Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 69-98

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_69_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MASONI (U.). — SOPRA ALCUNE CURVE DEL QUARTO ORDINE DOTATE DI PUNTI DI ONDULAZIONE. Memoria del Dottor UDALRIGO MASONI, presentata per dissertazione di laurea all' Università di Napoli, il 20 novembre 1881. — Napoli, tipografia della R. Accademia delle Scienze fis. e mat., 1882.

M. Cayley est le premier géomètre qui ait considéré les points d'ondulation, c'est-à-dire ceux où la tangente coupe la courbe en quatre points consécutifs, et il a démontré d'une manière générale qu'en ces points la courbe est touchée par sa hessienne. M. Salmon, dans sa *Géométrie,* a reproduit le théorème de M. Cayley, et il a donné l'équation d'une courbe du quatrième ordre douée de quatre points d'ondulation situés sur une conique qui touche la courbe en ces quatre points. Enfin M. Kantor, dans un Mémoire publié en 1879 (1), a étudié géométriquement un faisceau de courbes du quatrième ordre ayant quatre ondulations. Ce sont là les seuls travaux publiés sur ce sujet.

L'auteur s'est proposé d'étudier toutes les courbes du quatrième ordre douées de points d'ondulation. Après avoir établi quelques propositions générales relatives à ces points, il donne l'équation générale des courbes du quatrième ordre admettant un, deux ou trois points d'ondulation. Puis il considère les courbes du quatrième ordre ayant quatre ondulations.

Si l'équation d'une conique est

$$C = 0$$

et que l'on écrive les équations

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0, \quad t_4 = 0$$

de quatre tangentes à cette conique, il est clair que l'équation

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = \lambda C^2$$

représente un faisceau de courbes du quatrième ordre ayant toutes

(1) KANTOR, *Ueber gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung* (*Sitzb. der K. Akad. der Wiss. zu Wien,* Bd. LXXIX; 1879).

quatre points d'ondulation communs, à savoir les points de contact de la conique C et des quatre tangentes. C'est le faisceau considéré par M. Kantor. L'auteur démontre que ce cas est le seul dans lequel les quatre points d'ondulation soient réels; c'est-à-dire : *si une courbe du quatrième ordre a quatre points d'ondulation réels, ces quatre points sont sur une conique qui touche la courbe du quatrième ordre en ces points.* Et l'on déduit aisément de là qu'une courbe du quatrième ordre ne peut avoir plus de quatre points d'ondulation réels.

Le reste du Mémoire contient une étude des cas, beaucoup plus difficiles, où tous les points ne sont pas réels. En particulier, au § VIII, l'auteur fait connaître une courbe n'ayant pas moins de douze points d'ondulation : c'est celle qui est représentée par l'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0.$$

Les points d'ondulation sont sur les droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

et leur considération donne naissance à quelques propositions élégantes par lesquelles se termine le Mémoire.

D'ESCLAIBES — SUR LES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES A L'ÉTUDE DES COURBES DU PREMIER GENRE. Thèse présentée à la Faculté des Sciences et soutenue le 21 mai 1880 — Paris, Gauthier-Villars, 1880.

La première Partie de cette Thèse reproduit les résultats obtenus par Clebsch au sujet des courbes elliptiques. L'auteur a notablement simplifié le mode d'exposition adopté par l'illustre géomètre. Signalons en particulier la méthode nouvelle au moyen de laquelle il évalue le degré du polynôme placé sous le radical qui figure dans l'expression des coordonnées d'un point de la courbe. Cette méthode peut s'appliquer également aux courbes du second genre.

Ce Mémoire contient encore une démonstration très simple des formules d'Aronhold relatives aux courbes planes du troisième degré, et des formules de M. Westphal relatives à la courbe gauche intersection de deux surfaces du second ordre. Au moyen de la fonction $p(u)$ considérée par M. Weierstrass, l'auteur obtient, en fonction des invariants d'une cubique et des coordonnées d'un de ses points, les racines de l'équation du neuvième degré qui détermine les points d'inflexion. Il établit ensuite plusieurs propriétés des courbes de sixième classe, enveloppées par les droites, qui joignent deux points de la cubique dont les arguments ont une différence constante. Ainsi, par exemple : *une quelconque de ces courbes est tangente à la cubique en ses dix-huit points de rencontre. Quatre de ces courbes ont pour tangentes triples les trois côtés d'un des triangles d'inflexion, et les points de contact sont situés sur les neuf polaires harmoniques,* etc.

A l'égard de la biquadratique gauche, l'auteur établit la relation qui existe entre les valeurs des paramètres relatifs à un même point dans deux modes de représentation différents, et retrouve, en les complétant, plusieurs théorèmes, démontrés par MM. Laguerre et Westphal au sujet de cette courbe.

ОРЛОВЪ (Герасимъ). — О нѣкоторыхъ полиномахъ съ одною и многими перемѣнными. — Санктпетербургъ 1881 г. (1).

(Analyse faite par l'Auteur.)

Ce travail a pour objet l'étude de certains systèmes de polynômes à un nombre quelconque de variables, analogues aux polynômes X_n de Legendre et leurs semblables (2).

---

(1) Orlof (*) (Ghérassime), *Sur quelques polynômes à une ou plusieurs variables.* Saint-Pétersbourg, 1881 (124 pages in-4°).

(2) Quelques-uns des résultats exposés dans ce travail ont été communiqués dans la séance du 27 décembre 1879 du sixième Congrès des Naturalistes russes, tenu à Saint-Pétersbourg.

(*) L'orthographe adoptée pour les transcriptions par le *Bulletin* traduit ОВЪ par *of* et non par *off* ou *ow*, le doublement de l'*f* étant absolument inutile, et *w* n'étant pas une lettre française

C'est M. Hermite qui a indiqué pour la première fois deux systèmes de polynômes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, qui dépendent de deux variables et jouissent de la propriété suivante :

« Pour toutes les valeurs entières et positives de m, n, μ, ν, et pourvu que les indices m et μ, n et ν ne soient pas égaux en même temps, on a

$$\iint U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0, \tag{1}$$

les variables étant limitées par la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$. »

Les polynômes $U_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre, et l'expression générale de ces polynômes,

$$U_{m,n} = \frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}} \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\, dy^n},$$

est bien remarquable par son analogie avec l'expression bien connue de la fonction X_n trouvée par O. Rodrigues et Jacobi.

Les fonctions $V_{m,n}$, qu'il faut associer aux fonctions $U_{m,n}$ pour que l'égalité (1) ait lieu, sont déterminées par M. Hermite au moyen de la formule suivante

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 b^2)^{-1} = \sum a^m b^n V_{m,n}.$$

M. Hermite fait voir que ces deux systèmes de polynômes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ conduisent à des développements de fonctions de deux variables x, y, dans l'étendue limitée par la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$, et que la méthode bien connue, consistant à déterminer les coefficients par l'intégration, après avoir multiplié la fonction par un facteur convenable, s'applique encore dans ces nouvelles circonstances. Mais ici il y a une différence essentielle entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables. Les seules propriétés des fonctions $U_{m,n}$ ne permettront pas de faire le calcul de leurs coefficients dans la série qui exprimera une fonction de deux variables, et c'est dans la nécessité d'introduire dans le calcul les fonctions associées $V_{m,n}$, pour pouvoir déterminer ces coefficients, que consiste la modification caractéristique pour les fonctions de plusieurs variables.

M. Hermite indique encore un autre système de fonctions associées, qu'il désigne par $\mathfrak{U}_{m,n}$ et $\mathfrak{V}_{m,n}$, et pour lesquelles l'intégrale double

$$\iint \mathfrak{U}_{m,n} \mathfrak{V}_{\mu,\nu}\, dx\, dy,$$

étendue sur la surface du cercle $x^2+y^2=1$, se réduit aussi à zéro, à moins qu'on n'ait

$$m=\mu, \quad n=\nu.$$

L'expression générale de la fonction $\mho_{m,n}$,

$$\mho_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{(-1)^{m+n}(m+n+1)}{1.3.5\ldots[2(m+n)+1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

présente une ressemblance remarquable avec celle de la fonction

$$\sin[(n+1)\arccos x],$$

sous la forme de la dérivée multiple donnée par Jacobi.

