G. DARBOUX

Sur le problème de Pfaff

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 49-68
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_49_1>

SUR LE PROBLÈME DE PFAFF;

PAR M. G. DARBOUX.

(Suite.)

DEUXIÈME PARTIE.

VIII.

La proposition relative aux propriétés d'invariance du système (10), qui nous a été si utile dans la première Partie de ce travail, est susceptible d'une généralisation que nous allons maintenant exposer.

Considérons, en même temps que la forme

$$\Theta_d = X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n,$$

d'autres formes $\Theta_d^1, \Theta_d^2, \ldots, \Theta_d^{2p}$, définies par les équations

$$\Theta_d^k = X_1^k dx_1 + \ldots + X_n^k dx_n.$$

Assujettissons les variables x_i et des variables t_i à satisfaire aux équations différentielles

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11} dx_1 + \ldots + a_{n1} dx_n = X_1^1 dt_1 + X_1^2 dt_2 + \ldots + X_1^p dt_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} dx_1 + \ldots + a_{nn} dx_n = X_n^1 dt_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n^p dt_p, \end{array}\right.$$

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} X_1^{p+1} dx_1 + \ldots + X_n^{p+1} dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1^{2p-1} dx_1 + \ldots + X_n^{2p-1} dx_n = 0, \end{array}\right.$$

qui sont au nombre de $n+p-1$, et qui, par conséquent, forment un système déterminé. On peut écrire ces équations sous la forme abrégée

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \Theta_\delta^1\, dt_1 + \ldots + \Theta_\delta^p\, dt_p, \\ \qquad \Theta_d^{p+1} = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_{d=0}^{2p-1} = 0, \end{array} \right.$$

en supposant que la première ait lieu pour toutes les valeurs attribuées aux différentielles auxiliaires δ.

Le système (1) étant écrit sous la forme (2), on reconnaît immédiatement qu'il exprime des propriétés indépendantes de tout choix de variables, et, par conséquent, il aura les propriétés d'invariance du système (10) de notre première Partie.

Si l'on remplace les variables x_i par n variables y_i, et que la forme Θ_d^h devienne

$$\Theta_d^h = Y_1^h dy_1 + \ldots + Y_n^h dy_n,$$

le système (1) prendra la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_{11}dy_1 \quad + \ldots + b_{n1}dy_n \quad = Y_1^1 dt_1 + \ldots + Y_1^p dt_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{1n}dy_1 \quad + \ldots + b_{nn}dy_n \quad = Y_n^1 dt_1 + \ldots + Y_n^p dt_p, \\ Y_1^{p+1} dy_1 + \ldots + Y_n^{p+1} dy_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_1^{2p-1} dy_1 + \ldots + Y_n^{2p-1} dy_n = 0, \end{array} \right.$$

les quantités b_{ik} ayant la signification déjà donnée.

Si l'on considère maintenant une nouvelle forme Θ_d^{2p}, le quotient

$$(4) \qquad \frac{\Theta_d^{2p}}{dt_q} = X_1^{2p} \frac{dx_1}{dt_q} + \ldots + X_n^{2p} \frac{dx_n}{dt_q},$$

q désignant l'une quelconque des variables $t_1, \ldots, t_n$, se transformera dans l'expression

$$Y_1^{2p} \frac{dy_1}{dt_q} + \ldots + Y_n^{2p} \frac{dy_n}{dt_q},$$

et il se formera de la même manière, soit au moyen des anciennes variables et du système (1), soit au moyen des nouvelles et du système (3). En d'autres termes, ce quotient sera un invariant absolu pour tout changement de variables. Il n'y a, d'ailleurs, aucune difficulté à le calculer; il suffit d'éliminer entre les équations (3) et (4) les différentielles dx_i, dt_α, et l'on obtient le résultat suivant :

Posons, pour abréger,

$$(5)\qquad \begin{Bmatrix} \Theta_d^1 & \Theta_d^2 & \dots & \Theta_d^p \\ \Theta_d^{q+1} & \Theta_d^{q+2} & \dots & \Theta_d^{q+p} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} & X_1^1 & \dots & X_1^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & X_n^1 & \dots & X_n^p \\ X_1^{q+1} & \dots & X_n^{q+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^{q+p} & \dots & X_n^{q+p} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

On trouvera, par exemple,

$$(6)\qquad \frac{\Theta_d^{2p}}{dt_p} = -\frac{\begin{Bmatrix} \Theta_d^1 & \dots & \Theta_d^p \\ \Theta_d^{p+1} & \dots & \Theta_d^{2p} \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} \Theta_d^1 & \dots & \Theta_d^{p-1} \\ \Theta_d^{p+1} & \dots & \Theta_d^{2p-1} \end{Bmatrix}}.$$

