussit sont : la sphère, l'ellipsoïde, le volume compris entre deux sphères excentriques, le tore circulaire, enfin les corps limités par une surface dont l'équation est de la forme

$$(x^2+y^2+z^2)+Ax^2+By^2+Cz^2=\pm D^2.$$

M. Wangerin traite le cas des corps de révolution et montre que le nombre des corps pour lesquels la méthode précédente réussit est limité. Elle ne s'applique qu'aux corps précédemment cités et à celui dont la courbe méridienne se déduit de la courbe

$$(x^2+y^2)^2+Ax^2+By^2=\pm D^2,$$

par la substitution

$$x+iy=\frac{\alpha+\beta(\xi+i\eta)}{\gamma+\delta(\xi+i\eta)}.$$

Chwolson. — Sur le magnétisme induit dans deux sphères par des forces qui agissent symétriquement par rapport à la ligne des centres. (269-276).

Cayley. — Sur une surface réciproque à elle-même. (309-313).

M. Cayley s'était déjà occupé en 1868 de la recherche des surfaces qui sont de même ordre et présentent les mêmes singularités que leurs polaires réciproques. (*Proc. London Math. Soc.*, t. II, p. 61-63).

Il avait remarqué que, si une surface est regardée comme l'enveloppe d'une surface quadrique satisfaisant à certaines conditions, la surface polaire réciproque est donnée comme l'enveloppe d'une quadrique satisfaisant aux conditions réciproques; or, si les conditions sont réciproques à elles-mêmes, il en résulte que la surface est réciproque à elle-même.

La surface du huitième ordre signalée par M. Kummer rentre dans la théorie. Voici comment M. Cayley parvient à cette surface : considérant une droite L dont les six coordonnées

$$a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h$$

vérifient les trois relations linéaires

$$f_i a+g_i b+h_i c+a_i f+b_i g+c_i h=0,\quad (i=1,2,3),$$

le lieu de cette droite sera une surface T du second degré dont les coefficients sont des déterminants du troisième ordre formés au moyen des quantités $a_i, \ldots, h_i$; l'équation en coordonnées-plan de la surface polaire réciproque par rapport à la quadrique

$$X^2+Y^2+Z^2+W^2=0$$

se déduira de l'équation de la surface T par l'échange des quantités a_i, b_i, c_i; f_i, g_i, h_i : si maintenant on regarde $a_i, \ldots, h_i$ comme des fonctions linéaires du paramètre λ, la surface T aura pour enveloppe la surface du huitième ordre de M. Kummer.

Helmholtz. — Sur le téléphone (488-500).

Oppolzer. — Nouvelle méthode pour la détermination des éléments de l'orbite d'une petite planète au moyen des observations d'une seule apparition. (583-602).

Kummer. — Nouvelle preuve élémentaire de ce théorème : la suite des nombres premiers est illimitée. (777-778).

Si cette suite était limitée, en désignant par P le produit de tous les nombres premiers, le nombre $\varphi(P)$ des nombres premiers et inférieurs à P serait égal à 1, ce qui est en contradiction avec la règle connue pour la formation de ce nombre.

Oppolzer. — Développement des dérivées par rapport à l'excentricité de l'anomalie vraie et du rayon vecteur dans les orbites presque paraboliques. (852-859).

Année 1879.

Kronecker. — Sur la théorie des équations algébriques. (205-239).

I. Simplification de la démonstration d'Abel touchant l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations de degré supérieur à 4.

II. Sur la résolution des équations dont le degré est un nombre premier.

III. Sur la classe des équations dont dépend la division des fonctions elliptiques.

Kirchhoff. — Sur les oscillations permanentes d'un liquide pesant. (395-410).

Weierstrass. — Addition au Mémoire inséré dans les *Monatsberichte* de 1858 (p. 207-220). « Sur un théorème concernant les formes homogènes du second degré. » (430-445).

La Communication de M. Weierstrass contient d'abord une démonstration remarquablement simple de cette proposition bien connue : Si $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont deux formes quadratiques à coefficients réels et si la forme $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est positive pour tout système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pourvu que ces valeurs ne soient pas toutes nulles, l'équation obtenue en éliminant $x_1, \ldots, x_n$ entre les équations

$$\begin{array}{l} S\varphi(x_1, \ldots, x_n)_1 - \psi(x_1, \ldots, x_n)_1 = 0, \\ S\varphi(x_1, \ldots, x_n)_2 - \psi(x_1, \ldots, x_n)_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S\varphi(x_1, \ldots, x_n)_n - \psi(x_1, \ldots, x_n)_n = 0 \end{array}$$

a toutes ses racines réelles; le symbole

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)_h$$

a le sens $\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}$.

L'existence d'une racine $K + li$ entraînerait en effet l'existence d'un système de valeurs $\xi_1 + \eta_1 i, \ldots, \xi_n + \eta_n i$ non nulles à la fois qui vérifieraient les équations précédentes.

On en conclurait

$$\left.\begin{array}{l} K\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)_h - \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)_h - l\varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n)_h = 0 \\ K\varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n)_h - \psi(\eta_1 \ldots, \eta_n)_h + l\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)_h = 0 \end{array}\right\} h = (1, 2, \ldots, n),$$

et l'on déduirait de là bien aisément

$$l[\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)] + \varphi[(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)] = 0,$$

égalité manifestement contradictoire avec l'hypothèse.

L'auteur traite ensuite de l'intégration des équations linéaires à coefficients constants

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial G(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}},$$

$$\frac{dx_{n+\alpha}}{dt} = -\frac{\partial G(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_\alpha},$$

où G est une forme quadratique essentiellement positive, sauf pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

En posant

$$S_{n+\alpha} + \frac{\partial G(x_1, \ldots, x_{3n})}{\partial x_\alpha} = y_\alpha$$

$$-Sx_\alpha + \frac{\partial G(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} = y_{n+\alpha},$$

on obtiendra, en résolvant par rapport aux x,

$$x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2n} \frac{f(S)_{\lambda,\mu}}{f(S)} y_\lambda,$$

où $f(S)$ est le déterminant des équations précédentes et $f(S)_{\lambda,\mu}$ un mineur de ce déterminant.

M. Weierstrass établit, relativement à l'équation

$$f(S) = 0,$$

qu'elle n'a que des racines purement imaginaires et que, si elle admet p fois la racine $S_1 i$, $f(S)_{\lambda,\mu}$ est divisible par $(S - S_1 i)^{p-1}$. Si maintenant l'on désigne par $\pm S_1 i, \ldots, \pm S_r i$ les racines distinctes de l'équation $f(S) = 0$ et que l'on représente par le symbole

$$(\lambda, \mu)_\rho + i(\lambda, \mu)'_\rho$$

le coefficient de $(S - S_1 i)^{-1}$ dans le développement de

$$\frac{f(S)_{\chi,\mu}}{f(S)},$$

suivant les puissances de $S - S_1 i$; si l'on pose en outre

$$\varphi(t)_{\lambda,\mu} = 2\sum_{\rho=1}^{r} [(\lambda, \mu)_\rho \cos S_\rho (t - t_0) - (\lambda, \mu)' \sin S_\rho (t - t_0)],$$

on aura pour la solution la plus générale des équations proposées

$$x_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} [x^0_{n+\alpha} \varphi(t)_{\alpha\mu} x^0_\alpha \varphi(t)_{u+\alpha,\mu}],$$

le symbole x^0_α désignant la valeur de x_α pour $t = t_0$.

Kirchhoff. — Sur les oscillations transversales d'une barre de section quelconque. (815-828).

Ketteler. — Théorie des milieux absorbants non isotropes. (879-920).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, publié sous la direction de M. BOURGET.

Tome I; 1877.

Le *Journal de Mathématiques élémentaires,* dont la publication remonte déjà à cinq années, a été créé par M. Bourget, directeur des études à Sainte-Barbe, dans le but de combler une lacune qu'avait jusqu'à ce jour présentée la série française des publications périodiques destinées aux étudiants en Mathématiques des divers degrés, ainsi qu'aux professeurs chargés de la délicate mission de les instruire.

Imaginé sur un plan analogue à celui des *Nouvelles Annales* de M. Gerono, dont les preuves étaient faites depuis longtemps, le nouveau Journal s'est proposé de rendre aux Cours élémentaires le même service que celles-ci aux Cours de Mathématiques spéciales, qui ont certainement dû à ce recueil, aussi intéressant qu'instructif, une bonne part de leurs perfectionnements successifs.

Les matières qui trouvent place dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* peuvent se ranger dans les cinq catégories suivantes :

1° Exposés didactiques de théories classiques;

2° Critiques et discussions de questions d'enseignement;

3° Mélanges historiques;

4° Comptes rendus d'examens français ou étrangers;

5° Questions diverses et solutions des questions proposées.

Pour les trois premières catégories, les rédacteurs font appel au concours de correspondants, principalement aux professeurs le mieux à même de donner leur note dans le grand concert universitaire, et d'en adoucir l'harmonie, parfois un peu criarde. Les solutions des questions proposées doivent au contraire, pour obtenir l'insertion, émaner uniquement d'élèves, mesure des plus sages, qui, stimulant les jeunes intelligences par une sorte de concours constamment ouvert, ne contribue pas peu à développer les talents en germe, et à entretenir ce « *feu sacré* » qui seul, en Mathématiques comme dans toute production humaine, peut opérer la transformation de « l'ouvrier en artiste, c'est-à-dire en créateur ».

Nous ne pourrions, sans excéder les limites imposées à un compte rendu, mentionner toutes les questions posées et résolues dans le Journal, qui intéresseraient d'ailleurs médiocrement les lecteurs du *Bulletin;* nous nous bornerons aux plus importantes.

Bourget (*J.*). — Principes élémentaires sur les déterminants. (5-11; 33-37; 65-68; 97-102; 129-131; 193-194).

Exposition classique des définitions, propriétés, calcul, transformation des déterminants des quatre premiers ordres. Application de la théorie des déterminants à la résolution des équations du premier degré à deux et à trois inconnues; de m équations homogènes à $m+1$ inconnues. Produit de deux déterminants.

Morel (*A*). — Projection stéréographique. (12).

Lidy. — Note sur les polygones étoilés. Surfaces et contours. (13-14).

Bourget (*J.*). — Sur quelques perfectionnements à apporter dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. (15-20).

Le principe de la ligne droite, plus court chemin d'un point à un autre, n'est pas irréductible. — Théorèmes d'égalité de triangles.

Suter (*H.*), traduit par M. Melon. — Histoire des Mathématiques. (27-30; 56-59; 84-88; 346-348; 368-378).

Introduction. — Pénurie des traités historiques sur la question. Montucla, Chasles, Libri, Quetelet, R. Wolf. Premières origines de la Science chez les peuples les plus anciens du monde historique. Arithmétique chez les Phéniciens, Grecs, Chinois; l'abaque chez les Orientaux et les Romains. Symboles de numération; deux systèmes principaux suivant que la position du chiffre modifie ou non sa valeur absolue.

Chapitre II. — L'Astronomie fut la première Science. Division du temps; cycle; périodes lunisolaires; Saros des Chaldéens; 223 lunaisons après lesquelles le Soleil et la Lune reprennent leur même position relative. Observation des éclipses par les Égyptiens. Zodiaque. Période de Sothis, ou caniculaire. 1460 ans. Astronomie des Chinois, et année de $365^j 5^h 49^m 12^s$. L'Astronomie reste sans faire de progrès jusqu'à la chute de la dynastie de Dschengiskhan. Astronomie indienne peu connue; cycle chinois de 19 ans = 235 mois lunaires.

Bourget (*J.*). — Notions sur les méthodes de démonstration usitées en Mathématiques. (37-40).

Extraites la Géométrie de Vincent.

Dellac (*H.*). — Problème du Myosotis. (40-45).

Nous nous permettrons, à ce sujet, une légère critique. La question est développée par l'auteur, ainsi qu'elle pourrait l'être au *tableau*, en conférence, à une classe d'élèves de toutes forces. Les détails par trop développés, et un peu *terre à terre*, parfois nécessaires dans un cours oral, deviennent des *longueurs* dans un article écrit, que les élèves à conception lente pourront travailler à loisir. La concision et l'élégance sont deux qualités qu'il ne faut jamais perdre de vue dans un article de Revue scientifique de la nature du journal, qui doit toujours être conçu comme s'il avait pour but de servir de modèle à l'étudiant.

Morel. — Détermination de la sensibilité d'une balance ordinaire. (45-49).

Déduite de la composition des forces parallèles. *Voir* (107) une note de M. Colot sur la démonstration de la formule générale.

Hoüel. — Correspondance. (63-64).

Démonstration, d'après Héron, de la vingtième proposition du premier Livre d'Euclide.

Bourget (*J.*). — Réflexions sur les calculs numériques imposés aux candidats dans les concours. Dispositions à donner aux calculs par logarithmes. (68-72).

On oublie trop fréquemment que l'approximation d'un résultat ne saurait être supérieure à celle des données.

Rebout (*Eugène*). — Des cubes égaux à la somme de trois ou quatre cubes entiers. (73-74).