Les fonctions associées $\vartheta_{m,n}$ sont les polynômes entiers, déterminés par la formule

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum a^m b^n \vartheta_{m,n}.$$

Les recherches postérieures des propriétés des polynômes de M. Hermite appartiennent à Didon, qui a traité diverses questions qui s'y rattachent assez directement, et qui a généralisé pour un nombre quelconque des variables les résultats trouvés par M. Hermite.

Aux deux systèmes de fonctions de M. Hermite, Didon en ajouta encore un troisième, à savoir : les fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, satisfaisant aussi à la condition (1). Les fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, dont la première est un polynôme entier analogue par ses propriétés à la fonction trigonométrique $\cos(n \arccos x)$, sont déterminées par les formules suivantes :

$$U_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{(-1)^{m+n}\sqrt{1-x^2-y^2}}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

$$(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum a^m b^n V_{m,n}.$$

Didon a montré encore qu'il existe une infinité de systèmes de polynômes associés satisfaisant toujours à l'égalité (1), et, parmi tous ces systèmes, il y en a un qui se distingue des autres par la circonstance que les deux séries de polynômes qui le constituent sont identiques. Ainsi, en désignant les polynômes de chacune des deux séries par $P_{m,n}$, on aura

$$\int\int P_{m\,n} P_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

en supposant que $(m - \mu)^2 + (n - \nu)^2$ n'est pas nul et que les variables sont limitées dans l'intégration par la condition

$$x^2 + y^2 \leqq 1.$$

L'expression générale des polynômes $P_{m,n}$, qui présentent, de même que les polynômes $U_{m,n}$, la plus grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre, est donnée par Didon sous la forme suivante,

$$P_{m\,n} = K_{m,n} \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^m}{dx^m},$$

$K_{m,n}$ désignant une constante.

En posant

$$K_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!\, 2^{n+2m}},$$

il trouve, pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$, c'est-à-dire pour la somme

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n P_{m,n},$$

l'expression

$$(2)\quad (1 - 2by + b^2)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - ax - by - \frac{(a^2+b^2)(y^2-1)}{2\left(1 - by + \sqrt{1 - 2by + b^2}\right)} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

et pour l'intégrale

$$\int\int P_{m,n}^2\, dx\, dy$$

la formule

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\int P_{m,n}^2\, dx\, dy = \frac{2\pi}{2m+1} \\ &\quad \times \frac{(2m+n+2)(2m+n+3)\ldots(2m+2n+1)}{n!\, 2^{2m+2n}} \frac{1.3.5\ldots(2m+2n+1)}{2.4.6\ldots(2m+2n+2)}. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de ces propriétés, il déduit l'expression du coefficient $A_{m,n}$ de la série sous la forme

$$f(x,y) = \sum A_{m,n} P_{m,n}.$$

En étudiant les propriétés des polynômes $P_{m,n}$, j'ai trouvé que les expressions (2) et (3), assez compliquées, peuvent être remplacées par d'autres plus simples.

Dans la Note sous le titre : *Sur la fonction génératrice des polynômes* $P_{m,n}$ *de Didon,* insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2ᵉ série, t. XX, p. 481), j'ai fait voir que, si, au lieu de l'expression employée par Didon pour le facteur constant $K_{m,n}$, on pose

$$K_{m,n} = \frac{2^{n-m}(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{m!\,n!\,(2m+n+2)(2m+n+3)\ldots(2m+2n+1)},$$

on aura, en place des expressions (2) et (3), les formules suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n P_{m,n} \\ &\quad = [(1-2ax-2by+b^2)(1-2by+b^2)+a^2(1-y^2)]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint P_{m,n}^2\,dx\,dy = \frac{\pi}{m+n+1} \\ &\quad \times \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m}\,\frac{(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+n+1)}{m!\,n!}. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent, en effectuant le développement d'une fonction quelconque de deux variables en série ordonnée suivant les polynômes $P_{m,n}$, on obtient pour le coefficient du terme général une expression plus simple et plus commode pour les applications que celle de Didon.

L'expression que j'ai trouvée pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ est encore remarquable par la possibilité d'être généralisée. Donnant à cette expression la forme

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-2ax-2by+b^2+\frac{a^2(1-y^2)}{1-2by+b^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et introduisant dans l'exposant du second facteur un paramètre arbitraire β, on forme une nouvelle expression

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-2ax-2by+b^2+\frac{a^2(1-y^2)}{1-2by+b^2}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

ou bien

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l}(1-2by+b^2)^{\beta}\\ \times[(1-2ax-2by+b^2)(1-2by+b^2)+a^2(1-y^2)]^{-\frac{2\beta+1}{2}},\end{array}\right.$$

qui est à son tour la fonction génératrice des fonctions plus générales que je désignerai par $\Omega_{m,n}(x,y,\beta)$ et qui se présentent sous la forme

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}\Omega_{m,n}=C_{m,n}\dfrac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}}\dfrac{d^n(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}\\ \times\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}}\dfrac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m},\end{array}\right.$$

$C_{m,n}$ désignant une constante. Ces polynômes se réduisent aux $P_{m,n}$ dans le cas particulier $\beta=0$.

Les polynômes $\Omega_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions connues ω_l déterminées par l'une des égalités suivantes :

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}=\sum_{l=0}^{l=\infty}a^l\omega_l,\quad \omega_l=c_l\frac{1}{(x^2-1)^{\alpha}}\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l},$$

où c_l désigne une constante, α un paramètre arbitraire, l un nombre entier et positif.

C'est dans l'étude des propriétés des polynômes $\Omega_{m,n}$ que consiste l'objet principal de mon travail. Mais je ne trouve pas inutile d'analyser préalablement les propriétés des fonctions ω_l, pour montrer en premier lieu l'analogie complète entre les résultats qui expriment les propriétés diverses des fonctions ω_l et $\Omega_{m,n}$, et les méthodes mêmes qui y conduisent, et, en dernier lieu, pour établir toutes les propositions auxiliaires indispensables à l'exposition des propriétés des fonctions $\Omega_{m,n}$. J'ai trouvé d'autant plus nécessaire d'exposer les propriétés des fonctions ω_l, que, dans les divers Ouvrages où ces fonctions sont traitées, les différents résultats ne sont pas présentés sous la forme dont j'ai besoin, et en outre qu'il n'y a aucun Ouvrage russe complet consacré à l'étude de ces fonctions remarquables.

Dans ce but, j'ai divisé mon travail en deux Chapitres.

Dans le premier Chapitre, j'expose les propriétés des polynômes ω_l.

En partant de l'égalité

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} = \sum_{l=0}^{l=\infty} a^l \omega_l,$$

je trouve le polynôme ω_l sous la forme

$$\begin{aligned}\omega_l = {} & \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2l-1)}{l!} \\ & \times \Big[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2\alpha+2l-1)}x^{l-2}+\ldots \\ & \quad + (-1)^q \frac{l(l-1)(l-2)\ldots(l-2q+1)}{q!2^q(2\alpha+2l-1)(2\alpha+2l-3)\ldots(2\alpha+2l-2q+1)}x^{l-2q}+\ldots\Big],\end{aligned}$$

et je forme encore quelques autres expressions de ce polynôme.