Remarquons que, si l'on avait $p = 1$, le dénominateur devrait être remplacé par

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}.$$

D'après cela, si l'on considère $2n$ formes et que l'on désigne, pour un moment, par A_k le déterminant

$$\begin{Bmatrix} \Theta_d^1 & \dots & \Theta_d^k \\ \Theta_d^{n+1} & \dots & \Theta_d^{n+k} \end{Bmatrix},$$

les quotients

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}, \quad \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}, \quad \dots, \quad \frac{A_1}{\Delta}$$

sont des invariants absolus. Mais on a

$$(-1)^n A_n = \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ X_n^1 & \dots & X_n^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1^{n+1} & \dots & X_n^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1^{2n} & \dots & X_n^{2n} \end{vmatrix},$$

et il est aisé de voir que, si l'on remplace les variables x_i par d'autres variables y_i, chacun des déterminants qui figurent dans le second membre de cette équation se reproduit multiplié par le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(x_1\ldots x_n)}{\partial(y_1\ldots y_n)}$$

ou déterminant de la substitution. Donc A_n et, par conséquent, A_{n-1}, ..., A_1, Δ se reproduisent multipliés par le carré de ce déterminant.

Par suite, toutes les fonctions

$$\left\{\begin{matrix} \Theta_d^1 & \Theta_d^2 & \ldots & \Theta_d^q \\ \Theta_d^{p+1} & \Theta_d^{p+2} & \ldots & \Theta_d^{p+q} \end{matrix}\right\}.$$

sont des invariants relatifs *que l'on transformera en invariants absolus en les divisant par l'une d'elles, par exemple par* Δ.

Je ne m'arrêterai pas à montrer comment on peut exprimer toutes ces fonctions au moyen des plus simples d'entre elles $\left\{\begin{matrix}\Theta_d^i\\ \Theta_d^k\end{matrix}\right\}$, et je me contenterai, pour cet objet, de renvoyer à mon Mémoire *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques, où se trouve résolue une question analogue*. Mais il y a une propriété que j'établirai en terminant cet article : *Toutes les fois que ces invariants contiendront sur leurs deux lignes la forme* Θ_d *elle-même, qu'ils auront, par conséquent, pour expression*

$$A = \left\{\begin{matrix} \Theta_d & \Theta_d^1 & \ldots & \Theta_d^h \\ \Theta_d & \Theta_d^{h+1} & \ldots & \Theta_d^{2h} \end{matrix}\right\},$$

ils jouiront de la propriété de se reproduire multipliés par une puissance de ρ, *quand on remplacera la forme* Θ_d *par* $\rho\Theta_d$, ρ *étant, d'ailleurs, une fonction quelconque des variables indépendantes.*

En effet, considérons l'expression de A sous forme de déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & X_1 & X_1^1 & \ldots & X_1^h \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} & X_n & X_n^1 & \ldots & X_n^h \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ X_1^{h+1} & \ldots & X_n^{h+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1^{2h} & \ldots & X_n^{2h} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on multiplie Θ_d par ρ, il faudra, dans le déterminant précédent, remplacer X_i par ρX_i, a_{ik} par $\rho a_{ik} + X_i \frac{\partial\rho}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial\rho}{\partial x_i}$. Après avoir effectué cette substitution, ajoutons à la $k^{\text{ième}}$ ligne la $n+1^{\text{ième}}$ multipliée par $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}$, et à la $i^{\text{ième}}$ colonne la $n+1^{\text{ième}}$ multipliée par $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}$. Nous obtiendrons alors l'ancienne expression de A, où tout élément compris dans le carré formé par les $n+1$ premières lignes et colonnes aura été multiplié par ρ. Le déterminant A se reproduira donc multiplié par ρ^{n+1-h}.

IX.

Nous allons appliquer les propositions précédentes, mais en considérant seulement les formes les plus générales. Nous avons vu, d'ailleurs, à l'article VII, que tous les cas peuvent se ramener presque immédiatement à ceux que nous avons l'intention d'étudier.

Supposons d'abord n pair et égal à $2m$. La forme réduite peut alors s'écrire

$$\Theta_d = p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m;$$

je considérerai seulement les deux invariants suivants.