Cochez. — Études de maxima et minima. (74-79; 232-238; 261-265; 296-300).

Méthode de Fermat; applications géométriques. Problème de Frenet : quel est, entre deux sphères, le point de la ligne des centres d'où la somme des surfaces des zones aperçues est maximum. Problème de Haddon. Point analogue sur la circonférence décrite sur la ligne des centres.

Morel. — Duplication du cube. Problème de Pappus. (80-81).

Cochez. — Problème des courses de chevaux. (110-112).

Buguet. — Autre solution du problème des courses. (112-114).

Hoüel (*J.*). — Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes. (118-121; 152-154; 187-189; 213-215).

La partie de la Science qui consiste à rassembler les faits et à en conclure les lois et principes de la Science appartient essentiellement à l'observation. L'exactitude des résultats n'est jamais qu'approchée. L'étude logique des conséquences sert de critérium à leur exactitude.

Des grandeurs discrètes ou numériques et concrètes ou continues. L'expérience est quasi étrangère à l'Arithmétique.

Toute science abstraite est absolument vraie au point de vue théorique; mais elle peut bien n'être pas applicable au monde réel, être fausse au point de vue des phénomènes physiques, si les hypothèses qui lui ont donné naissance sont erronées, ou seulement si elles ont été l'objet d'illégitimes simplifications. La Géométrie est fondée sur l'hypothèse, conforme à l'expérience, de la possibilité du déplacement de figures invariables dans un espace immobile et indéfini. Les premières notions sont celle de la droite, ligne des points immobiles dans la rotation d'un corps dont on fixe deux points : celle de l'immobilité du corps dont trois points sont fixés; celle du plan, ou surface superposable sur elle-même par retournement. Ces hypothèses suffisent à l'établissement de la géométrie de Bolyai et Lobatchefski, dont la Géométrie ordinaire est un cas particulier, conforme aux propriétés constatees de l'étendue, et pour laquelle un certain paramètre, indéterminé dans la Géométrie « générale », a zéro pour valeur. Cette hypothèse correspond à l'idée de direction unique pour le parallélisme, admise comme « évidente ». M. Hoüel fait observer que l'évidence n'est en somme que l'accord constant d'expériences innombrables. C'est un point trop oublié, à notre avis, et que l'étude philosophique de la probabilité, ou « vérité pratique », malheureusement trop négligée des mathématiciens, mettrait en « évidence ».

En résumé, dans la Géométrie, il faut reconnaître deux parts : 1° une physique, justifiant les hypothèses admises; 2° une théorique, en développant les conséquences. Cette dernière seule est une science exacte, à laquelle appartient véritablement la certitude mathématique.

Bourget (*J*). — Relations entre les éléments d'un triangle. (128).

Rouché (*E.*). — Une équation du $m^{\text{ième}}$ degré ayant $m+1$ racines est identique (131-132).

Vazeille. — De l'involution. (132-134; 161-165).

Définition : représentation de la fonction rationnelle du second degré en ses deux termes.

La distinction de l'involution en deux espèces, selon que les points doubles sont réels ou imaginaires, nous paraît une complication regrettable.

Dostor (*J.*). — Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers convexes. Expressions diverses du volume. (134-138; 167-170; 229-232).

André (*Désiré*). — Nombre des arrangements avec répétition de trois lettres distinctes, p à p, commençant par une même lettre, et contenant les trois lettres. (165-166).

$$x_p = 3^{p-1} - 2^p + 1.$$

Laudi. — Inscription du triangle de périmètre minimum dans un triangle acutangle. (170).

Bourget (*J.*). — Extraction abrégée de la racine carrée. (194-199).

Bezier. — Construction du centre de gravité du trapèze. (204).

Cochez. — Théorie de l'inversion. (225-229; 257-261; 321-323; 353-357.

Le système articulé de Peaucellier, transformant rigoureusement l'un dans l'autre un mouvement rectiligne et un mouvement circulaire, en est une application industrielle pratique. Principes généraux; transformation des droites en cercles passant au pôle, des plans en sphères passant au pôle. Le changement de module produit des figures homothétiques. Des figures anallagmatiques, ou leur propre réciproque.

Inversion d'une circonférence. Inverseur Peaucellier : deux angles d'articulation d'un losange articulé sont également angles d'articulation d'un triangle isoscèle articulé dont le sommet est fixe. Les deux angles libres du losange décrivent des figures inverses. Parallélogramme de Watt-Peaucellier. Inverseur de Hart, quadrilatère articulé à côtés opposés égaux. Si un point est fixe, les points divisant les deux autres côtés égaux proportionnellement au côté tournant décrivent des figures inverses.

Du cercle d'inversion; identité de la polaire réciproque par rapport au cercle d'inversion et de l'inverse de la podaire. Les figures à axes de symétrie sont des anallagmatiques.

Quelques théorèmes. Valeur du rayon R d'une circonférence tangente à trois circonférences tangentes entre elles, de rayons respectifs α, β, γ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \pm 2\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}}.$$

Dostor (*Georges*). — Évaluation des surfaces des polygones égrédients et étoilés. (289-295; 324-331).

Le polygone égrédient est un polygone plan dont les côtés sont deux à deux en ligne droite; on ne considère que les sommets saillants et les côtés sont formés des deux parties en ligne droite. Soient n le nombre des côtés, p celui des sommets à droite, et q des sommets à gauche de chaque côté, on a

$$n = p + q + 2.$$

L'espèce du polygone est le plus petit des deux nombres $p+1$ et $q+1$.

Les polygones convexes sont de première espèce. Génération des polygones d'espèces successives. Il y a $\frac{n+1}{2}$ espèces de polygones de n côtés (ensemble de deux segments). Les angles saillants d'un polygone d'espèce e sont les sommets des angles rentrants du polygone d'espèce $e+1$ provenant du même polygone convexe. Soit $S_{n,p}$ la somme des angles saillants d'un polygone de n côtés d'espèce p, on a

$$S_{n\,p-1} - S_{n,p} = 4 \text{ droits},$$
$$S_{n,p} = 2(n-2p) \text{ droits}.$$

La somme des angles extérieurs est égale à $4p$ angles droits.

Polygones réguliers égrédients. La différence entre un angle rentrant et un angle saillant du polygone régulier ne dépend que de la nature et non de l'espèce; elle égale $\frac{4dr}{n}$. L'angle au centre $\alpha_{n,p}$ du polygone régulier de n côtés, espèce p, a pour valeur $\frac{2p\pi}{n}$; sa surface

$$S_{n,p} = n\,R_{n,p}^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi},$$

en fonction du rayon du cercle circonscrit.

Deux classes de polygones égrédients : 1° étoilés (Poinsot) ou à périmètre continu; 2° composés, ou formés de deux ou plusieurs polygones d'un même nombre de côtés, superposés sans se confondre : polygones anétoilés, rayonnés, dentelés ou pseudo-étoilés.

Bourget (*J.*). — Évaluation à une unité près de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre entier, quand m est le produit des facteurs p, q, r, ... (323-324)

$$\left(\sqrt[pqr\cdots]{A}\right) = \left(\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{\sqrt{\ldots A}}}}\right),$$

Cochez (*J.*). — Décomposition d'une fraction en une somme de fractions simples. (332-335).

Démonstration classique par les coefficients indéterminés.

Morel (*A.*). — Théorème d'Yvon Villarceau. (335-336).

Construction de la courbe d'intersection du plan bitangent au tore et démonstration par les méthodes de la Géométrie descriptive.

Dostor. — Règle mnémonique pour établir la théorie des signes en Trigonométrie. (357-361).

Comptes rendus d'examens aux écoles du Gouvernement, aux Concours des Facultés et aux Concours académiques (4e catégorie). (20-27, 49-51, 51-53, 53-56, 81-84, 114-118, 138-148, 148-151, 171-186, 199-204, 205-213, 238-249, 266-284, 310-311, 315-319, 337-346, 361-368).

Examens anglais : (121-122). *Belges* (183).

Questions proposées. — (30-32, 59-62, 95-96, 126-127, 223-224, 255-256, 288, 319-320, 352, 382-384).

Solutions de questions proposées. — (59-62, 88-95, 122-126, 154-158).

Bergeron. — Le plus grand quadrilatère inscrit dans la demi-circonférence est la moitié de l'hexagone régulier inscrit. (190-192, 215-223, 249-255, 284-287, 311-315, 349-352, 372-382).

Le cadre d'un compte rendu ne saurait se prêter à l'analyse, même la plus succincte de ces questions; nous nous bornerons à exposer, très brièvement, quelques réflexions que nous a suggérées leur examen. Les rédacteurs, dans le choix de la solution publiée au milieu du grand nombre des similaires, simplement signalées, ne semblent pas s'être toujours suffisamment préoccupés de n'admettre à l'impression que les travaux d'élèves présentant un caractère particulier de correction et d'élégance, d'esprit de méthode qui permette de les présenter en quelque sorte comme modèle aux jeunes intelligences dont le style scientifique est à former. Il est tout à fait important, pour rendre la publication réellement utile, à notre point de vue absolument pratique, de ne jamais oublier que la concision est l'un des premiers caractères de l'élégance; que les déductions doivent être serrées et précises; que l'on doit éliminer de la solution imprimée, sous peine de la rendre diffuse, toute digression superflue qui trouvera souvent sa place dans une discussion détaillée, difficile à admettre dans le journal, mais qu'il y aurait tout au moins lieu de rejeter à la fin de la *rédaction*.

Dans les questions de Géométrie, les solutions dites *géométriques* sont à juste titre considérées comme les plus élégantes, et comme supérieures à celles qui ont le calcul pour base. Mais la méthode de déduction analytique, ou d'invention, doit être recherchée préférablement à la méthode synthétique ou d'exposition; cette dernière a toujours un certain cachet de pédantisme impuissant, alors que la virilité féconde est l'apanage de la méthode analytique.

On ne saurait trop se pénétrer d'autre part de ce sentiment, que la qualité géométrique de la solution ne consiste pas dans la forme même des expressions écrites, mais dans la conduite du raisonnement. Ainsi, par exemple, l'expression $ab \sin C$ du double de la surface du triangle est tout aussi géométrique que $AB \times CH$; elle devra fréquemment lui être préférée dans les solutions de problèmes où l'angle c se présente naturellement, s'il doit en résulter une simplification des lignes de construction. Il ne faut pas oublier en même temps que le nombre moindre de lignes géométriques entrant dans la démonstration, ou la construction définitive, est une des qualités de l'élégance, ainsi que celui, également le plus restreint, de connaissances auxquelles il est fait appel.

Il nous paraîtrait également utile que les rédacteurs, tout en choisissant parmi les copies adressées celle qui renferme la plus grande somme de qualités, en fissent parfois l'examen critique, un journal destiné principalement à des élèves devant nécessairement se proposer pour but d'offrir à ses correspondants inexpérimentés des modèles propres à les guider dans leurs rédactions et à former leur raisonnement et leur style, et les accompagner de conseils faisant ressortir les qualités et les imperfections du modèle, le but à atteindre et les écueils à éviter.

Tome II; 1878.

Cochez. — Théorie de l'inversion. (3-8, 33-37).

Transformation des distances et des aires. — Transformation des angles; projection stéréographique.

(*M.*), professeur agrégé de l'Université. — Note sur la conversion des fractions décimales périodiques en fractions ordinaires. (9-12).

(*F.-R. A.*). — Étude sur les opérations de l'Arithmétique (*Suite.*) (12-16, 37-39, 65-68, 99-101, 129-131, 161-166, 193-197, 225-231).

Le Calcul arithmétique comporte trois familles d'opérations, comprenant chacune une opération directe (addition, multiplication, exaltation) et les deux premières une seule opération inverse (soustraction, division), tandis que la troisième en comprend deux (extraction et exponentiation). De la septième opération. Soit une progression géométrique telle que

$$\because 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,$$

où

$$p = 3,\quad d = 96,\quad r = 2,\quad n = 6.$$

Les quatre nombres, termes extrêmes, raison, nombre des termes sont chacun fonction des trois autres. La septième opération consiste à isoler n, opération pour l'expression de laquelle M. F.-R. A propose le signe nouveau (:), d'où

$$n = 1 + \frac{d}{p}(:)r,$$

ce qui s'énoncerait $n = 1$ plus d sur p exponenté par r. Le Calcul de l'exponentiation se fait en divisant successivement par la raison, d'abord le dernier terme d, puis successivement tous les quotients obtenus, jusqu'au terme p, et en comptant le nombre de divisions opérées.