Ayant déterminé ensuite la relation entre les trois polynômes consécutifs ω_{l+1}, ω_l, ω_{l-1}, et quelques autres relations qui subsistent entre les polynômes ω_l pour les différentes valeurs de l et de α, j'obtiens l'équation différentielle

$$(8) \qquad (1-x^2)\frac{d^2\omega}{dx^2} - 2(\alpha+1)x\frac{d\omega}{dx} + l(2\alpha+l+1)\omega = 0,$$

à laquelle satisfait le polynôme ω_l, et qui le définit complètement, c'est-à-dire que le polynôme le plus général ω satisfaisant à cette équation ne diffère du polynôme ω_l que par un facteur constant. Je trouve, au moyen de l'équation (8), l'expression du polynôme ω sous la forme de la dérivée multiple

$$(9) \qquad \omega = c\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l},$$

d'où l'on déduit le polynôme ω_l, en posant

$$c = \frac{1}{l!2^l}\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)\ldots(2\alpha+l)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+l)}.$$

J'ai trouvé aussi la seconde intégrale de l'équation (8), et je l'ai présentée sous la forme de série hypergéométrique, de quadrature, de dérivée et d'intégrale multiple. En ayant égard à la formule (9) et à l'expression de seconde intégrale de l'équation (8) sous la forme d'une dérivée multiple, on obtient pour l'intégrale générale de cette équation l'expression suivante

$$(10)\quad \omega = \frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\left\{ c_1 \frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} + c_2 \frac{d^l}{dx^l}\left[(x^2-1)^{\alpha+l}\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\alpha+l+1}}\right]\right\},$$

Passant maintenant aux développements des fonctions en séries, je démontre que le polynôme ω_l satisfait à l'égalité

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha x^\lambda \omega_l\, dx = 0,$$

qui subsiste, sous la condition $\alpha > -1$, pour toutes les valeurs entières et positives de λ inférieures à l, et qui détermine aussi complètement le polynôme ω_l à un facteur constant près.

On en conclut que, $\varphi(x)$ désignant un polynôme entier, on aura

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha \varphi(x)\omega_l\, dx = 0,$$

toutes les fois que le degré du polynôme $\varphi(x)$ sera inférieur à l et $\alpha > -1$.

A l'aide de cette dernière égalité, je démontre que l'équation $\omega_l = 0$ a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre les limites -1 et $+1$, en appliquant la belle méthode de Legendre pour la démonstration du théorème analogue à l'égard de l'équation $X_n = 0$.

Puis j'établis les formules fondamentales

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha \omega_l\omega_\lambda\, dx = 0, \quad (l \gtrless \lambda),\\ &\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha \omega_l^2\, dx = \frac{2^{2\alpha+1}\Gamma(2\alpha+l+1)}{(2\alpha+2l+1)\,l!}\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\right]^2,\end{aligned}\right.$$

au moyen desquelles je trouve, pour le coefficient du terme général de la série

$$\varphi(x) = \sum_l a_l\omega_l,$$

la formule suivante

$$(12)\quad a_l = \frac{(2\alpha+2l+1)\,l!}{2^{2\alpha+1}\Gamma(2\alpha+l+1)}\left[\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^2 \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha \omega_l \varphi(x)\,dx.$$

Pour donner l'application de cette formule, je forme le développement de la fonction x^n suivant les polynômes ω_l, et j'obtiens la formule

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} x^n &= \frac{n!}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2n+1)} \\ &\times\left[(2\alpha+2n+1)\omega_n + (2\alpha+2n-3)\,\frac{2\alpha+2n+1}{2}\,\omega_{n-2}+\ldots\right],\end{aligned}\right.$$

se réduisant à une formule bien connue, proposée par Legendre, dans le cas où $\alpha = 0$, $\omega_n = X_n$.

La formule (12) permet de démontrer les propriétés suivantes des polynômes ω_l :

1° *Parmi tous les polynômes* $\varphi(x)$ *du degré* n, *dans lesquels le coefficient en* x^n *est égal à l'unité, celui qui rend minimum l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha[\varphi(x)]^2\,dx$$

est égal au polynôme ω_l, *à un facteur constant près.*

2° *Dans la série ordonnée suivant les polynômes* $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, *qui représente une fonction donnée* $\varphi(x)$, *un nombre quelconque de termes, pris à partir du premier, forme un polynôme entier* $F(x)$ *qui, parmi tous ceux de même degré, donne à l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha[\varphi(x)-F(x)]^2\,dx$$

une valeur minimum.

Au moyen des formules précédentes, on peut généraliser les résultats proposés par Didon dans un Mémoire intitulé : *Sur une intégrale double* (*Annales de l'École Normale*, t. VII, 1870). Didon montre que la valeur de l'intégrale

$$\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(1-2ax+a^2)^{-\frac{\mu}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{\mu}{2}}\,dx\,dy,$$

dans laquelle les variables x et y sont limitées par la condition

$$x^2 + y^2 \leqq 1,$$

ne dépend que du produit ab, dans le cas où μ est un nombre entier et positif quelconque, et où a et b sont moindres que l'unité. A cet effet, il établit deux formules auxiliaires, desquelles cette proposition découle immédiatement.

Je démontre que la proposition de Didon subsiste aussi dans le cas de μ fractionnaire positif, et que les formules auxiliaires que cet auteur établit, indépendamment l'une de l'autre, ne sont que deux cas particuliers d'une même formule générale que je déduis du développement de l'intégrale précédente en série.

Revenant au développement des fonctions en séries, je montre, en m'appuyant sur la formule (13), que toute fonction développable en série suivant les puissances de la variable peut être représentée encore sous la forme d'une série ordonnée suivant les fonctions ω_l. Comme exemple, je forme le développement de la fonction $(y - x)^{-1}$, et j'obtiens la formule

$$\frac{1}{y - x} = \sum_{l=0}^{l=\infty} (2\alpha + 2l + 1)\,\omega_l(x, \alpha)\,\rho_l(y, \alpha).$$

Ce développement conduit à de nouvelles fonctions $\rho_l(x, \alpha)$, dites *fonctions de seconde espèce*. Je trouve l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction ρ_l. Cette équation se confond avec l'équation (8) dans le cas où $\alpha = 0$. Dans les autres cas, elle en est différente par les coefficients ; mais, en posant

$$\rho_l = (x^2 - 1)^\alpha \chi_l,$$

on trouve la fonction χ_l satisfaisant à l'équation (8) : d'où l'on conclut qu'on peut ramener la théorie des fonctions de première et de seconde espèce à la considération d'une seule équation différentielle. Je donne huit expressions différentes pour la fonction ρ_l. Ces expressions, sauf un facteur constant, ne présentent que des cas particuliers de celles de M. Darboux pour la fonction de seconde espèce relative aux polynômes de Jacobi (voir son Mémoire intitulé : *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très* *grands nombres et sur une classe étendue de développements en série*).

En exprimant la fonction ρ_l par la fonction linéaire de ρ_0, on trouve la formule

$$\rho_l = \frac{l!\,\Gamma(2\alpha+1)}{(2\alpha+1)\Gamma(2\alpha+l+1)}\,\omega_l\,\frac{1}{x}\,F\left(\frac{1}{2},\quad 1,\quad \alpha+\frac{3}{2},\quad \frac{1}{x^2}\right)-\zeta_l,$$

où ζ_l est un polynôme entier du degré $l-1$. Cette formule, pour $\alpha=0$, se réduit à une formule remarquable de Gauss. La formule précédente montre que le produit du polynôme ω_l par la fonction

$$\frac{1}{x}F\left(\frac{1}{2},\quad 1,\quad \alpha+\frac{3}{2},\quad \frac{1}{x^2}\right), \tag{14}$$

exprimé par la série, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, ne contient pas de termes en

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{x^3},\quad \ldots,\quad \frac{1}{x^l}.$$

Cette nouvelle propriété, qui caractérise aussi le polynôme ω_l à un facteur constant près, montre encore que ce polynôme ne diffère que par un facteur constant du dénominateur, de la réduite de l'ordre l, de la fraction continue résultante du développement de l'expression (14).

En terminant le premier Chapitre, je considère les propriétés des polynômes ω_l pour les valeurs particulières du paramètre α, à savoir : $\alpha=p$ et $\alpha=\frac{2p-1}{2}$ (p étant un nombre entier et positif quelconque). Le polynôme ω_l s'exprime par la dérivée multiple de la fonction X_n de Legendre dans le premier cas, et de la fonction $\cos(n\arccos x)$ dans le second.