Le premier s'obtient avec la forme fondamentale et la différentielle d'une fonction quelconque φ; son expression générale est

$$(7)\qquad \left\{ \begin{matrix} \Theta_d \\ d\varphi \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} & X_1 \\ a_{12} & \ldots & \ldots & a_{n2} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} & X_n \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous emploierons avec Clebsch le symbole (φ) pour désigner le quotient

$$(8)\qquad (\varphi) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{matrix} \Theta_d \\ d\varphi \end{matrix} \right\},$$

qui sera un invariant absolu.

Le second invariant que nous considérerons sera le suivant

$$\left\{\begin{matrix} d\varphi \\ d\psi \end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix},$$

et nous poserons

$$(9) \qquad (\varphi\psi) = \frac{-1}{\Delta}\left\{\begin{matrix} d\varphi \\ d\psi \end{matrix}\right\},$$

en sorte que $(\varphi\psi)$ sera encore un invariant absolu.

Si l'on calcule les deux symboles (φ), $(\varphi\psi)$ avec les variables de la forme réduite, on obtient sans difficulté, par quelques combinaisons de lignes ou de colonnes,

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} &(\varphi) = p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \dots + p_m\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}, \\ &(\varphi\psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial x_m} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}. \end{aligned}\right.$$

Les deux symboles que nous venons de définir sont des cas particuliers du suivant qui joue un rôle fondamental dans la théorie des équations aux dérivées partielles, qui s'applique à des fonctions de $2m+1$ variables z, x_i, p_k, et qui est défini par l'équation

$$(11) \qquad [\varphi\psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \dots.$$

Ici nos fonctions ne dépendent pas de z. On a donc

$$(\varphi\psi) = [\varphi\psi].$$

Mais il est clair que l'on a aussi

$$(12) \qquad (\varphi) = [\varphi z].$$

En vertu de cette remarque, les relations établies entre les symboles (φ), $(\varphi\psi)$ par Clebsch peuvent toutes se déduire d'une équation générale donnée par M. Mayer (*Mathematische Annalen*,

t. IX, p. 370). M. Mayer a montré que, si l'on considère trois fonctions φ, ψ, χ des $2m+1$ variables z, x_i, p_k, on a

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &[\varphi[\psi\chi]]+[\psi[\chi\varphi]]+[\chi[\varphi\psi]] \\ &\quad=\frac{\partial\varphi}{\partial z}[\psi\chi]+\frac{\partial\psi}{\partial z}[\chi\varphi]+\frac{\partial\chi}{\partial z}[\varphi\psi]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on applique cette relation à trois fonctions ne contenant pas z, on en déduit la relation de Jacobi

$$(14)\qquad (\varphi(\psi\chi))+(\psi(\chi\varphi))+(\chi(\varphi\psi))=0,$$

entre les symboles $(\varphi\psi)$.

Si l'on pose $\chi=z$, et si l'on suppose les fonctions φ, ψ indépendantes de z, on trouve de même

$$(15)\qquad (\varphi(\psi))-(\psi(\varphi))=(\varphi\psi)+((\varphi\psi)).$$

Telles sont les deux relations qui servent de base à la méthode d'intégration de Clebsch.

X.

Je vais faire une application des résultats qui précèdent à l'étude des relations entre deux réduites différentes d'une même forme.

Considérons une expression différentielle Θ_d et soit

$$p_1 dx_1+\ldots+p_m dx_m$$

une première forme réduite ; je dis d'abord que, toutes les fois que l'on pourra trouver m fonctions $X_1, \ldots, X_m$, donnant naissance à une identité de la forme

$$(16)\qquad p_1 dx_1+\ldots+p_m dx_m=P_1 dX_1+\ldots+P_m dX_m,$$

le second membre de cette égalité sera une forme réduite nouvelle. Pour cela, il suffira de démontrer que les fonctions X_i, P_k sont indépendantes, et cela est à peu près évident; car s'il y avait une ou plusieurs relations entre les variables X_i, P_k, on pourrait, au moyen de ces relations, exprimer quelques-unes de ces fonctions au moyen des autres, et par conséquent ramener

$$\Theta_d = P_1 dX_1 + \ldots + P_m dX_m,$$

à une forme normale contenant moins de $2m$ fonctions. On sait que cela est impossible et l'on peut conclure que, si m fonctions X_i satisfont à l'équation (16), le second membre de cette équation sera certainement une nouvelle forme réduite de Θ_d. En d'autres termes, les fonctions X_i, P_k seront indépendantes.

Cela posé, les deux symboles (φ), $(\varphi\psi)$, étant des invariants absolus, conserveront la même valeur quand on les formera en considérant φ, ψ, soit comme des fonctions de X_i, P_k, soit comme des fonctions de x_i, p_k.