Des trois espèces de rapports, proportions et progressions. — Signes des rapports arithmétique, géométrique, algébrique. —, :, (:), qui sont aussi les symboles des proportions arithmétique, géométrique, algébrique. Signes conventionnels des progressions

÷ progression arithmétique ou par addition,
∺ progression géométrique ou par multiplication,
∺÷ progression algébrique ou par exaltation,

définies par les égalités

$$\div\, d = p + r(n - 1),$$
$$\div\div\, d = pr^{n-1},$$
$$\div\div\div\, d = p^{r^{n-1}} \quad \text{et} \quad n = 1 + \frac{d\,(:)\,p}{r}.$$

Propriétés de l'exponentiation ou des rapports algébriques. Théorèmes divers. On ne change pas la raison d'un rapport algébrique en élevant ses deux termes à la même puissance. Le rapport algébrique des puissances d'un nombre est le rapport géométrique de leurs exposants. La raison d'un rapport algébrique est inverse de celle du rapport renversé. La somme des deux rapports algébriques de conséquent commun est égale au produit des antécédents exponentié par le conséquent

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Dans une proportion algébrique on peut permuter, soit les moyens, soit les extrêmes entre eux, soit changer les moyens en extrêmes et les extrêmes en moyens, d'où huit aspects équivalents d'une même proportion algébrique. Dans une suite de rapports algébriques égaux, on peut élever à la même puissance : 1° tous les termes; 2° les deux termes d'un rapport; 3° tous les antécédents; 4° tous les conséquents : on peut multiplier, ou diviser tous les antécédents par leurs conséquents ou réciproquement. Le produit des antécédents et celui des conséquents forment un rapport algébrique égal aux premiers

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.$$

Résolution de l'exponentielle $a^x = b$, et calcul élémentaire des logarithmes. Développement en fraction continue de l'exposant x par une méthode analogue à celle de la recherche du plus grand commun diviseur.

L'auteur conclut à la possibilité, par l'emploi du signe de l'exponentiation, de ranger la fonction exponentielle parmi les fonctions élémentaires (non transcendantes). L'exponentiation dérive de la division de deux logarithmes, et peut servir au calcul de ceux-ci.

Morel (A.). — Note sur le trinôme et la fraction du second degré. (17-21).

Discussion graphique par le théorème des sécantes du cercle.

QUESTIONS d'examens et de Concours. Écoles du Gouvernement. Concours académiques. Baccalauréat. — (21-25, 43-46, 79-82, 107-109, 142-147, 171-178, 206-213, 243-251, 273-281, 303-311, 373-382).

QUESTIONS proposées. — (31-32, 63-64, 94, 160, 191-192, 224, 319-320, 352, 383-384).

Suter. — Histoire des Mathématiques. (*Suite*). (25-29, 46-50, 82-85, 137-141, 199-205, 251-253, 281-284, 311-316, 336-339).

La Science chez les Grecs. — Son importation d'Égypte. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie. — Thalès et l'École Ionienne, Anaximandre, Anaximène. — Pythagore et l'École Italique, division de l'Arithmétique en ἀριθμητική, correspondant à notre théorie des nombres, et λογιστική, science pratique du calcul. — La Géométrie naissante est la représentation de connaissances arithmétiques. — Proportions et similitude; nombres polygonaux et théorie des polygones et polyèdres réguliers. — La musique à l'École pythagoricienne. — La trisection de l'angle par la quadratrice, dite de Dinostrate, inventée par Hippias d'Elis. — Hippocrate de Chios découvre de nombreux théorèmes sur les segments en recherchant la quadrature du cercle. — Sa lunule quarrable (μηνίσκος) surmontant le côté du carré.

Le manque de méthode et de liaison analytique dans les vérités est le défaut de la Géométrie de cette époque. — Antiphon et la longueur de la circonférence, que les philosophes de l'époque considèrent faussement comme moyenne arithmétique des limites de deux polygones inscrits et circonscrits du même nombre de côtés.

Astronomie pythagoricienne admettant un feu central autour duquel tournent la Lune, la Terre, le Soleil, les planètes et les étoiles dans des sphères harmoniques et concentriques. — Philolaos de Crotone. — Archytas de Tarente. — Aristarque de Samos enseigne que chaque étoile est un Soleil éclairant un monde. — Héraclide de Pont et Hikétos de Syracuse défendent l'idée de la rotation de la Terre sur un axe.

Malheureusement, les progrès de l'Astronomie sont arrêtés par les vaines spéculations philosophiques pour lesquelles on abandonne les études pratiques, *Jugement qui nous paraît un peu sévère; car nous ne croyons guère aux progrès de la Science pratique que le jugement et la discussion théorique ne viennent pas guider dans ses investigations et surtout dans le choix des résultats entremêlés d'erreurs* (1).

Les Grecs règlent le temps sur le cours de la Lune. — Année de Solon, six mois pleins de 30 jours, alternant avec 6 vides de 31, et 3 mois pleins de plus tous les huit ans. — Correction par les cycles de Méton et de Calippe.

Au v^e siècle, Empédocle a des rudiments d'idées sur l'attraction. — Leucippe professe l'indestructibilité de l'atome en lequel se résolvent les corps. — Démocrite d'Abdère admet l'égalité de chute dans le vide, et invente la théorie optique de l'émission. Avec son instinct de l'immutabilité des lois naturelles, il est le précurseur de la méthode expérimentale d'invention.

Platon (Athènes, 430) considère les Mathématiques comme la base de la philosophie et la science d'éducation par excellence, fait des idées de Socrate un corps de doctrine; mais alors qu'en Mathématiques Socrate ne goûte que ce qui est immédiatement utile et applicable, Platon au contraire dédaigne le côté pratique et assigne aux Sciences un but purement idéal et spéculatif. Platon, rentrant d'Égypte et de Sicile, fonde l'Académie où ses disciples donnent le plus grand éclat à la Science jusqu'à Euclide. Malheureusement on n'a pu retrouver

(1) Si toutefois les spéculations dont il est question ont quelque rapport avec la logique scientifique. J. H.

que de rares fragments de leurs travaux. La conception la plus féconde de Platon est l'invention de la méthode analytique; on lui doit aussi la démonstration par l'absurde.

Ménechme, frère de Dinostrate, découvre les sections coniques qu'étudient Eratosthène et Géminus. Le plan sécant, pris perpendiculaire à l'arête, n'eut une inclinaison variable que sous Archimède, qui le premier découvrit les trois sections dans le même cône. Ménechme fait la duplication du cube par l'intersection des sections coniques; Archytas l'obtient par l'intersection d'un cylindre, d'un cône et d'un tore; il fait faire les premiers pas à la Stéréotomie. Eudoxe de Cnide étudie les proportions et les corps réguliers. — Enfin Aristée fait un traité des sections coniques qui fournit à Euclide, au dire de Pappus, les éléments de son œuvre.

SOLUTIONS. — (30-31, 50-63, 85-94, 101-105, 109-128, 147-157 179-190, 213-223, 253-256, 284-288, 316-319, 340-351, 382-383).

Nous croyons devoir, comme dans le compte rendu du tome I, appeler l'attention toute spéciale des rédacteurs sur le choix des solutions insérées et l'utilité que présenterait parfois l'addition de quelques conseils ou observations critiques, destinés à redresser le jugement et à former le goût *artistique* des jeunes collaborateurs, dont les travaux ne sont le plus souvent que de *bonnes copies*. Prenons pour exemple, entre cent, la question 92 (p. 156).

On donne un point A, situé en dehors de la bande déterminée sur le plan par deux parallèles. On demande la position que doit prendre la perpendiculaire commune pour être vue du point A sous l'angle maximum.

La solution insérée est correcte, assurément, au point de vue de l'exactitude, mais telle que tout élève ayant convenablement suivi le cours doit pouvoir la présenter dans un examen au tableau ou une composition. Point d'imagination, ni surtout de sentiment géométrique de la question. Comme presque toujours on se dispense de penser, le choc des équations étant chargé de remplacer celui des idées. C'est ce que l'on peut appeler de la Science à l'orgue de Barbarie. Elle permet quelquefois de faire son chemin, et des professeurs qui n'ont pas trop mal réussi n'en ont jamais eu d'autre; mais elle déprave le sentiment artistique sans lequel on peut, si l'on veut, brasser des Mathématiques, mais qui seul permet d'être mathématicien. Il y avait cependant ici (et l'observation est du genre de celles dont nous aimerions à voir la rédaction émailler fréquemment cette partie de la publication); il y avait, disons-nous, à faire une application des plus simples de la méthode des maxima et minima de Roberval, enseignée au cours, et qui s'impose en quelque sorte ici.

a et b étant les distances du point A aux deux parallèles, EF la position cherchée de la perpendiculaire, ABD la perpendiculaire menée du point A sur les deux parallèles, la variation de l'angle DAE doit être égale à celle de l'angle DAF, et par suite

$$\frac{a}{(\mathrm{EA})^2} = \frac{b}{(\mathrm{FA})^2} = \frac{1}{l}.$$

Les perpendiculaires FG à FA, et EG à EA ont donc leur point G de rencontre sur ABD à une distance AG $= l = a + b$ (par symétrie). Donc, si du point O, milieu de BD, on décrit un cercle passant en A, il coupera les deux parallèles aux pieds cherchés de la perpendiculaire commune sous-tendant l'angle maximum, vue du point A.

x étant la distance du point A à cette perpendiculaire commune, on a encore

$$x^2 = ab;$$

ce qui donne la solution de l'auteur.

Nous avons, à dessein, conservé les notations de la solution; cela nous fournira l'occasion d'ajouter qu'il ne serait pas inutile de faire remarquer aux élèves que, bien que le choix des lettres d'une figure soit arbitraire, un bon choix, résultant d'une certaine harmonie de correspondance entre les lettres similaires et les parties de la figure en relations analogues, est loin de rester indifférent à la facilité de lecture et au bon aspect de la rédaction.

Hoüel (*J.*). — Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie. (39-42, 74-79).

M. Hoüel remarque combien il serait avantageux, au point de vue de la généralité et de la clarté, de définir les lignes trigonométriques au point de vue des coordonnées polaires. Les règles des signes découlent immédiatement de la notion du rayon tournant dans le sens direct, ou rétrograde, sur lequel un point mobile est repéré par sa distance à l'origine, comptée elle-même dans le sens positif ou le sens négatif. L'auteur s'élève aussi, avec raison, contre le déplorable emploi classique des angles auxiliaires qui, dans le but illusoire de rendre la formule calculable par logarithmes, compliquent en réalité les calculs.

De telles observations ne sauraient être trop multipliées et trop divulguées : elles font œuvre d'assainissement.

Julliard. — Note sur la droite de Simson. (68-71).

Bourget. — Sur le nombre de chiffres certains dans la racine carrée d'un nombre. (72-74).

Le nombre de chiffres certains de la racine est, en général, égal à celui des chiffres de la racine; mais égal à celui-ci diminué d'une unité si, ce nombre étant pair, la première tranche est inférieure à 25.

Burnier. — Note sur l'extraction abrégée de la racine carrée. (95-96).

Quand on connaît n chiffres d'une racine carrée, en divisant le reste par le double de la racine, on obtient $n-1$ nouveaux chiffres, et n dans le cas où le premier chiffre de la racine est supérieur à 4.

Malloisel. — Du cercle des neuf points. (97-99).

Six nouveaux points situés sur ce cercle.

Morel (A.). — Intersection d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution. (105-107).

Longchamps (de). — Construire, avec le compas seul, le centre d'un cercle tracé. (Note.) (136-137).

L'auteur de la Note et les rédacteurs déclarent ignorer le nom de l'auteur de la solution. C'est, croyons-nous, Mascheroni.

Longchamps (de). — Note d'Algèbre. (197-199).

Le minimum de

$$z = \Sigma(ax + by + c)^2$$

est égal à

$$\Sigma a^2 \Sigma b^2 \Sigma c^2 - \Sigma[\Sigma a^2 (\Sigma bc)^2] + 2\Sigma ab \Sigma bc \Sigma ca.$$

Pillet. — Des projections en Géométrie descriptive. (231-236, 265-269).

Projections obliques. — Droite, plan. — Section plane d'un polyèdre. — Intersection d'un tronc de pyramide quadrangulaire à bases parallèles et d'un cylindre. — Application aux ombres.

Projections coniques. — Point, droite, plan. — Applications. — Intersection d'un octaèdre régulier et d'un cône. — Ombres au flambleau.

Dostor (G.). — Détermination du chiffre terminant les puissances successives des nombres entiers. (236-238).

Les derniers ehiffres se reproduisent par période de puissances dont l'exposant augmente de quatre unités, et ne dépendent que du dernier chiffre de la première puissance. Tableau des derniers chiffres.

Ocagne (M. d'). — Note sur le volume du tronc de pyramide. (238-240).

Généralisé du tronc triangulaire pour le tronc quelconque; directement pour le quadrangulaire.

Fajon. — Cas de constance de la fonction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

(240-243).

Morel (A.). — Théorie des axes radicaux. (257-265; 289-294; 321-325; 353-357).

I. Puissance d'un point. — Puissance totale d'un point par rapport à un système et puissance intérieure du système. — Théorème de Steiner. — Le lieu des points dont les projections sur un système de droites forment un polygone de surface constante est un cercle. — Puissance d'un point par rapport au cercle. — Cercle imaginaire.

II. Axes radicaux des cercles réels ou imaginaires. — Cercles orthogonaux. — Le cercle orthogonal de trois cercles est le point de concours des systèmes concourants des trois polaires du même point, et de leur pôle commun par rapport aux trois cercles.