Enfin, dans le cas de $\alpha=\infty$, les polynômes ω_l se réduisent à un nouveau système des polynômes entiers du degré l, que nous désignerons par $\xi_l(x)$, et qui peuvent être déterminés par une des formules suivantes :

$$e^{-a(2x+a)}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{a^l}{e!}\xi_l,\quad \xi_l=e^{x^2}\frac{d^l e^{-x^2}}{dx^l}.$$

Les propriétés de ces polynômes ont été étudiées par MM. Tchebychef et Hermite.

Le second Chapitre, sur lequel est principalement appelée l'attention du lecteur, est consacré à l'étude des polynômes $\Omega_{m,n}$.

Je commence par établir, pour la fonction génératrice de ces polynômes, les diverses expressions dépendantes des valeurs attribuées à $C_{m,n}$. En posant

$$C_{m,n} = \frac{2^{n-m}}{m!\,n!} \frac{(2\beta+1)(2\beta+2)\dots(2\beta+m)}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m)} \times \frac{(\beta+m+1)(\beta+m+2)\dots(\beta+m+n)}{(2\beta+2m+n+2)(2\beta+2m+n+3)\dots(2\beta+2m+2n+1)},$$

on trouve pour la fonction génératrice demandée l'expression simple (6). Le calcul même a été publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2[e] série, t. XX, 1881.

En posant encore $C_{m,n} = \frac{1}{m!\,n!\,2^{m+2n}}$, j'ai trouvé, pour la fonction génératrice des polynômes considérés, une autre expression qui, dans le cas où $\beta = 0$, se réduit à l'expression (2) trouvée par Didon; mais dans le cas général on obtient une expression très compliquée et de peu d'intérêt. J'ai reproduit ce calcul pour que le lecteur puisse comparer les calculs de deux expressions et voir jusqu'à quel point se simplifient l'expression et le calcul de la fonction génératrice par un choix convenable du facteur constant.

Je montre ensuite que le polynôme $\Omega_{m,n}$ satisfait à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Pour former ces équations, on peut négliger le facteur constant $C_{m,n}$ dans la formule (7); de sorte que, en posant

$$\frac{1}{(x^2+y^2-1)^\beta} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m} = \mathrm{M},$$

$$\frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} = \mathrm{N},$$

et désignant, pour abréger, le polynôme $\Omega_{m,n}$ par une seule lettre Ω, on aura $\Omega = \mathrm{MN}$.

Je forme d'abord les équations aux dérivées partielles

$$(1-x^2-y^2)\frac{d^2M}{dx^2}-2(\beta+1)x\frac{dM}{dx}+m(2\beta+m+1)M=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2M}{dx^2}+(1-y^2)\frac{d^2M}{dy^2}-2xy\frac{d^2M}{dx\,dy}$$

$$-(2\beta+3)x\frac{dM}{dx}-(2\beta+3)y\frac{dM}{dy}+m(2\beta+m+2)M=0,$$

$$(1-y^2)\frac{d^2N}{dy^2}-(2\beta-2m+3)y\frac{dN}{dy}+n(2\beta+2m+n+2)N=0,$$

pour les fonctions M et N. La formation de la seconde de ces équations est assez longue, tandis que la première et la troisième se déduisent immédiatement de l'équation (8). Le polynôme Ω ou MN satisfait évidemment à la première équation. En multipliant la seconde équation par N et la troisième par M, et en les ajoutant, on obtiendra une autre équation à laquelle satisfait aussi le polynôme Ω. De cette manière, nous obtenons pour le polynôme $\Omega_{m,n}$ le système suivant d'équations aux dérivées partielles :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}&(1-x^2-y^2)\frac{d^2\Omega}{dx^2}-2(\beta+1)x\frac{d\Omega}{dx}+m(2\beta+m+1)\Omega=0,\\&(1-x^2)\frac{d^2\Omega}{dx^2}+(1-y^2)\frac{d^2\Omega}{dy^2}-2xy\frac{d^2\Omega}{dx\,dy}-(2\beta+3)x\frac{d\Omega}{dx}\\&\qquad-(2\beta+3)y\frac{d\Omega}{dy}+(m+n)(2\beta+m+n+2)\Omega=0.\end{aligned}\right.$$

Je démontre directement que ce système caractérise la fonction $\Omega_{m,n}$, en se bornant aux solutions rationnelles et entières; en d'autres termes, que le polynôme le plus général qui satisfait aux équations (15) est le polynôme $\Omega_{m,n}$ ou $C\Omega_{m,n}$. Mais, outre ce polynôme, le système des équations aux dérivées partielles sera vérifié par d'autres fonctions. La solution complète du système (15) ne contient que quatre constantes arbitraires, et, par conséquent, il y aura comme solution quatre fonctions distinctes. Pour trouver la solution complète de ce système, je forme un nouveau système d'équations

$$(1-x^2-y^2)\frac{d^2K}{dx^2}+2(\beta+m-1)x\frac{dK}{dx}+2(\beta+m)K=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2K}{dx^2}+(1-y^2)\frac{d^2K}{dy^2}-2xy\frac{d^2K}{dx\,dy}+(2\beta+2m-3)x\frac{dK}{dx}$$
$$+(2\beta+2m-3)y\frac{dK}{dy}+(n+2)(2\beta+2m+n)K=0,$$

tel que, en posant $\frac{d^mK}{dx^m}=(x^2+y^2-1)^\beta\Omega$, la fonction Ω satisfera au système des équations (15).

Si l'on pose $K=(x^2+y^2+1)^{\beta+m}L$, le dernier système se transforme dans le système suivant :

$$(1-x^2-y^2)\frac{d^2L}{dx^2}-2(\beta+m+1)x\frac{dL}{dx}=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2L}{dx^2}+(1-y^2)\frac{d^2L}{dy^2}-2xy\frac{d^2L}{dx\,dy}-(2\beta+2m+3)x\frac{dL}{dx}$$
$$-(2\beta+2m+2)y\frac{dL}{dy}+n(2\beta+2m+n+2)L=0.$$

La première équation de ce nouveau système s'intègre immédiatement. On trouve

$$L=f_1(y)+f_2(y)\int_0^x\frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{\beta+m+1}},$$

et, en substituant cette valeur de L dans la seconde équation, on obtient, après quelques simplifications, une équation qui se réduit à deux suivantes :

$$(1-y^2)\frac{d^2f_1}{dy^2}-(2\beta+2m+3)y\frac{df_1}{dy}+n(2\beta+2m+n+2)f_1=0,$$

$$(1-y^2)\frac{d^2f_2}{dy^2}+(2\beta+2m-1)y\frac{df^2}{dy}+(n+1)(2\beta+2m+n+1)f_2=0.$$

La seconde de ces deux équations se réduit à la première si l'on fait $f_2=(1-y^2)^{\beta+m+\frac{1}{2}}f_1$. Quant à la première équation, elle se réduit, en posant $\beta + m + \frac{1}{2} = \alpha$, $n = l$, $y = x$, à l'équation (8) déjà citée plus haut, dont l'intégrale générale se détermine au moyen de la formule (10). En ayant égard à cette formule et aux relations entre les fonctions L, K, Ω, nous obtiendions la solution complète cherchée du système des équations (15) sous la forme suivante :

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Omega = {} & \frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\beta} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m} \\
& \times \left\{ C_1 \frac{d^n (y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \right. \\
& \left. \quad + C_2 \frac{d^n}{dy^n} \left[(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{3}{2}}} \right] \right\} \\
& + \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\beta} \frac{d^m}{dx^m} \left[(x^2+y^2-1)^{\beta+m} \int_0^x (x^2+y^2-1)^{\beta+m+1} \right] \\
& \times \left\{ C_3 \frac{d^n (y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \right. \\
& \left. \quad + C_4 \frac{d^n}{dy^n} \left[(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{3}{2}}} \right] \right\},
\end{aligned}
\right.
$$

C_1, C_2, C_3, C_4 désignant quatre constantes arbitraires. Le coefficient seul de C_1 est une fonction entière de x et de y, d'où l'on peut conclure aussi que $\Omega_{m,n}$ est le seul polynôme qui est la solution du système des équations (15).