On aura donc

$$(17)\quad \begin{cases} \sum p_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i} = \sum P_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial P_i}, \\ \sum \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i} - \dfrac{\partial\psi}{\partial p_i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum \dfrac{\partial\varphi}{\partial P_i}\dfrac{\partial\psi}{\partial X_i} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_i}\dfrac{\partial\psi}{\partial P_i}. \end{cases}$$

Appliquant ces équations générales aux fonctions X_i, P_k ellesmêmes, nous obtenons sans difficulté les équations suivantes

$$(18)\quad \begin{cases} (P_i) = P_i, \quad (X_i) = 0, \\ (P_i X_i) = 1, \quad (P_i X_k) = 0, \quad (X_i X_k) = 0, \quad (P_i P_k) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si m fonctions X_i des $2m$ variables x_i, p_k satisfont à une identité différentielle de la forme

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_m dX_m = p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m,$$

les $2m$ fonctions X_i P_k sont indépendantes et elles satisfont aux relations

$$(P_i) = P_i, \quad (X_i) = 0,$$
$$(P_i X_i) = 1, \quad (P_i X_k) = 0, \quad (X_i X_k) = 0, \quad (P_i P_k) = 0.$$

Les deux premières équations expriment que P_i est une fonction homogène de degré 1 et X_i une fonction homogène de degré 0 des variables p_k. C'est ce que mettent en évidence les équations *finies* données par Clebsch, qui permettent de passer d'une forme normale à toute autre. Je ne reviens pas sur ce point, qui est bien connu.

Je vais maintenant établir une proposition fondamentale et dont M. Lie a fait le plus heureux usage dans sa théorie des groupes : *Si l'on a k fonctions indépendantes* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *satisfaisant aux équations*

$$(X_i) = 0, \quad (X_i X_h) = 0,$$

il sera possible de trouver une forme normale dont feront partie les k fonctions

$$\begin{gathered} P_1 dX_1 + \ldots + P_k dX_k + P_{k+1} dX_{k+1} + P_m dX_m \\ = p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m. \end{gathered}$$

Je commencerai par démontrer cette proposition dans le cas où l'on a une seule fonction X_1. Alors, je détermine une fonction P_1 par les deux équations

$$(19) \qquad (P_1) = P_1, \quad (P_1 X_1) = 1.$$

Il est aisé de voir que ces équations ne sont pas incompatibles.

La première nous montre que l'on aura

$$P_1 = p_1 \varphi\left(x_1, \ldots, x_m, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}\right),$$

et, si nous nous rappelons qu'en vertu de l'équation

$$(X_1) = 0,$$

à laquelle satisfait X_1, cette fonction est homogène de degré zéro par rapport aux variables p_i, nous reconnaîtrons sans difficulté que l'équation

$$(P_1 X_1) = 1$$

se réduit à une relation entre les dérivées de φ et les variables $x_i, \frac{p_i}{p_1}$ dont elle dépend. Ainsi, il est toujours possible, et d'une infinité de manières, de déterminer une fonction P_1 satisfaisant aux deux équations (19). Il suffira de prendre une intégrale d'une équation linéaire à $2m - 1$ variables indépendantes.

Supposons donc P_1 déterminé. Considérant la forme

$$U_d = p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m - P_1 dX_1,$$

nous allons faire voir qu'elle appartient au type

$$P_2 dX_2 + \ldots + P_m dX_m, \tag{20}$$

ce qui démontrera la proposition que nous avons en vue.

Pour cela, j'écris le système des équations différentielles de Pfaff, relatif à cette forme U_d. On a

$$\delta U_d - dU_\delta = \delta p_1 dx_1 - dp_1 \delta x_1 + \ldots + dP_1 \delta X_1 - dX_1 \delta P_1,$$

ce qui permet de former les équations différentielles cherchées sous la forme suivante

$$\left\{\begin{aligned} & dx_i - \frac{\partial P_1}{\partial p_i} dX_1 + \frac{\partial X_1}{\partial p_i} dP_1 = -P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} \lambda\, dt, \\ & dp_i - \frac{\partial P_1}{\partial x_i} dX_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_i} dP_1 = \lambda\, dt \left(p_i - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i}\right). \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Je vais démontrer que ces $2m$ équations peuvent être vérifiées sans que l'on fasse $\lambda = 0$ et que deux d'entre elles sont la conséquence des autres. Introduisons les inconnues auxiliaires dX_1, dP_1 en fonction desquelles les différentielles dx_i, dp_i se déterminent; et essayons de déterminer dX_1, dP_1 en portant les valeurs de dx_i, dp_k dans les expressions développées de dX_1, dP_1,