III. Distances circulaires, ou rapport de la puissance au diamètre. — Le lieu des points à distances circulaires proportionnelles par rapport à deux cercles est un cercle de même axe radical divisant leur angle en deux autres dont les sinus ont la même proportion que les distances circulaires correspondantes. — Diverses expressions des rapports de deux distances circulaires d'un même point. — Angle des tangentes communes à deux cercles, des cercles avec l'axe radical. — Longueurs des divers segments des tangentes communes.

IV. Système des cercles passant par deux points réels. — Les cercles orthogonaux à ceux du système forment un système conjugué. — Points limites. — Les polaires d'un même point par rapport à tous les cercles du système sont concourantes.

V. Système de trois cercles. — Centre et cercle radical.

VI. De l'inversion des systèmes de cercles. — Figures anallagmatiques et cercle de reproduction. — Inversion des cercles d'axe radical commun. — Un cercle mobile qui coupe deux cercles du système sous un angle constant conserve une inclinaison constante sur tout cercle du système. — Tout cercle également incliné sur deux cercles est orthogonal à leur cercle bissecteur.

Les bissectrices circulaires d'un triangle formé d'arcs de cercle sont concourantes.

Dostor (*G.*). — Note d'Arithmétique. (269-271).

L'erreur commise en remplaçant la moyenne géométrique d'un nombre par sa moyenne arithmétique est inférieure au carré de la différence divisée par l'octuple du nombre moindre.

Fajon. — Démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie. (271-273).

Lemonnier. — Note sur la division arithmétique. (295-296).

En multipliant le complément du diviseur à la puissance de 10 immédiatement supérieure par le chiffre du quotient, et l'ajoutant au dividende, on obtient d'abord le reste; puis, à sa gauche, le chiffre du quotient, ce qui sert de contrôle.

Cotillon. — Étude sur les lignes d'égale teinte et le lavis à teintes plates. (296-298; 328-332; 365-373).

Définitions et règles générales. — Surfaces à poli mat. — Loi du produit des cosinus de Dupuis. — Lignes d'intensité nulle. — Point brillant, — Lignes d'égale teinte.

La loi idéale de Dupuis est troublée par les rugosités dont l'existence rapproche le point brillant de la partie plus éclairée. — Effets de la lumière diffuse. — Sphère étalon du modelé. — Règles de l'éclairage apparent.

Morel (*A.*). — Note d'Arithmétique. (298-303).

Limite de l'approximation admissible de certains calculs en raison de celle des données.

Nous ne saurions insister trop sérieusement sur l'excellence des études de cette nature pour former le jugement des élèves. Combien de fois n'a-t-il pas eu l'occasion d'être faussé par certains calculs *insensés* demandés à des candidats dans divers examens!

Kœhler. — Nombre de manières de décomposer un polygone en triangles par des diagonales. (325-327).

$$P_n = \frac{6.10.14\ldots(4n-10)}{3.4.5\ldots(n-1)}.$$

Ocagne (*M. d'*). — Note sur le partage des polygones quand la ligne de partage passe par un point donné sur le périmètre. (332-335).

Fajon. — Variations de la fonction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

(358-364).

Ocagne (*M. d'*). — Nouvelle construction de la tangente à l'ellipse. (363-365).

Données : Les sommets du grand axe et le point de contact.

LAQ.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE ([1]).

2e Série. — Tome X; 1881.

Brillouin. — Intégration des équations différentielles auxquelles conduit l'étude des phénomènes d'induction dans les circuits dérivés. (9-48).

Martin (*A.*). — Sur une méthode d'autocollimation directe des objectifs astronomiques et son application à la mesure des indices de réfraction des verres qui les composent; remarques sur l'emploi du sphéromètre. (49-66).

Joubert (*J.*). — Étude sur les machines magnéto-électriques. (151-174).

Bourguet. — Développement en séries des intégrales eulériennes. (175-232).

Le travail de M. Bourguet a été analysé dans la Ire Partie du *Bulletin*, 2e sér., t. V, Ire Partie, p. 43.

Damien. — Recherches sur le pouvoir réfringent des liquides. (233-304).

Picard (*É.*). — Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques. (305-322).

Soit $F(x, y)$ une fonction des deux variables illimitées x, y jouissant des propriétés suivantes.

Tout d'abord il existe entre quatre déterminations de la fonction une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Dans le voisinage de toute valeur α de x et β de y, différentes entre elles et ne coïncidant avec aucun des points 0, 1 et ∞, la fonction est holomorphe par rapport à x et à y; α étant une valeur quelconque différente de 0, 1 et ∞; trois des branches de la fonction ont, dans le voisinage de $x = 0$, $y = \alpha$, les formes suivantes, linéairement indépendantes :

$$P_1(x, y), \quad P_2(x, y), \quad x^{\lambda+b_1-1} P_3(x, y),$$

([1]) Voir *Bulletin*, VI_2, 5.

λ et b_1 étant deux constantes, et P_1, P_2, P_3 étant des fonctions holomorphes dans le voisinage de $x = 0$, $y = \alpha$.

Pareillement, dans le voisinage de $x = 1$, on aura les déterminations

$$Q_1(x,y), \quad Q_2(x,y), \quad (x-1)^{\lambda+b_2-1}Q_3(x,y),$$

les fonctions Q étant holomorphes pour $x = 1$, $y = \alpha$.

Enfin, pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on a trois déterminations,

$$x'^{-\lambda+1}R_1(x',y), \quad x'^{-\lambda+1}R_2, \quad x'^{3-\lambda-(b_1+b_2+b_3)}R_3(x',y),$$

les fonctions R étant holomorphes pour $x' = 0$, $y = \alpha$.

On a des déterminations analogues quand, x ayant une valeur différente de 0, 1, ∞, y prend des valeurs voisines de ces quantités; les lettres qui figurent en exposants doivent être accentuées. Enfin, pour $x = y = \alpha$, α étant différent de 0, 1, ∞, on a les déterminations linéairement indépendantes

$$A_1(x,y), \quad A_2(x,y), \quad (x-y)^{\lambda+b_3-1}A_3(x,y),$$

les fonctions A étant holomorphes dans le voisinage de $x = \alpha$, $y = \alpha$.

On suppose que λ, $\lambda + b_1$, $\lambda + b_2$, $\lambda + b_3$, $b_1 + b_2 + b_3$ ne sont pas des nombres entiers, que b_1 est différent de b_2; en outre, on a

$$b'_1 = b_1, \quad b'_2 = b_2, \quad b'_3 = \lambda, \quad \lambda' = b_3.$$

La fonction $F(x,y)$ est entièrement déterminée par les conditions précédentes, c'est-à-dire que, $F(x,y)$ étant une première fonction qui satisfasse à ces conditions, toute autre fonction jouissant des mêmes propriétés s'exprimera linéairement au moyen de trois déterminations de F, linéairement indépendantes. Parmi ces déterminations, il en est une qui est holomorphe par rapport à x et y dans l'intérieur des cercles ayant pour centres respectifs $x = 0$, $y = 0$ et un rayon égal à l'unité.

F_1, F_2, F_3 étant trois branches distinctes de la fonction F, celle-ci satisfera évidemment aux équations linéaires simultanées suivantes :

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} r & p & q & z \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & F_1 \\ \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & F_2 \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & F_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} s & p & q & z \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & F_1 \\ \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & F_2 \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & F_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Développant ces équations et étudiant la façon dont les coefficients se comportent dans le voisinage des points critiques, l'auteur arrive à montrer qu'elles peuvent s'écrire

$$(1)\quad x(x-1)(x-y)r+(\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C})p+ay(1-y)q+(\mathrm{D}x+\mathrm{E})z=0,$$

$$(2)\quad (x-y)s=(a''x+a')p+(b''y+b')q+ez=0.$$

La détermination des coefficients va résulter maintenant de la comparaison des recherches de M. Picard et des résultats obtenus par M. Pochhammer [*Ueber hypergeometrische Functionen höheren Ordnung* (*Journal de Borchardt*, t. LXXI)], concernant les équations analogues à l'équation hypergéométrique, mais où il y a lieu de considérer les quatre points critiques a_1, a_2, a_3 et ∞ : soit une fonction d'une seule variable x ayant ces quatre points critiques telle que, entre quatre branches de la fonction, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants, que dans le voisinage d'un point critique a_i on ait trois déterminations de la fonction linéairement indépendantes

$$\mathrm{P}_1(x),\quad \mathrm{P}_2(x),\quad (x-a_i)^{\lambda+b_i-1}\mathrm{P}_3(x),$$

que dans le voisinage de $x=\frac{1}{x'}=\infty$ on ait les trois déterminations

$$x'^{-\lambda+1}\mathrm{R}_1(x'),\quad x'^{-\lambda+1}\mathrm{R}_2(x'),\quad x'^{-3-\lambda-(b_1+b_2+b_3)}\mathrm{R}_3(x'),$$

où les fonctions R sont holomorphes pour $x'=0$, comme les fonctions P pour $x=a_i$; une telle fonction satisfera, comme l'a montré M. Pochhammer, à l'équation linéaire

$$\varphi(x)\frac{d^3\mathrm{F}}{dx^3}+\sum_{k=0}^{k=2}(-1)^{3-k}\left[(\lambda-k-1)_{3-k}\varphi^{(3-k)}(x)+(\lambda-k-1)_{2-k}\psi^{(2-k)}(x)\right]\frac{d^k\mathrm{F}}{dx^k}=0,$$

où

$$\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3),$$

$$\psi(x)=\varphi(x)\left(\frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\frac{b_3}{x-a_3}\right),$$

et où l'on écrit

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q}=(p)_q.$$

Or, la fonction F de M. Picard, regardée comme fonction de x seule, admet les points critiques 0, 1, y, ∞, satisfait aux conditions qui viennent d'être énumérées et vérifie donc une équation linéaire du troisième ordre telle que la précédente. De même si on la considère comme une fonction de y.

Maintenant, des équations (1) et (2) on peut tirer une équation différentielle du troisième ordre, où ne figurent plus que les dérivées par rapport à x, équation qui doit être identique avec celle dont il vient d'être question, et c'est, en effet, l'identification des coefficients qui permet à l'auteur de déterminer les constantes inconnues qui figurent dans les équations (1) et (2); il parvient ainsi aux deux équations

$$(x-y)s = (1-\lambda')p + (\lambda - 1)q,$$

$$x(x-1)(x-y)r$$
$$+[(s-2\lambda-b_1-b_2-b_3)x^2+(2\lambda+b_1+b_2-4)xy+(\lambda-3+b_1+b_3)x+(\lambda+b_1-2)y]p$$
$$+(1-\lambda)y(1-y)q+(\lambda-1)(3-\lambda-b_1-b_2-b_3)(x-y)z = 0.$$

Il reste à établir que ces deux équations ont effectivement trois solutions communes, linéairement indépendantes.

Or, l'équation linéaire du troisième ordre, où figurent les dérivées prises par rapport à x et qui se déduit, comme il a été expliqué, de l'équation générale de M. Pochhammer, admet, ainsi qu'il résulte des recherches de ce dernier, pour intégrale l'intégrale définie, analogue à celle qui vérifie l'équation hypergéométrique

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

g et h désignant deux quelconques des quantités $0, 1, y, x$ et ∞, en supposant toutefois, pour que toutes ces intégrales aient un sens, que l'on a

$$b_1 > 0,\quad b_2 > 0,\quad b_3 > 0,\quad \lambda > 0,$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + \lambda - 3 < 0.$$

Cette même intégrale vérifie aussi l'équation du troisième ordre, où figurent les dérivées par rapport à y; M. Picard montre, par la substitution, qu'elle vérifie les équations (1) et (2).

Le système d'équations simultanées, ainsi obtenu par M. Picard, coïncide, par le changement des notations avec celles qu'a étudiées M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 février 1880) et qui ont servi de point de départ à ses recherches sur les séries hypergéométriques à deux variables; la détermination de la fonction de M. Picard, qui est holomorphe par rapport à x, y dans l'intérieur des cercles ayant pour centres respectifs $x = 0, y = 0$ et un rayon égal à 1, n'est autre que la série hypergéométrique de M. Appell.

André (*C.*) et *Angot*. — Origine du ligament noir dans les passages de Vénus et de Mercure et moyen de l'éviter. (323).

Hioux. — Racines communes à deux équations algébriques entières. (363-390).

Étude du déterminant de M. Sylvester; formation des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de p racines communes entre deux équations algébriques qui n'ont pas de racines communes infinies ou nulles; formation de l'équation aux racines communes.

Appell. — Mémoire sur les équations différentielles linéaires. (391-424).

L'objet principal du Mémoire de M. Appell est l'étude des fonctions des intégrales d'une équation différentielle linéaire, qui jouent le même rôle que les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique entière : l'auteur complète ainsi la série des analogies si remarquables qui existent entre les équations linéaires et les équations algébriques.

