BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

AXEL HARNACK

Théorie de la série de Fourier

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 265-280

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_265_0>

MÉLANGES.

THÉORIE DE LA SÉRIE DE FOURIER.

PAR M. LE D[r] AXEL HARNACK, A DRESDE.

(SUITE.)

II.

Preuve que la représentation d'une fonction par une série trigonométrique est possible seulement d'une manière unique (¹).

Les points de divergence d'une série infinie sont de deux espèces : ou la somme des termes croît au-dessus de toute limite; la série sera alors en cet endroit infinie d'une manière déterminée ou indéterminée; ou bien la somme donne des valeurs qui oscillent entre des limites finies. Dans le premier cas, la divergence peut être nommée infinie; par contre, dans le second, on peut lui fixer une mesure finie. Désignons par S_{n-1} la somme des termes possédant l'indice $0, 1, \ldots$ jusqu'à $n-1$, et par R_n la somme de tous les autres, bref le reste de la série, et formons la suite $S_{n-1}, S_n, S_{n+1}, \ldots$; il existe une limite supérieure (finie) G_n et une limite inférieure g_n, qui ne sont pas surpassées par les termes de la suite infinie.

Si l'indice n croît à volonté, G_n atteindra, en diminuant continuellement ou en restant constant, une valeur G', et g_n en augmentant continuellement ou en restant constant, une valeur g'. Ces valeurs G' et g' représentent les limites dernières pour l'oscillation de la série et leur différence sera appelée la mesure de divergence.

(¹) Ce paragraphe contient les deux principes fondamentaux des séries trigonométriques prouvés par M. Cantor (*Math. Annalen.*, t. IV et V), et cela sous la forme la plus générale qu'on puisse leur donner. Les preuves mêmes pourraient rester sans changer dans leur principe, mais l'idée d'une masse discrète rend fort simple la preuve du second théorème.

Si cette mesure est égale à zéro, la série sera convergente en ce point.

Soit la différence $S_{n+k} - S_{n-1} = R_{n,k}$; la suite de restes $R_{n,0}, R_{n,1}, \ldots$ a la propriété que la valeur de chaque terme est au plus égale à la différence $G_n - g_n$. Si la mesure de divergence est plus petite qu'un nombre d, on pourra trouver une place n à partir de laquelle la valeur de tous les restes $R_{n,k}$ reste plus petite que d.

La série trigonométrique

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

doit être appelée « en général convergente » dans l'intervalle de a à b, si les places x, où la mesure des divergences est infinie ou plus grande qu'un petit nombre quelconque δ, ne représentent toujours qu'une masse discrète. Il n'est pas dit, pour cela, que les places où la série diverge déterminent dans leur ensemble une masse discrète; au contraire, il peut y avoir dans chaque intervalle, si petit qu'il soit, des places de divergence. Il n'y a que les points de divergence, possédant des valeurs infinies, ou des limites d'indétermination dont la différence est plus grande que δ, qui forment une masse discrète.

Théorème XV. — *Dans une série trigonométrique qui, dans un intervalle quelconque, est « en général convergente », on a* $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ *pour* $n = \infty$.

Pour chaque point x, où la mesure de la divergence peut être faite plus petite que δ, on peut déterminer une limite inférieure de n, de telle sorte que les termes de la série, dont l'indice est égal ou plus grand que n, possèdent une valeur plus petite que δ. Puisque les points où la mesure de la divergence est plus grande que δ n'appartiennent qu'à une masse dicrète, il s'ensuit qu'on peut déterminer, dans un voisinage quelconque de tout point de l'intervalle, une partie de $x - \varepsilon$ à $x + \varepsilon$, dans laquelle on ne trouve aucun point où la mesure de divergence reste plus grande que δ.

On peut aussi trouver une valeur n, de façon que, pour celle-ci et pour toutes les valeurs plus grandes, les termes

$$\begin{aligned}
&a_n \sin n(x+\varepsilon) + b_n \cos n(x+\varepsilon)\\
&\quad = (a_n \sin nx + b_n \cos nx)\cos n\varepsilon + (a_n \cos nx - b_n \sin nx)\sin n\varepsilon,\\
&a_n \sin n(x-\varepsilon) + b_n \cos n(x-\varepsilon)\\
&\quad = (a_n \sin nx + b_n \cos nx)\cos n\varepsilon - (a_n \cos nx - b_n \sin nx)\sin n\varepsilon,
\end{aligned}$$

en valeur absolue deviennent plus petits que δ, où x est une valeur dans un voisinage quelconque de chaque place, ε une valeur arbitraire à l'intérieur de l'intervalle construit.