$$\begin{aligned} dX_1 &= \sum \frac{\partial X_1}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial X_1}{\partial p_i} dp_i, \\ dP_1 &= \sum \frac{\partial P_1}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial P_1}{\partial p_i} dp_i; \end{aligned}$$

nous obtiendrons ainsi les deux équations

$$\begin{gathered} [(P_1 X_1) - 1](dP_1 + \lambda P_1\, dt) = \lambda\, dt [(P_1) - P_1], \\ [(P_1 X_1) - 1]\, dX_1 = \lambda\, dt (X_1), \end{gathered}$$

qui sont identiquement vérifiées. Donc les équations (21) peuvent être vérifiées sans qu'on fasse $\lambda = 0$; elles admettent une indétermination du second degré, et par suite la forme U_d appartient au type (20), comme il fallait l'établir.

Il nous reste à démontrer d'une manière générale que, si l'on a k fonctions indépendantes $X_1, \ldots, X_k$, satisfaisant aux équations

$$(X_h) = 0, \quad (X_h X_{h'}) = 0,$$

il sera possible de trouver une forme normale dont elles fassent partie. Puisque nous avons démontré le théorème pour une fonction, il suffit de prouver que, s'il est vrai pour $k-1$ fonctions $X_1, \ldots, X_{k-1}$, il sera vrai pour une fonction de plus, V, sous la condition que cette fonction V satisfasse aux équations

$$(22) \qquad (V) = 0, \quad (VX_i) = 0,$$

et ne soit liée aux premières par aucune relation, indépendante des variables.

Soit

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_{k-1} dX_{k-1} + P_k dX_k + \ldots + P_n dX_n$$

une des formes normales dont font partie les $k-1$ fonctions $X_1, \ldots, X_{k-1}$. Si l'on exprime V au moyen des variables X_i, P_k, les équations (22) deviendront, en vertu des propriétés d'invariance des symboles (φ), $(\varphi\psi)$,

$$(23) \quad P_k \frac{\partial V}{\partial P_k} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial P_n} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial P_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial P_{k-1}} = 0.$$

La fonction V est donc indépendante de $P_1, \ldots, P_{k-1}$, mais elle ne l'est pas nécessairement de $X_1, \ldots, X_{k-1}$. Faisons pour un instant ces dernières variables constantes. Comme, par hypothèse, la fonction V n'en dépend pas uniquement, elle demeure variable; et comme elle satisfait à la première des équations (23), on voit, d'après la proposition démontrée en premier lieu, que l'on pourra ramener

$$P_k dX_k + \ldots + P_m dX_m$$

à une forme normale

$$P'_k dV + P'_{k+1} dX'_{k+1} + \ldots + P'_m dX'_m,$$

qui contiendra V. Mais on a regardé $X_1, \ldots, X_{k-1}$ comme constantes; si on les rend variables, l'expression précédente s'augmentera de termes en $dX_1, \ldots, dX_{k-1}$ et l'on aura, par conséquent,

$$P_k dX_k + \ldots + P_m dX_m = P'_k dV$$
$$+ P'_{k+1} dX'_{k+1} + \ldots + P'_m dX'_m + A_1 dX_1 + A_2 dX_2 + \ldots + A_{k-1} dX_{k-1}.$$

Ainsi la forme normale primitive

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_{k-1} dX_{k-1} + P_k dX_k + \ldots + P_m dX_m$$

se changera dans la suivante

$$(P_1 + A_1) dX_1 + \ldots + (P_{k-1} + A_{k-1}) dX_{k-1}$$
$$+ P'_k dV + P'_{k+1} dX'_{k+1} + \ldots + P'_m dX'_m,$$

qui contient bien les k fonctions

$$X_1, \ldots, X_{k-1}, V;$$

le théorème est donc démontré généralement.

En résumé, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Toutes les fois que l'on aura des fonctions indépendantes $X_1, \ldots, X_r$ *des variables* x_i, p_k, *homogènes et de degré zéro par rapport aux variables* p_i, *et satisfaisant en outre aux équations*

$$(X_\alpha X_\beta) = 0,$$

il sera possible de leur adjoindre $2m - r$ *autres fonctions donnant naissance à l'identité différentielle*

$$p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m = P_1 dX_1 + \ldots + P_m dX_m.$$

Le cas où $r = m$ *n'est pas exclu. Les fonctions* X_i, P_i *seront toutes homogènes par rapport aux variables* p_i, *les premières du degré* 0, *les autres du degré* 1. *Elles auront une forme quelconque par rapport aux variables* X_i.