I. *Des fonctions invariantes.*

Soient np variables

$$\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1p}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2p}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{np}. \end{array}$$

M. Appell nomme *fonction invariante* de ces np variables une fonction algébrique entière des variables qui se reproduit, multipliée par une puissance du déterminant de la substitution, quand on fait sur les variables une substitution linéaire, telle que

$$\begin{aligned} x_{i1} &= C_{i1}y_{11} + C_{i2}y_{21} + \ldots + C_{in}y_{n1}, \\ x_{i2} &= C_{i1}y_{12} + C_{i2}y_{22} + \ldots + C_{in}y_{n2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{in} &= C_{i1}y_{1n} + C_{i2}y_{2n} + \ldots + C_{in}y_{nn}, \end{aligned}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, et désigne une telle fonction par le symbole

$$I(x_{ik})_{np}.$$

Si D est le déterminant de la substitution, on aura, d'après cela,

$$I(x_{ik})_{np} = D^m I(y_{ik})_{np};$$

m est le degré de la fonction invariante.

Une fonction invariante et de degré m est homogène et de degré m par rapport aux variables d'une même ligne.

Une fonction invariante $I(x_{ik})_{np}$ dans laquelle p est moindre que n est une constante.

Une fonction invariante $I(x_{ik})_{np}$ dans laquelle $n = p$ est, à un facteur près, indépendant des variables x, est une puissance du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si dans une fonction invariante $I(x^{ik})_{np}$, on remplace les variables d'une colonne par une même fonction linéaire des autres variables de la même ligne respectivement, à savoir, par exemple

$$x_{ip} = \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \ldots + \alpha_{k-1} x_{i,p-1},$$

où ($i = 1, 2, \ldots, n$) la fonction devient une fonction invariante de même degré que la proposée des variables restantes $x_{ik}\begin{pmatrix} K = 1, 2, \ldots, p-1 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$.

Les théorèmes précédents permettent de trouver la forme générale d'une fonction invariante du degré m des np variables x, en supposant $p > n$.

Soient $\Delta_{1k}, \Delta_{2k}, \ldots, \Delta_{nk}$ les déterminants obtenus, en remplaçant dans le déterminant Δ successivement les éléments de la première, de la deuxième, de la $n^{\text{ième}}$ colonne par $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$; on aura

$$x_{ip} = \frac{1}{\Delta}(x_{i1}\Delta_{1p} + x_{i2}\Delta_{2p} + \ldots + x_{in}\Delta_{np}),$$

$$x_{i,p-1} = \frac{1}{\Delta}(x_{i1}\Delta_{1,p-1} + x_{i2}\Delta_{2,p-1} + \ldots + x_{in}\Delta_{n\,p-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{i,n+1} = \frac{1}{\Delta}(x_{i1}\Delta_{1,n+1} + x_{i2}\Delta_{2,n+1} + \ldots + x_{in}\Delta_{n\,n+1}),$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$. Si, maintenant, dans une fonction invariante quelconque $I(x_{ik})_{np}$ de degré m, on remplace $x_{ip}, x_{i,p-1}, \ldots, x_{i,n+1}$ par les expressions précédentes, cette fonction deviendra une fonction invariante du même degré des variables restantes

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n}, \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots,} \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{nn}, \end{array}$$

c'est-à-dire le produit de Δ^m par une constante qui ne peut être qu'une fonction entière des coefficients $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}$. En effectuant ce produit, on obtiendra la fonction $I(x_{ik})_{np}$ sous forme d'une fonction entière homogène de degré m des $n(p-n)+1$ déterminants $\Delta, \Delta_{ip}, \Delta_{i,p-1}, \ldots, \Delta_{i,n+1}$ où $i = 1, 2, \ldots, n$.

II. *Sur les équations différentielles linéaires.*

Soient

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0$$

une équation différentielle linéaire sans second membre et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales. M. Appell établit le théorème suivant :

« Une fonction algébrique entière F de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et des dérivées de ces fonctions qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on y remplace $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées multipliée par une puissance de $e^{-\int a_1 dx}$. Ce théorème s'étend à un système d'équations linéaires simultanées du premier ordre, et même à des systèmes d'équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles. »

Une application simple de ce théorème consiste à former la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations différentielles linéaires

$$f(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0,$$

$$\varphi(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + b_1 \frac{d^m y}{dx^{m-1}} + \ldots + b_m y = 0,$$

aient une intégrale commune, et cela par un procédé entièrement analogue à l'élimination par les fonctions symétriques. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales de la première de ces équations; la condition cherchée est la suivante :

$$\delta = \begin{vmatrix} \varphi(y_1) & \frac{d\varphi(y_1)}{dx} & \frac{d^2\varphi(y_1)}{dx^2} & \cdots & \frac{d^n\varphi(y_1)}{dx^n} \\ \varphi(y_2) & \frac{d\varphi(y_2)}{dx} & \frac{d^2\varphi(y_2)}{dx^2} & \cdots & \frac{d^n\varphi(y_2)}{dx^n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi(y_n) & \frac{d\varphi(y_n)}{dx} & \frac{d^2\varphi(y_n)}{dx^2} & \cdots & \frac{d^n\varphi(y_n)}{dx^n} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant δ est une fonction invariante du premier degré de

$$\begin{array}{llll} y_1, & \frac{dy_1}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{m+n-1} y_1}{dx^{+mn-1}}, \\ y_2, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{m+n-1} y_2}{dx^{m+n-1}}, \\ \multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,} \\ y_n, & \frac{dy_n}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{m+n-1} y_n}{dx^{m+n-n1}}; \end{array}$$

par conséquent, ce déterminant est égal à une fonction rationnelle entière des coefficients de la première des équations différentielles linéaires et de leurs dérivées multipliées par $e^{-\int a_1 dx}$. En calculant cette fonction entière par le procédé expliqué plus haut, on obtient la condition cherchée, $\delta = 0$ en fonction entière des coefficients des deux équations et des dérivées de ces coefficients.

III. *Transformation des équations différentielles linéaires.*

Le même théorème fondamental fournit une méthode générale pour la transformation des équations différentielles linéaires.

Soit une équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de certaines fonctions de x considérées comme connues et des dérivées de ces fonctions. On dit que cette équation est irréductible s'il n'existe aucune autre équation différentielle d'ordre moindre que n, dont les coefficients soient des fonctions rationnelles des fonctions de x considérées comme connues et de leurs dérivées, et dont les intégrales appartiennent toutes à l'équation considérée.

Dans le cas de l'équation générale, les fonctions connues ne sont autres que les coefficients eux-mêmes, et l'équation est nécessairement irréductible.

Soit

$$\eta = f\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}};\ y_2, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{d^{m_2}y_2}{dx^{m_2}};\ y_n, \frac{dy_n}{dx}, \dots, \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right)$$

une fonction algébrique entière des intégrales $y_1, \dots, y_n$ de l'équation proposée et de leurs dérivées, les coefficients qui figurent dans cette fonction étant des fonctions données de x; le problème général de la transformation des équations différentielles linéaires consiste à former l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la fonction η.

En remplaçant par η les y valeurs dérivées par des fonctions linéaires des éléments z d'un autre système fondamental d'intégrales et leurs dérivées, on obtiendra p termes linéairement indépendants

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p,$$

entiers par rapport aux quantités z et leurs dérivées; le nombre p sera l'ordre de l'équation différentielle linéaire cherchée, et celle-ci sera

$$\begin{vmatrix} \frac{d^p\eta}{dx^p} & \frac{d^p\varphi_1}{dx^p} & \dots & \frac{d^p\varphi_p}{dx^p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta & \varphi_1 & \dots & \varphi_p \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction invariante de z_1, $z_2, \dots, z_p$ et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. On pourra donc l'exprimer en fonction des seuls coefficients de l'équation proposée.

M. Appell considère en particulier les transformations

$$\eta = A_0 \frac{d^m y_1}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} + \dots + A_m y_1,$$

$$\eta = y_1^{m},$$

$$\eta = \varphi_{k_1}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \varphi_{k_2}(y_1, \dots, y_n) + \dots + \varphi_{k_m}(y_1, \dots, y_n),$$

où les φ sont des fonctions homogènes entières à coefficients constants de $y_1, \dots, y_n$ d'un degré marqué par l'indice.

IV. *Sur le cas où il existe des relations algébriques entre les intégrales d'une équation différentielle linéaire.*

Cherchons la condition pour qu'il existe entre les intégrales $y_1, \dots, y_n$ une relation de la forme

$$\varphi_{k_1}(y_1, \dots, y_n) + \dots + \varphi_{k_m}(y_1, \dots, y_n) = 0,$$

où les symboles ont la même signification que précédemment. Cette relation contient un nombre N de coefficients constants; en la différentiant N — 1 fois, par rapport à x, on obtient un système de N équations homogènes et du premier degré par rapport aux N coefficients constants : l'élimination de ces coefficients conduit à la condition cherchée

$$\mathfrak{D} = 0.$$

Ce déterminant $\mathfrak{D}$ est une fonction invariante de

$$\begin{array}{llll} y_1, & \dfrac{dy_1}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{N-1}y_1}{dx^{N-1}}, \\ y_2, & \dfrac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{N-1}y_2}{dx^{N-1}}, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ y_n, & \dfrac{dy_n}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{N-1}y_n}{dx^{N-1}}; \end{array}$$

on pourra donc l'exprimer en fonction des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées.

M. Appell montre ensuite comment, cette condition $\mathfrak{D} = 0$ étant supposée remplie, on peut déterminer les coefficients constants qui figurent dans la relation. Ainsi la condition pour que, entre deux intégrales distinctes y_1, y_2 de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{dy}{dx} + by,$$

il existe une relation de la forme

$$Ay_1^2 + 2By_1y_2 + Cy_2^2 + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des constantes, est

$$\frac{db}{dx} = 2ab.$$

Si cette condition est remplie, l'intégration se ramène aux quadratures.

Plus généralement, s'il existe entre les intégrales y_1 et y_2 une relation algébrique entière de la forme

$$\varphi_{k_1}(y_1, y_2) + \varphi_{k_2}(y_1, y_2) + \ldots + \varphi_{k_m}(y_1, y_2) = 0,$$

l'intégration se ramènera à des intégrales abéliennes dont le genre est précisément le genre de la courbe algébrique définie par l'équation précédente.

Goursat. — Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique. (*Suppl.*, 1-142).

Le travail de M. Goursat a été analysé dans la Ire Partie du *Bulletin*.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement (¹).

48ᵉ Cahier. — Tome XXIX, 1880.

Laussedat. — Discours prononcé aux funérailles de M. Chasles. (IV-VIII).

Lecornu. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. (1-109).

Ce travail, qui a fait l'objet d'une thèse soutenue devant la Faculté de Paris, a été analysé dans la première Partie du *Bulletin.*

Jordan. — Mémoire sur l'équivalence des formes. (110-151).

Le présent Mémoire, dit l'auteur en débutant, a pour objet d'étendre aux formes de degré supérieur au second et à coefficients complexes les belles méthodes introduites par M. Hermite dans l'étude des formes quadratiques (t. 40, 41, 47 du *Journal de Crelle*). Il est divisé en trois Sections :

Dans la première, nous nous bornons à établir quelques propositions préliminaires relatives à l'équivalence algébrique des formes.

La deuxième Section est consacrée à l'examen des formes de l'espèce suivante, déjà étudiée par M. Hermite :

$$\begin{aligned} F = \text{norme}\,(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots \\ + \text{norme}\,(a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n), \end{aligned}$$

où les variables x et les coefficients a sont des quantités complexes de la forme $\alpha + \beta i$. Nous démontrons les propositions suivantes :

1° Toute forme F du déterminant $\gtrless 0$ est équivalente à une réduite R de même espèce, où les modules des coefficients sont limités en fonction de la norme Δ du déterminant de F et du minimum μ de cette forme.

2° Les formes F à coefficients entiers et de même déterminant se répartissent en un nombre limité de classes.

3° Les substitutions linéaires à coefficients entiers qui transforment une réduite en elle-même ou en une autre réduite ont les modules de leurs coefficients limités. La limite ne dépend que du nombre des variables.

Dans la troisième Section nous appliquons ces résultats à l'étude des formes à coefficients complexes à n variables et de degré m supérieur à 2. Nous établissons les théorèmes suivants :

1° *Une forme quelconque* F *à coefficients entiers est équivalente à une ré-*

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 110.

duite dont les coefficients ont leurs modules limites en fonction entière des modules des invariants de F.

Dans le cas particulier où F aurait des covariants identiquement nuls, la limite dépendrait également des entiers numériques qui figurent dans l'expression des coefficients de ces covariants.

2° *Les formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une même forme se distribuent en un nombre limité de classes.*

Ces deux propositions sont en défaut dans quelques cas particuliers; mais ces exceptions ne peuvent se présenter que pour les formes dont le discriminant est nul.

3° *Si deux formes* F, G, *à n variables, de degré $m > 2$ et à coefficients entiers ont leur discriminant différent de zéro, le nombre des substitutions qui transforment* F *en* G *sera limité en fonction de m et de n et les modules de leurs coefficients seront limités en fonction entière des modules des coefficients de* F *et de* G.

On pourra donc, par un nombre limité d'essais, reconnaître si F et G sont équivalents, et trouver toutes les substitutions à coefficients entiers qui les transforment l'une dans l'autre.