En posant, par exemple, $m = 1$, $n = 2$, $\beta = -\frac{5}{2}$, nous aurons le système des équations aux dérivées partielles

$$(1 - x^2 - y^2) \frac{d^2\Omega}{dx^2} + 3x \frac{d\Omega}{dx} - 3\Omega = 0,$$

$$(1 - x^2) \frac{d^2\Omega}{dx^2} + (1 - y^2) \frac{d^2\Omega}{dy^2} - 2xy \frac{d^2\Omega}{dx\,dy} + 2x \frac{d\Omega}{dx} + 2y \frac{d\Omega}{dy} = 0,$$

dont la solution complète, d'après la formule (16), prend la forme

$$\Omega = C_1 x(y^2-1) + C_2 x\left[y + \frac{1}{2}(y^2-1)\log\frac{y-1}{y+1}\right]$$
$$+ C_3\left\{[x^2-2(y^2-1)]\sqrt{x^2+y^2-1} + 3x(y^2-1)\log\frac{x+\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{y^2-1}}\right\}$$
$$+ C_4\left[y+\frac{1}{2}(y^2-1)\log\frac{y-1}{y+1}\right]$$
$$\times\left[\left(\frac{x^2}{y^2-1}-2\right)\sqrt{x^2+y^2-1} + 3x\log\frac{x+\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{y^2-1}}\right].$$

Dans le cas particulier où $\beta = 0$, c'est-à-dire quand les fonctions Ω se réduisent aux fonctions P de Didon, le système (15) prendra la forme

$$(17)\quad \begin{cases} (1-x^2-y^2)\dfrac{d^2 P}{dx^2} - 2x\dfrac{dP}{dx} + m(m+1)P = 0, \\ (1-x^2)\dfrac{d^2 P}{dx^2} + (1-y^2)\dfrac{d^2 P}{dy^2} - 2xy\dfrac{d^2 P}{dx\,dy} - 3x\dfrac{dP}{dx} \\ \qquad\qquad - 3y\dfrac{dP}{dy} + (m+n)(m+n+2)P = 0, \end{cases}$$

et la formule (16) se réduira à la suivante :

$$P = \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}\,\frac{d^m(x^2+y^2-1)^m}{dx^m}$$
$$\times\left\{C_1\frac{d^n(y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}\right.$$
$$\left.+ C_2\frac{d^n}{dy^n}\left[(y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}\int_0^y\frac{dy}{(y^2-1)^{m+n+\frac{3}{2}}}\right]\right\}$$
$$+ \frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2+y^2-1)^m\int_0^x\frac{dx}{(x^2+y^2-1)^{m+1}}\right]$$
$$\times\left\{C_3\frac{d^n(y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}\right.$$
$$\left.+ C_4\frac{d^n}{dy^n}\left[(y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}\int_0^y\frac{dy}{(y^2-1)^{m+n+\frac{3}{2}}}\right]\right\}.$$

Il importe ici de remarquer que la solution complète du système des équations (17), donnée par Didon, est inexacte.

Après ces recherches, je passe à l'étude de polynômes $\Omega_{m,n}$ au point de vue du développement des fonctions de deux variables, suivant ces nouvelles expressions algébriques.

J'établis la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Pour toutes les valeurs entières et positives de μ et de ν, dont la somme est inférieure à $m+n$, et aussi quand cette somme est égale ou supérieure à $m+n$, μ étant inférieur à m, on aura l'égalité*

$$\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n} x^\mu y^\nu \, dx\, dy = 0,$$

en supposant les variables limitées dans l'intégration par la condition $x^2+y^2 \leqq 1$ et en outre $\beta > -1$.

Ce théorème caractérise aussi les polynômes, sauf un facteur constant. En s'appuyant sur ce théorème, on conclut que, $\varphi(x, y)$ désignant un polynôme entier du degré $\mu+\nu$, on obtiendra

$$(18) \qquad \iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n} \varphi(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

toutes les fois que $\mu+\nu < m+n$, et que les variables x, y et le paramètre β sont limités par les mêmes conditions que précédemment. Si, en outre, l'exposant de x ne surpasse pas μ dans le polynôme (x, y), la dernière égalité aura aussi lieu quand

$$\mu+\nu \geqq m+n,$$

à moins que l'on n'ait $\mu < m$.

Si l'on pose $\varphi(x, y) = \Omega_{\mu,\nu}$, on obtient le théorème suivant, le plus important de la théorie des polynômes $\Omega_{m,n}$:

THÉORÈME II. — *En limitant toujours les variables x, y et le paramètre β par les conditions $x^2+y^2 \leqq 1$, $\beta > -1$, on aura*

$$(19) \qquad \iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n} \Omega_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de m, n, μ, ν, à moins qu'on n'ait simultanément $m = \mu$, $n = \nu$.

En calculant cette intégrale double, on peut démontrer le second théorème indépendamment du premier et trouver même sa valeur pour $m = \mu$, $n = \nu$. En désignant l'intégrale considérée par S, et ayant égard à l'expression générale des polynômes $\Omega_{m,n}$ (7), on est d'abord conduit à chercher la valeur de

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\beta} \frac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m} \frac{d^\mu(x^2+y^2-1)^{\beta+\mu}}{dx^\mu} dx.$$

Cette expression, en posant $x = t\sqrt{1-y^2}$, se réduit à la forme

$$(1-y^2)^{\beta+\frac{m+\mu+1}{2}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^\beta \omega_m \omega_\mu dt,$$

à un facteur constant près. Au moyen de la première des formules (11), on conclut que cette intégrale, et par conséquent l'intégrale S, est nulle si m et μ sont différents. Dans le cas où $m = \mu$, on trouve

$$S = A\int_{-1}^{+1} (1+y^2)^{\beta+m+\frac{1}{2}} \omega_n\left(y, \beta+m+\frac{1}{2}\right) \omega_\mu\left(y, \beta+m+\frac{1}{2}\right) dy,$$

où A est un facteur constant connu; et, comme la dernière intégrale est aussi nulle si $n \gtrless \nu$, nous pouvons conclure que l'intégrale S se réduit à zéro pour toutes les valeurs entières et positives des nombres m, n, μ, ν, à moins que l'on n'ait $m = \mu$ et $n = \nu$. Dans l'hypothèse contraire, en ayant égard à la valeur de la constante A, on trouve, à l'aide de la seconde des formules (11), après des réductions faciles,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}^2 \,dx\,dy \\ &= \frac{\pi}{\beta+m+n+1} \frac{\Gamma(2\beta+m+1)\Gamma(2\beta+2m+n+2)}{m!\,n!\,2^{2m}(2\beta+2m+1)[(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)\Gamma(2\beta+1)]^2}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $\beta = 0$, cette formule se réduit à la formule (5).

Les propriétés précédentes permettront d'effectuer le développement d'une fonction quelconque $\varphi(x, y)$ de deux variables, en série suivant les polynômes $\Omega_{m,n}$.

En posant

$$(21)\qquad \varphi(x, y) = \sum A_{m,n}\Omega_{m,n},$$

on déterminera $A_{m,n}$ en multipliant les deux membres de cette égalité par $(1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n} dx\,dy$, et en les intégrant dans l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$. On obtiendra ainsi

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy \\ &\quad = A_{m,n}\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}^2\,dx\,dy, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on trouve, au moyen de la formule (20),

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{m,n} = {} & \frac{m!\,n!\,2^{2m}}{\pi}\,\frac{(\beta+m+n+1)(2\beta+2m+1)[(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)\Gamma(2\beta+1)]^2}{\Gamma(2\beta+m+1)\Gamma(2\beta+2m+n+2)} \\ & \times\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose ici $\beta=0$, on obtiendra une nouvelle formule, plus simple que celle de Didon, pour la détermination des coefficients de la série ordonnée suivant les polynômes $P_{m,n}$.