Ce théorème important donne naissance, par un simple changement de notation, à une autre proposition fondamentale que nous allons exposer.

On peut donner une forme nouvelle à l'identité

$$(24) \qquad p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m = P_1 dX_1 + \ldots + P_m dX_m$$

Posons

$$\left.\begin{array}{ll} p_i = p_m q_i, & x_m = -z, \\ P_i = P_m Q_i, & X_m = -Z, \end{array}\right\} p_m = \rho P_m.$$

Elle deviendra

$$dZ - Q_1 dX_1 - \ldots - Q_{m-1} dX_{m-1} = \rho(dz - q_1 dx_1 - \ldots - q_{m-1} dx_{m-1}).$$

Considérons une fonction φ des variables x_i, p_i, homogène et de degré μ par rapport aux variables p_i. Elle prendra la forme

$$\varphi = p_m^\mu f(q_1, \ldots, q_{m-1}, x_1, \ldots, x_{m-1}, z),$$

et l'on aura

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\varphi}{dp_1} = p_m^{\mu-1} \dfrac{\partial f}{\partial q_1}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} = p_m^\mu \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = p_m^\mu \dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{m-1}} = p_m^{\mu-1} \dfrac{\partial f}{\partial q_{m-1}}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{m-1}} = p_m^\mu \dfrac{\partial f}{\partial x_{m-1}}, & \end{array}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_m} = p_m^{\mu-1} \left[\mu f - q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} - \ldots - q_{m-1} \frac{\partial f}{\partial q_{m-1}}\right].$$

Si nous calculons de même les dérivées d'une autre fonction φ_1, de degré μ_1 par rapport aux variables p_i, et que l'on substitue toutes ces dérivées dans le symbole $(\varphi\varphi_1)$, on aura

$$(\varphi\varphi_1) = p_m^{\mu+\mu_1-1}[ff_1] - p_m^{\mu+\mu_1-1}\left[\mu f \frac{\partial f_1}{\partial z} - \mu_1 f_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right],$$

$[ff_1]$ désignant l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + q_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}\right] - \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + q_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right] + \ldots.$$

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de fonctions homogènes de degré zéro; on aura $\mu = \mu_1 = 0$,

$$(\varphi\varphi_1) = \frac{[ff_1]}{p_m}. \tag{25}$$

Si maintenant on opère de même avec les variables Z, Q_i, X_k, et si l'on applique la seconde équation (17), on aura

$$\frac{[ff_1]_z}{p_m} = \frac{[ff_1]_Z}{P_m},$$

les lettres z, Z placées en indice indiquant le système de variables avec lequel on forme le crochet. Nous pouvons donc écrire

$$(26) \qquad [ff_1]_z = \rho [ff_1]_Z.$$

Si nous appliquons cette équation à toutes les fonctions Z, X_i, Q_k nous en conclurons

$$[X_i Z] = 0, \quad [X_i X_k] = 0, \quad [Q_i Q_k] = 0,$$
$$[Z Q_k] + \rho Q_k = 0, \quad [Q_i X_i] = \rho.$$

On a donc, en changeant les notations, la proposition suivante :

Considérons $2m+1$ fonctions Z, X_i, P_k, satisfaisant à l'identité différentielle

$$(27) \quad dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_m dX_m = \rho(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_m dx_m);$$

ces fonctions sont nécessairement indépendantes. Elles satisfont en outre aux relations

$$(28) \quad \begin{cases} [ZX_i] = 0, \quad [X_i X_k] = 0, \\ [P_i X_i] = \rho, \quad [P_i X_k] = 0, \quad [P_i P_k] = 0, \\ [Z P_k] + \rho P_k = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, toutes les fois que l'on aura k fonctions indépendantes Z, X_1, ..., X_{k-1}, dont les crochets seront tous nuls, on pourra leur adjoindre d'autres fonctions telles que l'identité (27) soit satisfaite.

Il est essentiel d'ajouter aux équations (28) les relations suivantes, que l'on obtient en appliquant la formule de M. Mayer à trois des fonctions Z, X_i, P_k

$$(29) \quad \begin{cases} [\rho Z] = \rho^2 - \rho \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\ [\rho X_i] = -\rho \dfrac{\partial X_i}{\partial z}, \\ [\rho P_i] = -\rho \dfrac{\partial P_i}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces formules, qu'on pourrait démontrer directement, doivent être jointes aux équations (28), si l'on veut avoir l'équivalent des relations (18) relatives aux fonctions satisfaisant à l'identité (16).