Jordan. — Sur la réduction des substitutions linéaires. (151-161).

Toute substitution linéaire S à n variables et de déterminant D peut être mise sous la forme ETE', E et E' étant des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1, et T une substitution dont les coefficients ont leurs normes inférieures à $K_n \sqrt[n]{\Delta}$, Δ désignant la norme de D, et K_n une constante qui ne dépend que de n.

Mathieu. — Mémoire sur des intégrations relatives à l'équilibre d'élasticité. (163-206).

L'auteur détermine d'abord la fonction de Green pour un parallélépipède rectangle, sous une forme différente de celle qu'a donnée Riemann, et la fonction analogue pour un rectangle.

Il détermine ensuite une fonction V de x, y, z et de x', y', z' qui reste invariable quand on permute x, y, z avec x', y', z', qui satisfait à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta V = 0$ dans l'intérieur d'un parallélépipède rectangle, qui reste finie et continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, compté au point x', y', z' où son Δ se réduit à $\frac{1}{r}$, enfin qui se réduit à zéro quand le point x, y, z vient sur la surface. M. Mathieu avait déjà établi l'existence d'une telle fonction à l'intérieur d'une surface quelconque (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XIV). Il résout aussi la question analogue dans le plan.

Il s'occupe ensuite d'une fonction V_1 de x, y, z et de x', y', z', analogue à la fonction V satisfaisant à la même équation aux différences partielles et dont le Δ est infini de la même manière au point x', y', z'; mais non seulement V_1, mais aussi $\frac{dV_1}{dn}$, s'annulent sur la surface, dn étant l'élément de normale à la surface menée intérieurement.

Les calculs sont développés dans le cas où la figure est plane et rectangulaire.

Connaissant la fonction V_1 pour un parallélépipède rectangle ou pour un rectangle, on peut résoudre le problème suivant :

« Déterminer une fonction u des coordonnées d'un point (x, y, z) qui satisfasse à l'intérieur de la figure à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$, qui y soit finie et continue dans cette étendue avec ses dérivées des trois premiers ordres, en supposant qu'on connaisse u et $\frac{du}{dn}$ sur la surface ou le contour de la figure. »

Ce problème permet, en particulier, de déterminer la forme affectée par la surface médiane d'une plaque rectangulaire dont on a déformé légèrement les bords, connaissant la déformation du contour et l'inclinaison de la normale à ce contour sur sa position primitive.

Humbert (*G.*). — Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. (207-220).

Soit l'équation

$$\Delta(x)y'' + G(x)y' + F(x)y = 0,$$

où

$$\Delta(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_p),$$

$$\frac{G(x)}{\Delta(x)} = \frac{\mu_0}{x - x_0} + \frac{\mu_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{\mu_p}{x - x_p}.$$

En supposant que le polynôme $F(x)$ soit déterminé de façon que l'équation différentielle soit vérifiée par un polynôme de degré n, $P_n(x)$ et que toutes les quantités μ soient positives, et en posant

$$K(x) = (x - x_0)^{\mu_0}(x - x_1)^{\mu_1}\ldots(x - x_p)^{\mu_p},$$

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x - z},$$

on aura la relation

$$P_n(x)(I_1 + \omega_1 I_2 + \ldots + \omega_{p-1} I_p) = \Pi_{n-1}(x) + \left(\frac{1}{x^{n+p}}\right),$$

où $\Pi_{n-1}(x)$ représente un polynôme de degré $n - 1$ et $\left(\frac{1}{x^{n+p}}\right)$ une série procédant suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x}$ commençant par un terme en $\frac{1}{x^{n+p}}$, et où enfin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}$ sont des constantes.

On en conclut l'équation

$$\sum \int_{x_k}^{x_k} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z)\Pi_{n+p-2}(z)\,dz = 0,$$

où $\Pi_{n+p-2}(z)$ est un polynôme quelconque, de degré $n+p-2$ au plus, et l'on déduit de là le théorème suivant :

Si les racines x_0, x_1, ..., x_p sont réelles et rangées dans cet ordre de grandeur, si de plus μ_0, μ_1, ..., μ_p sont positifs, tout polynôme $P_n(x)$ satisfaisant à l'équation

$$\Delta(x)y'' + G(x)y' + F(x)y = 0$$

aura ses racines réelles et comprises entre x_0 et x.

Rouché (E.). — Note sur les équations linéaires. (221-228).

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI (¹).

Tome XIII; 1880.

B. Boncompagni. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. D. Smeraldo Borghetti Lucchese, canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore. (1-80, 121-200, 245-368).

Le Traité d'Arithmétique de Borghetti est intitulé : *Opera d'Abbaco del Reuerendo Padre, Don Smeraldo Borghetti da Lucca, canonico regolare della Congregation del Saluatore, e ordine di Sant'Agostino : nella quale s'insegna ogni sorte di ragion merchantile, con molte inuentioni, non men belle che utili. — Con priuilegio. — In Venetia,* MDXCIIII. *Appresso Francesco Barileti.* Cette édition très rare n'est mentionnée, ni par Mazzuchelli, dans son grand Ouvrage : *Gli Scrittori d'Italia,* ni par Riccardi dans sa *Biblioteca matematica italiana.* On n'en connaît que sept exemplaires, savoir : deux à la Bibliothèque communale de Ravenne, un à la Bibliothèque publique de Lucques, un à la Bibliothèque capitulaire de Trévise, un à la Bibliothèque du séminaire épiscopal de Padoue, un à la Bibliothèque ducale de Gotha, un à la Bibliothèque nationale de Paris. A propos de la mention de ce dernier exemplaire faite au Catalogue manuscrit des Ouvrages imprimés de la Bibliothèque de Paris, le prince Balthasar Boncompagni donne des renseignements précieux sur la composition de ce Catalogue, sur la personne de Jean Buvat, copiste, et sur celle de l'abbé Jourdain, secrétaire de la Bibliothèque du Roi, dont les prénoms, Jacques-Nicolas, sont ici publiés pour la première fois. La simple énumération des énormes travaux accomplis par Jean Buvat constitue un brevet d'honneur justement accordé au laborieux et modeste copiste, l'auteur des Mémoires de la Régence et le révélateur de la Conspiration de Cellamare.

(¹) Voir *Bulletin*, VI_2, 195.

Selon mention faite par Carcavi, feuillet 284 du manuscrit n° 17172 du fonds latin de la Bibliothèque nationale de Paris, l'exemplaire que nous avons en France faisait partie des Livres de Mathématiques et d'Astronomie que Jean-Dominique Cassini acheta en Italie et qu'il donna généreusement à la Bibliothèque du roi Louis XIV.

D. Smeraldo Borghetti, ordonné prêtre dans la cathédrale de Vicence, le 21 décembre 1596, s'adonna entièrement aux Mathématiques, et particulièrement à l'Arithmétique et à l'Algèbre. Dans son *Opera d'Abbaco,* il résout, entre autres problèmes, celui de la duplication des grains, par case de l'échiquier; et c'est l'occasion pour le prince Boncompagni de nous montrer ce même problème fameux dans Maçoudi (943-948 de l'ère chrétienne), Léonard de Pise (1202), Alsafadi (XIV^e siècle), Luca Pacioli (1494), Adam Riesen (1550), Butco (1559), Clavius (1583). Dans ce savant et consciencieux Mémoire, de près de 300 pages, on rencontre une foule de renseignements bio-bibliographiques curieux et intéressants, qu'il nous est impossible même d'indiquer ici, et qu'il faut lire dans le *Bullettino.*

Narducci (Enrico). — Notizie di Libri relativi alle Matematiche, posseduti dalla Biblioteca Alessandrina e non citati dal conte Giovanni Maria Mazzuchelli nella parte stampata della sua opera intitolata : *Gli Scrittori d'Italia,* ecc. (369-378).

Le comte J.-M. Mazzuchelli s'était proposé de donner des Notices historiques et critiques, par ordre alphabétique des noms, sur tous les écrivains nés en Italie. De cette œuvre considérable deux volumes in-folio furent publiés; ils ne contiennent que les deux premières lettres : A et B. Outre ces deux volumes imprimés, il existe, dans quatre manuscrits conservés au Vatican, 1518 articles de la lettre C, tout prêts pour l'impression.

Dans sa Notice, M. Enrico Narducci, le vaillant bibliographe, nous apporte un utile supplément à l'œuvre, malheureusement inachevée, de Mazzuchelli, en nous indiquant les mathématiciens et philosophes omis dans les deux volumes publiés, et dont il a rencontré les ouvrages dans la bibliothèque Alessandrina qu'il dirige et qu'il connaît à fond.

Steinschneider (Maurice). — Notice sur les Tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon. (413-436; fr.).

M. Maurice Steinschneider, savant orientaliste et mathématicien de Berlin, a écrit sa Notice en français. Son but, dit-il modestement, est « d'attirer l'attention de ceux qui s'intéressent à l'histoire des Sciences mathématiques sur un ouvrage qui est presque échappé aux bibliographes, et de les inviter à faire les recherches spéciales qui pourront résoudre une question d'authenticité littéraire de quelque importance. » M. Rico y Sinobas, dans le tome V, I^{re} Partie, de son magnifique ouvrage, intitulé : *Libros del saber de Astronomia del Rey D. Alphonso X de Castilla, compilados, anotados y comentados por Don Manuel Rico y Sinobas,* Madrid, 1867, in-f°, revendique, pour le roi Alphonse X, un manuscrit astronomique qui appartient, selon toute vraisemblance, à Pierre III d'Aragon.

Le manuscrit n° 10263 du fonds latin de la Bibliothèque nationale de Paris renferme, parmi les différentes pièces qui s'y trouvent, les *Canones super tabulas... Petri tertii.* Ces canons ont dû être écrits primitivement en catalan, ils ont été traduits en hébreu et il en existe trois versions manuscrites en cette langue. Cette pièce est précédée d'une Préface ou Prologue, en latin, de Pierre III d'Aragon. M. Rico y Sinobas a commis de singulières méprises relativement à ce Prologue et au manuscrit précité de la Bibliothèque nationale de Paris. M. Steinschneider les a mises en évidence en donnant une copie très exacte de ce prologue, faite par M. Marre, une transcription du texte latin faite par lui, et la version hébraïque de ce même prologue, d'après un fac-simile tiré du manuscrit n° 379 du Vatican par les soins du prince Balthasar Boncompagni.

Henry (*Ch.*). — Supplément au Travail intitulé : *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat,* suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche. (437-470).

Ce supplément renferme un grand nombre de corrections, typographiques et autres, au Mémoire publié précédemment dans le *Bullettino.* Il ajoute aux pièces déjà produites, et relatives à Fermat, trois documents officiels dont les originaux sont conservés aux archives de l'ancien Parlement de Toulouse : 1° « Lettres de provision de l'estat et office de conseiller aux requestes en faveur de Pierre Fermat, avocat (du 22 janvier 1631) » ; 2° « Lettre de don et octroy de l'office de conseiller lay en la cour du Parlement de Toulouse, du 30 décembre 1637 » ; 3° Trois arrêts dont Fermat a été le rapporteur en 1641 et 1645.

Quant aux additions concernant Malebranche et ses prétendus essais sur la théorie des nombres, elles ne sont pas de nature à modifier l'opinion de ceux qui nient formellement que ces fragments de correspondance sur la théorie des nombres soient de Malebranche; elles ne sauraient justifier, à notre avis, les conclusions de M. Ch. Henry, à savoir que « les assertions du rédacteur de l'inventaire (des mss. de l'Oratoire) ont une autorité considérable, et qu'il faut attribuer à Malebranche toutes les pièces qui n'ont pas une origine certaine et indiscutable. » Nous n'avons, là-dessus, qu'un mot à dire : c'est que l'inventaire sur lequel M. Ch. Henry s'est appuyé n'a ni la force ni la valeur qu'il lui attribue, et, selon les paroles de l'éminent Directeur de la Bibliothèque nationale, l'autorité de ce Catalogue, dont l'auteur est inconnu, ne saurait être acceptée que sous bénéfice d'inventaire.

Govi (*Gilberto*). — Nuovo documento relativo alla invenzione dei cannochiali binocoli, con illustrazioni. (471-480).

Presque tous les écrivains de l'histoire des Sciences attribuent au P. Schyrl, capucin de Bohême, né vers 1597, mort à Ravenne en 1660, l'invention des lunettes d'approche binoculaires. C'est dans la I^{re} Partie de l'Ouvrage publié à Anvers, en 1645, sous le titre bizarre d'*Oculus Enoch et Eliæ sive radius sidereomysticus,* qu'il traite, p. 336-356, de la lunette d'approche binoculaire. Cette invention n'appartient pas au capucin Schyrl, mais bien à un opticien de Paris, du nom de Chorez, qui en 1625 vendait des binocles dans l'île Notre-Dame, à l'enseigne du Compas. C'est ce qui résulte d'une lettre imprimée, trouvée en septembre 1880 par M. Gilberto Govi, le savant physicien italien, dans le manuscrit n° 9531 du fonds français, correspondance de Peiresc. La pièce est intitulée : *Les admirables Lunettes d'approche réduites en petit volume auec leur vray usage et leur utilitez preferable aux grandes, et le moyen de les acomoder à l'endroit des deux yeux, le tout mis en pratique, ainsi qu'elles sont représentées par ces figures suiuantes, et dédié au roy, l'an* 1625, par D. Chorez. » Cette lettre est adressée au roi ; elle commence ainsi : « Sire, il y a près de cinq ans que je reçeu l'honneur de presenter à vostre Maiesté les prémices de mon travail, en ce qui est communement appelé Lunettes d'approche, etc. » Les avis et directions pratiques formulés par Chorez dans cette sorte de lettre-manifeste sont très utiles, selon M. Gilberto Govi qui a rendu justice à l'habile opticien et l'a retiré de l'injuste oubli dans lequel il était tombé.