Au moyen de la formule (23), on peut démontrer les théorèmes suivants, qui expriment les propriétés les plus remarquables des polynômes $\Omega_{m,n}$:

Théorème III. — *Parmi tous les polynômes $\varphi(x,y)$ de deux variables du degré $p+q$, qui ne contiennent pas de puissances de x d'exposants supérieurs à p, et dans lesquels le coefficient de $x^p y^q$ est égal à l'unité, celui qui rend minimum l'intégrale*

$$(24)\qquad \iint (1-x^2-y^2)^\beta [\varphi(x,y)]^2\,dx\,dy$$

est égal au polynôme $\Omega_{m,n}$, à un facteur constant près; les variables x, y et le paramètre β sont limités par les conditions $x^2+y^2 \leqq 1$, $\beta > -1$.

Théorème IV. — *Développons une fonction $\varphi(x,y)$ suivant les $\Omega_{m,n}$; prenons tous les termes qui correspondent aux valeurs de $m+n$ inférieures à un nombre donné k, et les termes $\Omega_{0,m+n}$, $\Omega_{1,m+n-1}$, ..., $\Omega_{m,n}$ pour lesquels $m+n=k$. Nous formerons ainsi le polynôme $\mathfrak{F}(x,y)$ du degré k, dans lequel l'exposant de la variable x ne surpasse pas m, et qui, parmi tous les polynômes du même degré qui ne contiennent pas de puissances* *de x avec les exposants supérieurs à m, rend minimum l'intégrale*

$$\iint (1-x^2-y^2)^\beta [\varphi(x,y) - \mathfrak{F}(x,y)]^2 dx\, dy, \tag{25}$$

étendue à la surface du cercle $x^2+y^2=1$, sous la condition $\beta > -1$.

Pour démontrer le théorème III, je mets le polynôme $\varphi(x,y)$ sous la forme (21); le second membre de cette égalité contiendra tous les termes en $\Omega_{m,n}$ pour lesquels $m+n<p+q$, et parmi ceux pour lesquels $m+n=p+q$, elle ne contient que les suivants :

$$A_{p,q}\Omega_{p,q},\ A_{p-1,q+1}\Omega_{p-1,q+1},\ \ldots,\ A_{0,p+q}\Omega_{0,q+p},$$

Le coefficient $A_{p,q}$ se détermine par la condition que le coefficient en $x^p y^q$ du polynôme cherché soit égal à l'unité; tous les autres coefficients se déterminent au moyen de la formule (23). Mais, en égalant à zéro les dérivées de l'intégrale (24) par rapport à ces coefficients, on obtient des équations de la forme

$$\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,q}\, \varphi(x,y)\, dx\, dy = 0,$$

d'où l'on conclut, en s'appuyant sur la formule (23), que tous ces coefficients s'évanouissent, et que, par conséquent, $\varphi(x,y) = A_{p,q}\Omega_{p,q}$.

Pour la démonstration du théorème IV, je mets le polynôme $\mathfrak{F}(x,y)$ aussi sous la forme $\mathfrak{F}(x,y) = \sum A'_{m,n}\Omega_{m,n}$. La seconde partie de cette égalité contiendra tous les termes $A'_{m,n}\Omega_{m,n}$ dans lesquels $m+n<k$, et, parmi les termes pour lesquels $m+n=k$, les seuls termes

$$A'_{m,n}\Omega_{m,n},\ A'_{m-1,n+1}\Omega_{m-1,n+1},\ \ldots,\ A'_{0,m+n}\Omega_{0,m+n}.$$

En égalant à zéro la dérivée de l'intégrale (25) par rapport à $A'_{m,n}$, on obtient

$$\iint (1-x^2-y^2)^\beta [\varphi(x,y) - \mathfrak{F}(x,y)]\, \Omega_{m,n}\, dx\, dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$\iint (1-x^2-y^2)^\beta \varphi(x,y)\, \Omega_{m,n}\, dx\, dy = A'_{m,n} \iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}^2\, dx\, dy;$$

et, en comparant cette égalité à la formule (22), on obtient $A'_{m,n} = A_{m,n}$.

Si nous rejetons la condition qui exige que l'exposant des puissances de la variable x, dans les polynômes cherchés $\varphi(x, y)$ et $\mathfrak{F}(x, y)$, ne surpasse pas un nombre donné p ou m, il faudra, pour former ces polynômes, après les avoir représentés sous la forme (21), prendre dans le second membre de cette égalité tous les termes pour lesquels $m + n \leqq p + q$ et $m + n \leqq k$. Il est remarquable que pour un exposant de x quelconque nous obtiendrons, outre les fonctions $\Omega'_{m,n}$, un nouveau système de polynômes, pouvant servir également bien à la résolution de chacune des deux questions de minimum que nous avons considérées.

L'expression générale de ce nouveau polynôme, que nous désignerons par $\mathfrak{U}_{m,n}(x, y, \beta)$, est la suivante :

$$\mathfrak{U}_{m,n} = D_{m,n} \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)^\beta} \frac{d^{m+n}(x^2 + y^2 - 1)^{\beta+m+n}}{dx^m\, dy^n},$$

m, n étant les nombres entiers positifs, β un paramètre arbitraire, $D_{m,n}$ un facteur constant.

Les fonctions $\mathrm{U}_{m,n}$, $\mathfrak{V}_{m,n}$, $U_{m,n}$, dont nous avons cité plus haut les expressions générales, ne sont que les cas particuliers de $\mathfrak{U}_{m,n}$. Posant, en effet,

$$\beta = 0, \quad D_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!\, 2^{m+n}},$$

on obtient

$$\mathfrak{U}_{m,n} = \mathrm{U}_{m,n}.$$

Si l'on pose

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad D_{m,n} = \frac{(m + n + 1)!}{m!\, n!\, 1.3.5\ldots(2m + 2n + 1)},$$

on trouve

$$\mathfrak{U}_{m,n} = \frac{\mathfrak{V}_{m,n}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Posant enfin

$$\beta = -\frac{1}{2}, \quad D_{m,n} = \frac{(m + n)!}{m!\, n!\, 1.3.5\ldots(2m + 2n - 1)},$$

on aura

$$\mathfrak{U}_{m,n} = U_{m,n}.$$

En étudiant en détail les propriétés des polynômes $\mathrm{U}_{m,n}$, Didon indique aussi en passant quelques propriétés des polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, en supposant que le paramètre β soit un nombre entier et positif. Je ne fais pas cette supposition, et, en limitant ce paramètre toujours par une seule condition $\beta > -1$, je démontre les théorèmes suivants :

Théorème V. — *L'intégrale double*

$$\iint (1 - x^2 - y^2)^\beta \mathfrak{U}_{m,n} \mathfrak{U}_{\mu,\nu} dx\, dy \quad (^1)$$

est nulle si l'on a $m + n \gtrless \mu + \nu$.

Théorème VI. — *L'intégrale double*

$$\iint (1 - x^2 - y^2)^\beta \mathfrak{U}_{m,n} \Omega_{\mu,\nu} dx\, dy$$

est nulle quand $\mu + \nu$ *n'est pas égal à* $m + n$, *et même quand* $\mu + \nu = m + n$, *à moins que* $\mu < m$.

Pour effectuer le développement d'une fonction quelconque de deux variables, suivant les polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, il faut considérer encore un nouveau système de polynômes qu'on associera aux polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$. Je désignerai par $\mathfrak{V}_{m,n}$ ces polynômes associés et je les déterminerai par l'égalité

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-(\beta+1)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n \mathfrak{V}_{m,n}.$$

On reconnaîtra immédiatement que $\mathfrak{V}_{m,n}$ est un polynôme entier en x et y du degré $m + n$, mais ayant $x^m y^n$ pour seul et unique terme de ce degré. Ce polynôme se réduit à l'un des deux polynômes $V_{m,n}$ ou $\mathfrak{P}_{m,n}$, si l'on pose

$$\beta = 0$$

ou

$$\beta = \frac{1}{2}.$$

---

(1) Cette intégrale et toutes les suivantes sont étendues à la surface du cercle $x^2 + y^2 = 1$.