Signalons encore un cas particulier de la proposition précédente : *On peut satisfaire à l'équation* (27) *en prenant arbitrairement* Z, *et alors* ρ *devra satisfaire uniquement à la première des équations* (29).

XI.

Supposons maintenant n impair et égal à $2m+1$. Le déterminant $\Delta = \Sigma a_{11} \ldots a_{nn}$ sera nul; mais, si nous nous bornons au cas général, tous ses mineurs du premier ordre ne seront pas nuls. Tant que l'invariant R, défini par la formule

$$(30) \qquad R^2 = \begin{Bmatrix} \theta_d \\ -\theta_d \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & X_1 \\ a_{12} & \ldots & a_{n2} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n \\ -X_1 & \ldots & -X_n & 0 \end{vmatrix}$$

ne sera pas nul, θ_d appartiendra au type indéterminé, et sa forme réduite pourra s'écrire

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m.$$

Nous considérons les deux invariants suivants.

Le symbole (φ) sera défini par la formule

$$(31) \qquad R^2(\varphi)^2 = \begin{Bmatrix} d\varphi \\ -d\varphi \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \ldots & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}$$

et le symbole $[\varphi\psi]$ par la relation

$$(32) \qquad R^2[\varphi\psi] = \begin{Bmatrix} \theta_d & d\varphi \\ \theta_d & -d\psi \end{Bmatrix}.$$

D'après les propriétés des déterminants symétriques gauches, tous ces invariants sont rationnels.

Si on les calcule sur la forme réduite, on trouvera

$$(33)\quad \begin{cases} R^2 = 1, \\ (\varphi)^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2, \\ [\varphi\psi] = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right] - \dfrac{\partial\psi}{\partial p_1}\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right] + \ldots, \end{cases}$$

Nous prendrons

$$(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Il suffira, quand on prendra les racines carrées dans la formule (31), de choisir le signe du second membre de telle manière que l'invariant absolu (φ) se réduise à $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, lorsqu'on le calculera sur la forme réduite.

L'invariant R appartient à la classe de ceux que nous avons considérés à la fin de l'article VIII, et il est aisé de reconnaître qu'il se reproduira multiplié par ρ^{n+1}, quand on multipliera la forme Θ_d par une fonction quelconque ρ. Donc $\rho\Theta_d$ appartiendra, quelle que soit ρ, au type le plus général. Considérons en particulier une forme normale de Θ_d. Nous aurons le théorème suivant :

Quelle que soit la fonction ρ des variables z, x_i, p_k, il est possible de trouver des fonctions Z, X_i, P_k satisfaisant à l'identité

$$dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_m\,dX_m = \rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m)$$

déjà considérée.

Les expressions (33) permettent de développer une méthode d'intégration toute semblable à celle que Clebsch a employée dans le cas d'un nombre pair de variables. J'utiliserai seulement leurs propriétés d'invariance pour étudier encore ici les relations entre deux formes réduites différentes.

XII.

Je dis d'abord que, toutes les fois que l'on a

$$\Theta_d = dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_m\,dX_m,$$

les variables Z, X_i, P_k sont indépendantes. Cette proposition se démontre comme dans le cas précédent.

Considérons maintenant deux formes réduites différentes donnant naissance à l'identité

$$(34)\quad dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m = dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_m\,dX_m,$$

et remarquons que l'on aura, en appliquant les propriétés d'invariance des symboles (φ), $[\varphi\psi]$,

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial Z}, \\ [\varphi\psi]_z = [\varphi\psi]_Z. \end{cases}$$

La première équation appliquée à Z nous donne

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 1,$$

et par conséquent

$$Z = z + \Pi,$$

Π ne dépendant que des variables x_i, p_k. La même équation, appliquée aux fonctions X_i, P_k, nous montre qu'*elles sont indépendantes de z*. Si donc on remplace Z par sa valeur dans l'identité (34), elle devient

$$(36)\quad d\Pi = P_1\,dX_1 + \ldots + P_m\,dX_m - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m,$$

et z est complètement éliminée.

Réciproquement, de toute égalité de la forme (36) on peut revenir à l'égalité (34) en remplaçant Π par $Z - z$. Ces deux égalités doivent donc être considérées comme absolument équivalentes.