The Edinburgh Review (n° 311, July 1880). — I Precursori inglesi del Newton. — Traduzione dall'inglese del Prof. Antonio Favaro.

Le XVII^e siècle doit être considéré comme le plus mémorable dans l'histoire de la Science en Angleterre ; en effet, selon l'observation faite par l'auteur anonyme de cet article de l'*Edinburgh Review*, les Anglais n'étaient encore, au commencement de ce siècle, que des disciples, et vers la fin de ce même siècle ils étaient reconnus comme les maîtres de l'Europe savante, et Isaac Newton comme l'arbitre de la Science. Parmi les personnages les plus marquants dont on retrace la vie et les travaux dans ce Mémoire, traduit par le D^r Favaro, il faut citer Robert Recorde, Jérémie Horrocks et surtout Robert Hooke.

Robert Recorde, mort en 1588, fut, paraît-il le premier Anglais qui ait écrit sur l'Algèbre ou la *Cossike practice*, comme il l'appelait. Ce serait lui qui aurait introduit cette science en Angleterre avec son Livre intitulé : *The whetstone of witte*, c'est-à-dire « la pierre à aiguiser du jugement ». Jérémie Horrocks fut un astronome distingué, mais il passa comme un météore et mourut dans sa vingt-deuxième année.

Robert Hooke, né dans l'île de Wight le 18 juillet 1635, mort le 3 mai 1703, fut l'un des premiers membres de la Société Royale de Londres et l'un des plus féconds inventeurs de machines mécaniques. Il inventa un ressort qui régularise le mouvement du balancier dans les horloges, et perfectionna les instruments astronomiques. Il fut peut-être le premier à entrevoir la merveilleuse découverte du téléphone. Toute sa vie peut être résumée en ces deux mots : expériences et controverses. On lui reproche d'avoir contesté à Newton ses plus belles découvertes. Les principaux Ouvrages qu'il ait laissés sont les suivants : *Méthode pour mesurer la Terre*. — *Mycographie*. — *Traduction des hélioscopes*. — *Lectiones Cutterianæ*. — Cette Notice contient un tableau saisissant du caractère inquiet, jaloux, égoïste et personnel, de l'esprit étroit, des sentiments sordides d'un homme qui ne mérita pas le titre de vrai savant, car il n'aima pas la Science pour elle, mais seulement pour lui-même. Robert Hooke voulut apposer sa « marque de fabrique » sur toute pensée scientifique ; mais il fut puni par où il avait péché : de toutes ses inventions, à peine y en a-t-il une qui porte aujourd'hui son nom, et ses travaux, repris, poursuivis, améliorés, terminés par ses héritiers intellectuels, devinrent autant de titres d'honneur pour ceux-ci devant la postérité, tandis que toutes ses réclamations de priorité restèrent vaines ou mêmes ignorées.

L'écrivain anonyme de l'*Edinburgh Review* attribue à deux hommes d'un génie singulier, à deux Italiens, Alberti et Léonard de Vinci, l'honneur insigne d'avoir ouvert la voie de l'étude et du culte de la nature, entraînant à leur suite astronomes, anatomistes, médecins et botanistes de l'Europe moderne.

Marre (*Aristide*). — Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des Nombres. (555-592).

Nicolas Chuquet, Parisien, bachelier en médecine à Lyon, composa en l'année 1484 son *Triparty en la science des nombres.* Cet Ouvrage renferme le plus ancien Traité d'Algèbre, écrit en français, que l'on connaisse aujourd'hui. Il y a plus de quarante ans que Michel Chasles, dans une Communication à l'Institut de France, faisait ressortir l'importance, au point de vue de l'histoire des Sciences mathématiques, d'un Ouvrage in-4° publié à Lyon, en l'année 1520, sous le titre de : *Larismetique nouuellement composée par maistre Estienne de la Roche, dict Villefranche, natif de Lyon.* Pour la première fois, il faisait à l'occasion de ce Livre la remarque singulière que voici, et qui plus tard devait porter ses fruits : « L'auteur y cite le travail d'Algèbre de maître Nicolas Chuquet, Parisien, autre Ouvrage d'un auteur français, antérieur à 1520. Peut-être la notation des exposants s'y trouvait-elle déjà. Il est à désirer, dans l'intérêt de l'histoire, que cet Ouvrage ne soit pas entièrement perdu. » (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences,* t. XII, p. 752, séance du mercredi 5 mai 1841).

L'ouvrage de Nicolas Chuquet existe sous le n° 1346 du fonds français des manuscrits de la Bibliothèque nationale de Paris; il contient en effet, comme l'avait supposé l'illustre géomètre, la notation des exposants longtemps attribuée à Descartes, et bien d'autres points encore qui intéressent l'histoire de l'Arithmétique et de l'Algèbre. S'il est resté manuscrit pendant quatre cents ans, c'est vraisemblablement à Estienne de la Roche lui-même qu'il faut en faire remonter la première cause, ainsi que le montre la IIe Partie de la Notice de M. Aristide Marre, intitulée : *Estienne de la Roche et son Œuvre par rapport au Triparty de Nicolas Chuquet* (*voyez* pages 569-580 du *Bullettino*).

Chuquet (*Nicolas*) *Parisien.* — Le *Triparty en la science des nombres,* par maistre Nicolas Chuquet Parisien, d'après le manuscrit, fonds français, n° 1346 de la Bibliothèque nationale de Paris. (593-659 et 693-814).

Ainsi que l'indique son nom, l'Ouvrage de Nicolas Chuquet comprend trois Parties distinctes. La premiere Partie traite des nombres entiers, des nombres routz (fractions), des progressions, des nombres parfaitz, des nombres proporcionalz, et de leurs proprietez, des rigles de troys, de une posicion, de deux posicions, de apposicion et remocion, de la rigle des nombres moyens. La seconde Partie traite des racines, racines simples, racines composées, racines lyées. Elle donne la règle des signes en ces termes : « qui multiplie plus par plus et moins par moins il en vient plus. Et qui multiplie plus par moins *Vel e contr.*, il en vient toujours moins. » La « tierce et derreniere Partie » est exclusivement consacrée à l'Algèbre que Nicolas Chuquet dénomme : la *Rigle des Premiers.*

Il ne nous appartient pas de nous glorifier de la publication de l'Œuvre de

Nicolas Chuquet, que l'on doit au prince Balthasar Boncompagni; mais il nous sera permis d'insérer ici comme témoignage irrécusable de l'intérêt qu'elle peut offrir la Lettre écrite le 4 novembre 1881 par le savant professeur d'Astronomie et directeur de l'Observatoire de Zurich au prince Balthasar Boncompagni, Lettre dont une copie nous fut immédiatement et courtoisement transmise par ordre du prince :

« Mon cher Monsieur,

» La Notice de M. Aristide Marre sur le *Triparty* de Chuquet, que vous avez insérée dans les Cahiers de septembre à décembre 1880 de votre *Bulletin*, est de la dernière importance pour l'histoire des Mathématiques.

» Si vous en avez fait faire un tirage à part, je serais très heureux si vous en vouliez doter ma Bibliothèque d'un exemplaire. »

Votre très dévoué.

R. WOLF.

Zurich, 1881, XI, 4.

Boncompagni (*D. Balthasar*). — Michel Chasles.

Michel Chasles professait une haute estime pour le prince Boncompagni, il lui était reconnaissant des services qu'il ne cesse de rendre à la Science; de son côté le prince Boncompagni avait une sorte d'admiration respectueuse pour son ami, l'illustre géomètre que la France a perdu le 18 décembre 1880. MM. Bertrand (Joseph), Bouquet, J.-B. Dumas et Rolland, membres de l'Académie des Sciences, et M. le colonel Laussedat, directeur des Études à l'École Polytechnique, ont prononcé sur la tombe de Michel Chasles des discours qui ont fait connaître l'homme et le savant. Le prince Boncompagni a voulu accomplir son devoir en consacrant dans son *Bullettino* une Notice nécrologique, encadrée de noir, à la mémoire de Michel Chasles. Ce sont les seules pages qu'on trouve ornées de ce signe de deuil dans les treize Tomes, déjà publiés, de cet important Recueil périodique. Cette Notice, après celles qu'on a déjà publiées tant en France que dans les pays étrangers, renferme sur les travaux du célèbre mathématicien un ensemble de renseignements bibliographiques du plus grand intérêt et de la plus parfaite exactitude. Un noble hommage y est rendu à cette École Polytechnique de Paris, qui, dans les vingt premières années de son existence, donna aux Sciences mathématiques, astronomiques et physiques, Arago, Becquerel, Binet, Biot, Brianchon, Cauchy, Chasles, Fresnel, Gay-Lussac, Malus, Plana, Poinsot, Poisson, etc.

Indépendamment des travaux, Mémoires et Notices indiqués ci-dessus, le tome XIII du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni* renferme, sous le titre : *Annunzi di recenti pubblicazioni,* un précieux répertoire des travaux mathématiques et physiques publiés récemment, un Catalogue analytique consciencieux et détaillé, qui occupe les pages 81-120, 201-244, 379-412, 515-554, 660-692, 828-868, du Tome XIII, auquel il ne manque plus, pour être entièrement complet, que l'*Index* par ordre alphabétique des noms d'auteurs.

A. M.

ZEITSCHRIFT FUR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT (¹).

Tome XI; 1880.

Gilles. — Directions dangereuses en Mathématiques. (5-24).

La plupart des objections que présente l'auteur contre certaines conceptions modernes seraient immédiatement éclaircies, si l'on se plaçait au vrai point de vue d'après lequel les Mathématiques n'ont pas pour objet l'étude des êtres réels, mais seulement les opérations qui servent à la transformation de ces êtres. Un être peut ne pas exister, sans pour cela être absurde; une opération peut toujours être conçue, tant qu'elle n'implique pas contradiction. Si cette distinction était mieux observée, on ne verrait plus ces polémiques acharnées contre la « Géométrie non euclidienne », qui rappellent involontairement les combats du chevalier de la Manche contre les moulins à vent. La réalité des conceptions mathématiques est tout à fait étrangère à leur étude, et, d'ailleurs, ce qui était hier *imaginaire* peut devenir *réel* aujourd'hui; exemple : la racine carrée de -1, qui désigne une opération *très réelle*, comme on le reconnaît universellement maintenant.

Günther (S.). — Compte rendu de la section des Sciences mathématiques et physiques du 34ᵉ Congrès des philologues et des professeurs allemands à Trèves. (66-73).

Reuschle. — Développement génétique des théorèmes relatifs aux racines et aux logarithmes, déduits des propriétés des puissances, et leur appréciation au point de vue de l'enseignement.

Günther (S.). — Résolution importante au point de vue didactique des équations trinômes.

Heilermann. — Sur le troisième arc-en-ciel.

Bauer (K.-L.). — Sur la manière de traiter la théorie du mouvement uniformément accéléré. (85-100).

Stolzenburg. — Une erreur dans les Traités de Physique. (101-102).

C étant la vitesse de la lumière d'un astre et c la vitesse de la Terre dans son orbite autour du Soleil, si l'on désigne par α l'*angle d'aberration*, c'est-à-dire

(¹) Voir *Bulletin*, III_2, 233.

la différence entre la position réelle et la position apparente de l'étoile vue de la Terre, le maximum de α, d'après les observations de Bradley, est donné par l'équation

$$\sin\alpha = \frac{c}{C},$$

d'où résulte C

$$C = \frac{c}{\sin\alpha},$$

et non $C = \dfrac{c}{\tang\alpha}$, comme l'indiquent à tort les Traités de Cosmographie.

Reidt (*F.*) et *Weinmeister* (*I.*). — Sur la définition des parallèles. (111-114).

M. Reidt définit deux parallèles comme étant des droites qui n'ont aucun point commun, même à l'infini. M. Weinmeister leur attribue un point commun à l'infini. Nous avouons ignorer ce qui se passe à de pareilles distances et nous croyons que les deux géomètres feraient mieux de se mettre d'accord, en admettant que les choses se passent, à distance finie, comme si les parallèles ne devaient jamais se rencontrer, et que cette situation mutuelle est la limite vers laquelle, la situation de deux droites, l'une fixe, l'autre mobile autour d'un point fixe et rencontrant la première en un point de plus en plus éloigné.

Programmes scolaires des établissements d'enseignement secondaire du royaume de Bavière pour l'année 1879. (148-153).