En posant
$$\beta = -\frac{1}{2},$$
on obtient
$$\mathfrak{V}_{m,n} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.\,V_{m,n}.$$

Théorème VII. — *L'intégrale double*
$$\iint (1 - x^2 - y^2)^\beta \mathfrak{U}_{m,n} \mathfrak{V}_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$
se réduit à zéro pour toutes les valeurs entières et positives des nombres m, n, μ, ν, à moins que l'on n'ait $m = \mu$, $n = \nu$ et en supposant toujours $\beta > -1$.

Si les indices m et μ, n et ν sont égaux en même temps, on obtient
$$\iint (1 - x^2 - y^2)^\beta \mathfrak{U}_{m,n} \mathfrak{V}_{m,n}\, dx\, dy$$
$$= D_{m,n} 2^{m+n} \pi \frac{(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + m + n)}{\beta + m + n + 1}.$$

En posant ici successivement $\beta = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, et en attribuant au facteur constant $D_{m,n}$ les valeurs correspondantes citées plus haut, on aura les trois formules suivantes
$$\iint \mathrm{U}_{m,n} \mathrm{V}_{m,n}\, dx\, dy = \frac{\pi}{m + n + 1} \frac{(m + n)!}{m!\, n!},$$
$$\iint \mho_{m,n} \mho_{m,n}\, dx\, dy = \frac{2\pi}{2m + 2n + 3} \frac{(m + n + 1)!}{m!\, n!},$$
$$\iint U_{m,n} V_{m,n}\, dx\, dy = \frac{2\pi}{2m + 2n + 1} \frac{(m + n)!}{m!\, n!},$$
dont les deux premières ont été obtenues par M. Hermite, et la dernière par Didon, au moyen d'autres considérations et, de plus, tout à fait indépendantes les unes des autres.

Nous pouvons déterminer maintenant les coefficients du développement d'une fonction quelconque $\varphi(x, y)$ en série ordonnée suivant les polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$ ou $\mathfrak{V}_{m,n}$. En posant
$$\varphi(x, y) = \sum \mathfrak{A}_{m,n} \mathfrak{U}_{mn}, \quad \text{ou} \quad \varphi(x, y) = \sum \mathfrak{B}_{m,n} \mathfrak{V}_{m,n},$$

et en attribuant au facteur constant $D_{m,n}$ la valeur $\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}}$, on trouve

$$\mathfrak{A}_{m,n} = \frac{\beta+m+n+1}{\pi}\,\frac{m!\,n!}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m+n)}$$
$$\times\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{V}_{m,n}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\mathfrak{B}_{m,n} = \frac{\beta+m+n+1}{\pi}\,\frac{m!\,n!}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m+n)}$$
$$\times\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{U}_{m,n}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

Les propriétés analysées des polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$ et $\mathfrak{V}_{m,n}$ suffisent pour démontrer que les polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, de même que $\Omega_{m,n}$, peuvent servir pour la solution des deux questions de minimum, dont nous avons parlé plus haut. En effet, le polynôme entier $\varphi(x,y)$ du degré $p+q$, dans lequel le coefficient de $x^p y^q$ est égal à l'unité et qui rend minimum l'intégrale (24), est déterminé par un système d'équations que nous obtiendrons en égalant à zéro les dérivées de l'intégrale (24) par rapport aux coefficients du polynôme $\varphi(x,y)$. Ainsi, nous aurons des équations de la forme suivante

$$\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\varphi(x,y)\,x^\mu y^\nu\,dx\,dy = 0, \tag{26}$$

qui doivent subsister pour tous les systèmes de valeurs entières et positives μ et ν qui satisfont à la condition $\mu+\nu \leqq p+q$, excepté un système $\mu=p$, $\nu=q$ qui correspond au terme $x^p y^q$ du polynôme cherché $\varphi(x,y)$. Pour montrer que le polynôme $\mathfrak{U}_{m,n}$ satisfait aux équations (26), développons $x^\mu y^\nu$ suivant les polynômes $\mathfrak{V}_{m,n}$,

$$x^\mu y^\nu = \mathfrak{B}_{0,0}\mathfrak{V}_{0,0} + \mathfrak{B}_{1,0}\mathfrak{V}_{1,0} + \mathfrak{B}_{0,1}\mathfrak{V}_{0,1} + \ldots + \mathfrak{B}_{\mu,\nu}\mathfrak{V}_{\mu\nu}.$$

$\mathfrak{V}_{i,j}$ est, en général, un polynôme du degré $i+j$, qui ne contient qu'un seul et unique terme de ce degré et de la forme $\alpha x^i y^j$; par conséquent, la seconde partie de l'égalité précédente ne contiendra qu'un seul et unique terme $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{V}_{\mu,\nu}$, pour lequel la somme des indices est égale à $\mu+\nu$; pour tous les autres termes elle sera moindre que $\mu+\nu$. Ainsi, ayant égard aux conditions ci-dessus mentionnées, auxquelles satisfont les nombres μ, ν dans les équations (26), nous pouvons conclure que lorsque $\mu+\nu<p+q$, la somme des indices dans tous les termes de l'égalité précédente sera moindre que $p+q$. Lorsque $\mu+\nu=p+q$, la somme des indices ne sera égale à $p+q$ que dans le dernier terme $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}\mathfrak{B}_{\mu,\nu}$; dans tous les autres termes elle restera moindre que $p+q$, comme précédemment. En outre, les égalités $\mu=p$, $\nu=q$ ne peuvent pas subsister en même temps : donc, lorsque $\mu+\nu=p+q$, le terme $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}\mathfrak{B}_{\mu,\nu}$ ne peut pas être égal à $\mathfrak{B}_{p,q}\mathfrak{B}_{p,q}$, mais à l'une des valeurs suivantes :

$$\mathfrak{B}_{p+q,0}\mathfrak{B}_{p+q,0},\ \mathfrak{B}_{p+q-1,1}\mathfrak{B}_{p+q-1,1},\ \ldots,\ \mathfrak{B}_{p+1,q-1}\mathfrak{B}_{p+1,q-1},$$
$$\mathfrak{B}_{p-1,q+1}\mathfrak{B}_{p-1,q+1},\ \ldots\ \mathfrak{B}_{0,p+q}\mathfrak{B}_{0,p+q}.$$

Multipliant les deux membres de la dernière égalité par

$$(1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{U}_{p,q}\,dx\,dy,$$

et intégrant à l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$, nous aurons une nouvelle égalité, dans le second membre de laquelle tous les termes s'évanouissent sous la condition $\beta>-1$, et nous obtiendrons

$$\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{A}_{p,q}\,x^\mu y^\nu\,dx\,dy=0,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de μ et ν qui satisfont aux conditions ci-dessus mentionnées.

Pour démontrer que les fonctions $\mathfrak{U}_{m,n}$ résolvent encore une autre question de minimum, c'est-à-dire qu'elles déterminent un polynôme $\mathfrak{F}(x,y)$ du degré k, tel que, parmi tous les polynômes entiers du même degré, il donne à l'intégrale (25) une valeur minimum dans l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$, sous la condition $\beta>-1$, on donne au polynôme $\Omega_{m,n}$ la forme

$$\Omega_{m\,n}=\sum\mathfrak{A}_{\mu,\nu}\mathfrak{U}_{\mu,\nu},\quad(\mu+\nu\leqq m+n), \tag{27}$$

ou

$$\mathfrak{A}_{\mu,\nu}=\frac{\beta+\mu+\nu+1}{\pi}\,\frac{\mu!\,\nu!}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\mu+\nu)}$$
$$\times\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\Omega_{m,n}\,\mathfrak{B}_{\mu,\nu}\,dx\,dy.$$

Le second membre de cette expression, et par conséquent, le coefficient $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}$ s'évanouissent sous la condition $\mu+\nu<m+n$,

en se fondant sur l'égalité (18), et la formule (27) prend la forme

$$\Omega_{m,n} = \mathfrak{A}_{0,m+n}\mathfrak{U}_{0,m+n} + \mathfrak{A}_{1,m+n-1}\mathfrak{U}_{1,m+n-1} + \ldots + \mathfrak{A}_{m+n,0}\mathfrak{U}_{m+n,0}.$$