Appliquons la seconde des formules (35) aux fonctions Z, X_i, P_k; nous aurons

$$(37)\quad \begin{cases} (X_i X_k) = 0, \quad (P_i P_k) = 0, \quad (X_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = 1, \\ (\Pi X_i) = p_1 \dfrac{\partial X_i}{\partial p_1} + \ldots + p_m \dfrac{\partial X_i}{\partial p_m}, \\ (\Pi P_i) = p_1 \dfrac{\partial P_i}{\partial p_1} + \ldots + p_m \dfrac{\partial P_i}{\partial p_m} - P_i. \end{cases}$$

Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

Lorsque $2m+1$ *fonctions* X_i, P_k, Π *des variables* x_i, p_k *satis-*

font à une équation de la forme

$$(38) \qquad d\Pi = P_1\,dX_1 + \ldots + P_m\,dX_m - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m,$$

les fonctions X_i, P_k *sont indépendantes, et, jointes à la fonction* Π, *elles satisfont aux relations* (37).

Je vais maintenant terminer en démontrant que, si r fonctions indépendantes $X_1, \ldots, X_r$ des variables x_i, p_k satisfont aux équations

$$(X_\alpha X_\beta) = 0,$$

on peut leur adjoindre des fonctions qui permettent de satisfaire à l'équation (38), ou, ce qui est la même chose, nous l'avons démontré, à l'équation (34).

La démonstration étant semblable à celle qui a été développée à l'article X, je me contenterai de l'indiquer.

Considérons d'abord le cas d'une seule fonction X_1 et déterminons une fonction P_1 des variables x_i, p_k par l'équation

$$(P_1 X_1) = 1;$$

il est aisé de voir que, si l'on considère la forme

$$U_d = dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m + P_1\,dX_1,$$

les équations de Pfaff relatives à cette forme et comprises dans l'équation unique

$$\delta U_d - dU_\delta = 0$$

sont indéterminées. D'ailleurs, par suite de la présence de la différentielle dz, U_d ne peut appartenir qu'au type indéterminé. On aura donc nécessairement

$$U_d = dZ - P_2\,dX_2 - \ldots - P_m\,dX_m,$$

et par conséquent

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m = dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_m\,dX_m,$$

ou encore

$$d\Pi = P_1\,dX_1 + \ldots + P_m\,dX_m - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m.$$

Le théorème est donc démontré pour le cas d'une seule fonction.

Quand il y en aura plusieurs, il suffira de répéter, presque textuellement, les démonstrations de l'article X. Nous nous dispenserons de les reproduire.

Nous avons fait maintenant connaître les trois propositions de M. Lie relatives aux identités

$$p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m = \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{P}_m\,d\mathrm{X}_m,$$
$$\rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m) = d\mathrm{Z} - \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 - \ldots - \mathrm{P}_m\,d\mathrm{X}_m,$$
$$p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m = \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{P}_m\,d\mathrm{X}_m + d\Pi.$$

Comme elles ont de nombreuses applications, nous avons voulu les démontrer par les procédés les plus élémentaires. La seule proposition que nous ayons empruntée à la théorie des équations aux dérivées partielles est la suivante : *Toute équation du premier ordre admet au moins une solution.* Et même cette proposition est démontrée par les raisonnements donnés à l'article VII.

Nous ferons remarquer que la proposition de l'article X, à savoir, que l'on peut satisfaire à l'équation

$$\rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m) = d\mathrm{Z} - \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 - \ldots - \mathrm{P}_m\,dx_m$$

en prenant pour Z une fonction quelconque, offre un moyen, différent de celui de l'article VII, de rattacher la théorie des équations aux dérivées partielles à la solution du problème de Pfaff.

Car, si

$$\mathrm{Z} = 0$$

est l'équation à intégrer, on pourra se proposer de ramener l'expression différentielle à un nombre *impair* de variables

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m$$

à la forme

$$\frac{1}{\rho}(d\mathrm{Z} - \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 - \ldots - \mathrm{P}_m\,dx_m),$$

et, ce problème une fois résolu, les équations

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{C}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}_m = \mathrm{C}_m$$

donneront une intégrale complète de la proposée. A la vérité, ce moyen paraît moins direct que celui de l'article VII, et il semble qu'il augmente la difficulté du problème, puisqu'il conduit à la solution, non seulement de l'équation

$$Z = 0,$$

mais aussi de

$$Z = C.$$

Mais il est aisé, comme on sait, d'introduire une constante dans une équation aux dérivées partielles. Par exemple, on remplacera x_i par $x_i + C$, z par $z + C$ ou $z + C_k x_k$; et en résolvant par rapport à cette constante, on fera disparaître l'objection que nous venons de signaler.