Röllinger (*G.*), Augsbourg. — Distribution de la chaleur solaire à la surface de la Terre. (66 p.).

Nägelsbach (*H.*), Erlangen. — Problème de la théorie des combinaisons. (24 p.).

Eilles (*Jos.*), Landshut. — Deux et trois courbes du second ordre dans une situation générale. (92 p.).

Maurer (*G.*), Münnerstadt. — Théorèmes sur les séries. (77 p.).

Nachreiner (*V.*), Spire. — Représentation l'une sur l'autre de deux surfaces courbes. (32 p.).

Walter (*E.*), Ratisbonne. — Le choc direct et central des corps élastiques ou non élastiques. (10 p.).

Ritz (*J.*), Munich. — Observations et calculs sur la réfraction de la lumière homocentrique sur n plans parallèles. (44 p., 4 Pl.).

Mang. — Compte rendu de la section de l'enseignement des Sciences mathématiques et naturelles au Congrès des Naturalistes et des Médecins à Baden-Baden, septembre 1879. (157-165).

Mang. — Sur la méthode d'enseignement de la Géographie mathématique au point de vue de la représentation visible.

Bauer (*K.-L.*). — Sur l'exposition de la théorie des miroirs et des lentilles sphériques. — Sur le calcul élémentaire du rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz.

Lips. — Sur l'exposition élémentaire et sur l'utilité des déterminants dans les écoles supérieures.

Diekmann (*Jos.*). — Les types fondamentaux des équations résolubles du second degré à deux inconnues. (173-183).

L'auteur établit les trois types suivants d'équations résolubles :

$$(1)\quad \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \\ \mu ax^2 + 2\mu bxy + c_1y^2 + 2\mu dx + 2e_1y + f_1 = 0; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \\ ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f_1 = 0; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} a_1x^2 + 2\mu bxy + \mu cy^2 + 2d_1x + 2\mu ey + f_1 = 0, \\ a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2\mu dx + 2\mu ey + \mu f = 0. \end{cases}$$

Schlegel (*V.*). — Statistique des Traités de Sciences mathématiques et naturelles dans les Écoles supérieures de Prusse. (184-187).

Hoffmann (*J.-C.-V.*). — Tableau général des types de calcul usités. Contribution à l'orthographe mathématique. (187-196).

On n'a pas d'idée, dans notre pays, de la diversité des notations arithmétiques et algébriques qui sont concurremment en usage dans les écoles d'Allemagne. En parcourant le tableau qu'en donne le savant rédacteur du *Zeitschrift,* on est étonné de voir que, dans un pays où les Mathématiques élevées sont cultivées à un si haut degré et dont les grands géomètres se sont montrés généralement de grands artistes dans le choix des notations, on tolère dans l'enseignement élémentaire des manières d'écrire barbares et ambiguës, donnant lieu à toute sorte d'interprétations. La plupart de ces négligences consistent en économies mal entendues de parenthèses, ou dans l'emploi inopportun du signe : pour la division.

Emsmann (*H.*).— Sur le système de coordonnées à quatre axes. (253-261).

Schlömilch (*O.*). — Sur les calculs d'amortissement et d'intérêt. (262-264).

Schaewen (von). — Sur la résolution des équations trigonométriques. (264-267).

Schlegel (V.). — Remarques sur l'article de M. Gilles au commencement de ce Volume. (274-278).

Défense des idées de la Géométrie moderne contre les objections de M. Gilles.

Gilles. — Réfutation des remarques de M. V. Schlegel. (278-281).

Pick (Ad.-Jos.). — Démonstration élémentaire de la formule de la déviation vers l'est des corps tombant librement. (337-342).

Soient h la hauteur de la chute, g l'intensité de la pesanteur, φ la latitude, w la vitesse angulaire de la Terre, x la déviation vers l'est. L'auteur établit la formule

$$x = \frac{2}{3} wh \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos\varphi.$$

Hoffmann (J.-C.-V.). — Les déterminants ou leur suppression. (343-360).

L'auteur présente dans cet article des considérations sur la manière d'introduire les déterminants dans l'enseignement élémentaire, en s'élevant du simple au composé. Il passe ensuite en revue les principaux Traités qui ont paru en Allemagne sur cette matière, et signale, comme les plus propres à être mis entre les mains des commençants, ceux de Studnička et de Reidt. Comme Traités complets il indique le Traité classique de Baltzer, les Ouvrages plus ou moins étendus de Günther, de Mansion (traduction allemande), de Dölp, etc.

M. Hoffmann attribue à l'emploi des mauvaises méthodes dans les écoles élémentaires d'Autriche le *veto* dont cette théorie a été frappée dans ce pays, et devant lequel n'a pas trouvé grâce l'excellent Livre de M. Studnička.

Schlömilch (O.). — Sur les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques d'un nombre quelconque de valeurs positives. (361-362).

La moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne géométrique, et celle-ci plus grande que la moyenne harmonique.

Günther (S.). — Les lignes remarquables dans le triangle sphérique. (421-427).

Expressions de l'arc bissecteur d'un côté ou d'un angle; arc mené du sommet perpendiculairement à la base, etc. Pour cet arc perpendiculaire, on trouve la formule

$$\sin\omega = 2\sqrt{\frac{\sin a \sin b \sin s \sin(s-c)}{\sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos c}}.$$

L'auteur indique le moyen de ramener le dénominateur à la forme monôme au moyen d'un angle auxiliaire. Il serait facile de montrer que cette simplification est illusoire, comme dans presque tous les cas analogues.

Schmitz (*Alf.*). — Remarque sur l'emploi de la méthode française pour la résolution des équations linéaires. (428-431).

Étant données les équations

$$x + 3y + 5z + 3u = 34,$$
$$x + y + 2z + u = 13,$$
$$x + 2y + 5z + 4u = 36,$$
$$x + 3y + 8z + 5u = 51,$$

si on les ajoute après avoir respectivement multiplié par les facteurs $1, \alpha, \beta, \gamma$, et qu'on égale à zéro les coefficients de x, y, z, on trouve des équations en α, β, γ contradictoires entre elles, bien que le système proposé soit résoluble et déterminé. L'auteur explique ce paradoxe par la considération des déterminants, et parvient à cette conclusion :

« Si d'un système d'équations on peut déduire deux ou plusieurs équations dans lesquelles deux ou plusieurs inconnues aient respectivement les mêmes coefficients, la *méthode française* n'est pas applicable à ce système. »

Killing (*W.*). — Nouvelles remarques sur l'article de M. Gilles. (435-436).

Gilles. — Réponse aux nouvelles remarques. (436).

Scheffler. — Vues erronées sur l'espace à quatre dimensions. (437-440).

Extrait de l'Ouvrage intitulé : *Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen*.

Tome XII; 1881.

Reidt. — Petites remarques sur la planimétrie. (8-17).

1. Sur les angles formés par deux parallèles coupées par une sécante, et dont la nomenclature est encore indécise et incomplète. — 2. Sur le classement des quadrilatères. — 3 et 4. Des démonstrations par superposition (*Congruenz*), et démonstrations analogues des cas de similitude.

Fleischhauer (*O.*). — Les principaux écueils du calcul des intérêts. (18-29).

Schlömilch (*O.*). — Note sur les séries conditionnellement convergentes. (30-31).

Müller. — La quatrième dimension de l'espace. (40-41).

Réfutation de la preuve tirée de l'existence de la fonction d'ordre supérieur formée par les exponentielles successives, et sur laquelle on a cru pouvoir fonder l'existence de la quatrième dimension.

Compte rendu du Congrès de philologues et de professeurs tenu à Stettin, en septembre 1880. (79-85).

Nous remarquons les questions suivantes, traitées dans cette assemblée :

1. Comparaison entre la méthode algébrique et la méthode purement géométrique pour la résolution des problèmes de Géométrie élémentaire.

2. Avantages et inconvénients de l'introduction de l'étude des déterminants dans l'enseignement des Gymnases. A une grande majorité, l'assemblée s'est prononcée contre cette introduction, dont les avantages ne se font sentir que lorsqu'on s'occupe d'applications générales, auxquelles ne donne pas lieu l'enseignement élémentaire donné dans les Gymnases.

Dieckmann (*J.*). — Les déterminants devant la Section mathématique et physique du 35e Congrès de philologues et de professeurs tenu à Stettin. (95-99).

Réclamation contre la décision du Congrès.

Godt. — Remarques critiques sur l'article du Dr Pick (t. XI, p. 337) (1). (100-104).

Pick. — Observations sur l'article précédent. (104-105).

Schumann. — Détermination élémentaire de la déformation dans la projection stéréographique polaire. (163-164).

Ernst (*A.*). — Construction des tangentes à l'ellipse et détermination de leurs points de contact, connaissant les diamètres conjugués de la courbe. (179-189, 251-254).

Stammer. — Sur l'enseignement de la théorie des combinaisons. (190-192).

---

(1) *Voir* plus haut, p. 287.

Erler. — Réfutation de l'article du Dr Dieckmann. (193-196).

Voir plus haut, p. 286.

Hoppe. — Sur les parallèles aux courbes fermées. (235-236).

Durège. — Sur certains phénomènes spéciaux ayant lieu à l'intérieur d'un espace à quatre dimensions. (236-237).

Kleinstück (*O.*). — Le paradoxe hydrostatique. (255).

Strack (*O.*). — Sur l'orthographe mathématique. (256-260).

L'auteur conseille, avec grande raison, de ne pas trop économiser les parenthèses dans les formules. Il considère la notation a^{b^c} comme équivalente à $(a^b)^c$: cette convention est-elle bien établie, et n'y aurait-il pas danger de confusion avec la notation $a^{(b^c)}$?

Emsmann (*H.*). — Réponse aux remarques de M. Müller (p. 40 de ce Volume) (1). (260-262).

Hauck (*G.*). — Le calcul graphique, son développement depuis Culmann et ses rapports avec l'École. (333-355).

Le premier Ouvrage sur cette branche du calcul est celui de Cousinery : *Le calcul par le trait,* publié à Paris en 1838. Cet Ouvrage était presque entièrement oublié quand parut, près de trente ans plus tard, la *Statique graphique* de Culmann (2). L'auteur de cet article présente un résumé intéressant sur ce remarquable Livre et sur les publications des auteurs contemporains sur le même sujet. Il examine, en terminant, la question de l'introduction de la *Statique graphique* dans les écoles; cette introduction ne lui paraît pas désirable.

Schmitz (*A.*). — La manière d'écrire $a : b \times c$ est-elle incorrecte? (356-357).

La formule ainsi présentée est-elle susceptible de plus d'une interprétation? Existe-t-il une convention universellement adoptée qui fasse cesser le doute? Poser ces questions, c'est en même temps les résoudre. Mais nous sommes profondément surpris de les voir poser dans un pays où les études pédagogiques sont cultivées avec autant de soin qu'en Allemagne.

Schlömilch (*O.*). — Théorème de perspective, avec son application pratique. (363-364).

---

(1) *Voir* ci-dessus, p. 289.

(2) *Die graphische Statik,* Zürich, 1866. — *Le même,* 2e édit., t. Ier, 1875.

Günther (*S.*). — Analyse de l'Ouvrage de M. Cantor : (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. I) (387-397, 476-481).

Les études mathématiques à l'Université de Tokio (Japon), pendant l'année 2539-2540 (1879-1880). (400-402).

Voici quelques-unes des questions de Calcul infinitésimal et de Géométrie analytique traitées par les élèves dans cette année scolaire 2539-2540 :

Conditions du maximum ou du minimum d'une fonction d'une variable. Exemple : $y = m \sin(x - a) \cos x$.

Maximum et minimum de y, pour $y^3 + x^3 - 3axy = 0$.

Asymptotes. Exemple : Trouver celles de la courbe $y^4 - x^4 + 2bx^2y = 0$.

Solutions de l'équation différentielle $x^3\,dy - x^2y\,dx + y^3\,dx - xy^2\,dy = 0$.

Connaissant les coordonnées des sommets d'un triangle, trouver son aire.

Démontrer que l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{a} = 0$ représente une parabole tangente aux axes, etc.

Diekmann (*J.*). — Sur la question des déterminants. (413-417).

Erler. — Courte réponse. (417).

Hahn (*J.*). — Sur les remarques de M. Schmitz au sujet de l'application de la *méthode française* à la résolution des équations linéaires. (417-419).

Voir plus haut, p. 288.

Schmitz. — Réponse. (419-421).

Hahn (*J.*). — Remarque finale. (421-422).

Fleischhauer (*O.*). — Emploi illégitime de la vie probable dans les calculs d'intérêt. (422-423).

Schlömilch (*O.*). — Sur la notation des coefficients binomiaux. (423-424).

Roth (*Fr.*). — Sur la Note de Stammer au sujet de la théorie des combinaisons. (424-425).

Voir plus haut, p. 289.

Diekmann (*J.*). — Sur les déterminants. (425-427).

L'auteur combat une assertion de M. Bardey au sujet de l'usage des déterminants pour la résolution des équations numériques du premier degré, et donne un exemple d'un algorithme très simple pour effectuer cette résolution.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME VI.