On en conclut que $\Omega_{m,n}$ est une fonction linéaire des polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, pour lesquels la somme des indices $\mu+\nu$ est égale à $m+n$; par exemple, les polynômes $\Omega_{3,0}$, $\Omega_{2,1}$, $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{0,3}$ ne s'expriment que par des fonctions linéaires des polynômes $\mathfrak{U}_{3,0}$, $\mathfrak{U}_{2,1}$, $\mathfrak{U}_{1,2}$, $\mathfrak{U}_{0,3}$. D'après cela, rappelons-nous que le polynôme cherché $\mathfrak{F}(x,y)$ est déterminé en développant la fonction donnée $\varphi(x, y)$ en série de la forme $\sum A_{m,n}\Omega_{m,n}$, et en rejetant de cette série tous les termes pour lesquels $m+n>k$. Si nous changeons dans l'expression obtenue les polynômes $\Omega_{m,n}$ en $\mathfrak{U}_{m,n}$ au moyen de la dernière égalité, nous aurons le même polynôme sous la forme

$$\mathfrak{F}(x,y) = \sum \mathfrak{A}_{m,n}\mathfrak{U}_{m,n},$$

où $m+n \leqq k$, et à chacun des termes $A_{m,n}\,\Omega_{m,n}$ de la série précédente, m et n ayant de certaines significations déterminées, ne correspondra dans cette nouvelle série qu'un seul terme $\mathfrak{A}_{m,n}\mathfrak{U}_{m,n}$ avec les mêmes valeurs de m et n. Il en résulte que la fonction entière $\mathfrak{F}(x, y)$ s'obtiendra également bien par le développement de $\varphi(x,y)$ suivant les polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, en négligeant toujours les termes en $\mathfrak{U}_{m,n}$ dans lesquels $m+n$ est supérieur à k.

Je vais faire deux applications du développement des fonctions qui résulte de la considération des polynômes $\Omega_{m,n}$, $\mathfrak{U}_{m,n}$, $\mathfrak{V}_{m,n}$. Je vais développer effectivement $\mathfrak{U}_{m,n}$ suivant $\Omega_{m,n}$, et $\Omega_{m,n}$ suivant $\mathfrak{V}_{m,n}$.

Si l'on pose

$$\mathfrak{U}_{m,n} = \sum A_{\mu,\nu}\Omega_{\mu,\nu},$$

on aura

$$A_{\mu,\nu} = K_{\mu,\nu}\int\!\!\int (1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{A}_{m,n}\,\Omega_{\mu,\nu}\,dx\,dy,$$

$$K_{\mu,\nu} = \frac{\beta+\mu+\nu+1}{\pi}\,\frac{2^\mu}{(2\beta+1)(2\beta+3)\ldots(2\beta+2\mu-1)}\,\frac{\mu!\,\nu!}{(2\beta+2\mu+2)\ldots(2\beta+2\mu+\nu+1)}\,\frac{(\beta+1)\ldots(\beta+\mu)}{(2\beta+1)\ldots(2\beta+\mu)};$$

d'où l'on conclut, en s'appuyant sur le théorème VI, que $\mu+\nu$ doit être égale à $m+n$ et m ne doit pas surpasser μ. Pour que le coefficient $A_{\mu,\nu}$ ne soit pas nul, les nombres μ et m doivent encore être de même parité. On peut donc poser $\mu=m+2k$, $\nu=n-2k$, k pouvant prendre toutes les valeurs entières et positives comprises entre o et $\frac{n}{2}$, et, par conséquent,

$$\mathfrak{U}_{m,n}=\sum_k \mathrm{A}_{m+2k,n-2k}\,\Omega_{m+2k,n-2k}.$$

De la même manière, on verra que

$$\Omega_{m,n}=\sum_k \mathfrak{B}_{m-2k,n+2k}\,\mathfrak{V}_{m-2k\,n+2k}.$$

Les coefficients ont les valeurs

$$\begin{aligned}A_{m+2\,k\,n-2k}=&\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+2k)}{k!\,2^{m+2k}}\\&\times\frac{(\beta+m+k+1)\ldots(\beta+m+n)}{(2\beta+1)(2\beta+3)\ldots(2\beta+2m+4k-1)}\\&\times\frac{(2\beta+m+2k+1)\ldots(2\beta+2m+2k)}{(2\beta+2m+4k+2)\ldots(2\beta+2m+n+2k+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{m-2k,n+2k}=&\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2k)}{k!\,2^{m+k}}\\&\times\frac{(2\beta+1)(2\beta+3)\ldots(2\beta+2m-2k-1)}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)}.\end{aligned}$$

En posant dans cette formule $\beta=0$, on obtiendra les relations suivantes entre les polynômes $\mathrm{U}_{m,n}$, $\mathrm{V}_{m,n}$, $\mathrm{P}_{m,n}$

$$\mathrm{U}_{m,n}=\sum_k A_{m+2k,n-2k}P_{m+2k,n-2k},\quad P_{m,n}=\sum_k \mathfrak{B}_{m-2k,n+2k}\mathrm{V}_{m+2k,n+2k},$$

où

$$\begin{aligned}A_{m+2k,n-2k}=&\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+2k)}{k!\,2^{m+2k}1.3.5\ldots(2m+4k-1)}\\&\frac{(m+k+1)\ldots(m+n)}{(2m+4k+2)\ldots(2m+n+2k+1)}\left[0\leqq k\leqq\frac{n}{2}\right],\end{aligned}$$

$$\mathfrak{B}_{m-2k,n+2k}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2k)}{k!\,2^{k}}\,\frac{1.3.5\ldots(2m-2k-1)}{m!\,2^{m}}\left[0\leqq k\leqq\frac{m}{2}\right].$$

Ces relations n'ont été indiquées par Didon dans aucun de ses Mémoires.

Je démontre ensuite le théorème suivant qui montre encore l'analogie entre les polynômes $\Omega_{m,n}$ et ω_l.

THÉORÈME VIII. — *Le produit du polynôme $\Omega_{m,n}$ par l'intégrale double*

$$\iint \frac{(1-u^2-v^2)^\beta \, du \, dv}{(x-u)(y-v)},$$

dans laquelle $\beta > -1$, étant développé en série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et y, ne contient pas le terme en $\frac{1}{x^{\mu+1}y^{\nu+1}}$ pour toutes les valeurs entières et positives de μ et de ν dont la somme est inférieure à $m+n$, et aussi quand cette somme est égale ou supérieure à $m+n$, pour les valeurs de μ inférieures à m.

Avant de finir, je me propose de déterminer les fonctions auxquelles se réduit chacun des trois systèmes des polynômes $\Omega_{m,n}$, $\mathfrak{U}_{m,n}$, $\mathfrak{B}_{m,n}$ dans le cas de $\beta = \infty$, et j'ai trouvé que tous les trois systèmes ne se réduisent dans ce cas qu'à un seul et unique système de fonctions. Ces nouvelles fonctions, que nous désignerons par $\Xi_{m,n}$, peuvent être déterminées par l'une des égalités suivantes :

$$e^{-a(2x+a)-b(2y+b)} = \sum \frac{a^m}{m!}\frac{b^n}{n!}\Xi_{m,n}, \quad \Xi_{m,n} = \xi_m(x)\xi_n(y);$$

d'où l'on conclut que les fonctions $\Xi_{m,n}$ sont aussi des polynômes entiers en x et y du degré $m+n$, que l'on obtiendra en multipliant les deux polynômes dans le système des fonctions $\xi_l(x)$ que nous avons considéré à la fin du Chapitre I. Chacun de ces deux polynômes ne dépend que d'une seule variable, et, en les multipliant, il faut les prendre avec des valeurs différentes des indices m et n.

Enfin, j'ajouterai que la généralisation de tous les résultats exposés dans le second Chapitre de mon Ouvrage, pour le cas d'un nombre quelconque de variables, ne présente aucune difficulté.

G. O.