Il se peut que, pour chaque valeur de ε, il reste à fixer une autre limite de n; il n'est pas encore dit que la même limite de n suffise à toutes les valeurs de ε, pour remplir la condition demandée.

On reconnaît facilement, par addition et soustraction de ces égalités, que les valeurs de

$$(a_n \sin nx + b_n \cos nx)\cos n\varepsilon \quad \text{et} \quad (a_n \cos nx - b_n \sin nx)\sin n\varepsilon$$

doivent être sûrement plus petites que δ.

Si l'on multiplie la première égalité par $\sin nx \sin n\varepsilon$, et la seconde par $\cos nx \cos n\varepsilon$, on trouve par addition que $a_n \sin 2n\varepsilon$, et d'une manière analogue que $b_n \sin 2n\varepsilon$ doivent être plus petits que $4\delta = \delta'$, bref peuvent être faits plus petits que tout nombre donné δ'. Soit la valeur $2\varepsilon = \alpha$, on dira alors : il faut, pour toutes les valeurs de α dans un intervalle déterminé (dont nous appelons les limites a et b) que $\lim a_n \sin n\alpha$ (ainsi que $\lim b_n \sin n\alpha$) devienne plus petit que δ'. Cela montre que pour chaque α on peut déterminer une place n, à partir de laquelle les valeurs

$$[a_n \sin n\alpha] \ \ldots \ [a_{n+k} \sin(n+k)\alpha] \ \ldots$$

sont toutes plus petites que δ' (pourtant il n'est pas dit que le même n suffise pour toutes les valeurs de x).

Cette demande ne sera accomplie que si à partir d'une place n toutes les valeurs $[a_n]$, ..., $[a_{n+k}]$ sont plus petites que δ'.

Admettons que ce n'est pas le cas; on pourra former une série avec un nombre infini de membres a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_n}, ..., dont les valeurs sont toutes égales ou plus grandes que δ'. Dans ce cas on pourra trouver une valeur α dans l'intervalle donné de a à b (et par suite dans chaque partie de celui-ci, si petite que soit cette partie), pour laquelle la série $a_{n_1} \sin n_1 \alpha$, $a_{n_2} \sin n_2 \alpha$, ..., $a_{n_u} \sin n_k \alpha$ n'a pas la limite o.

Car on peut de la série des nombres entiers positifs croissants sans limite $n_1, n_2, \ldots, n_k \ldots$ tirer une seconde série infinie $n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots$, pour laquelle on peut déterminer une valeur α, de sorte que les produits $n'_1 \alpha, n'_2 \alpha, \ldots, n'_k \alpha \ldots$ diffèrent toujours de moins d'un petit nombre quelconque ε avec un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$; par conséquent, que la valeur du sinus se trouve aussi près qu'on le veut de l'unité et par suite la valeur de $\alpha'_{nk} \sin n'_k \alpha$ au moins aussi près qu'on le veut de la valeur δ' différente de o.

On pose

$$n_1 \alpha > y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{et} \quad n_1 \alpha < y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1} < \alpha < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1},$$

y_1 désignant un nombre impair entier, et encore à déterminer. La valeur de α tombe dans l'intervalle donné de a à b si l'on a

$$a < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1}, \quad b > \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1}.$$

ou

$$(n_1 a + \varepsilon) \frac{2}{\pi} < y_1 < (n_1 b - \varepsilon) \frac{2}{\pi}.$$

Cet intervalle contiendra sûrement un nombre impair si l'on choisit

$$[n_1(b-a) - 2\varepsilon] \frac{2}{\pi} \geqq 2 \quad \text{ou} \quad n_1 \geqq \frac{\pi + 2\varepsilon}{b-a}.$$

Cette demande sert à fixer une limite inférieure n'_1 pour la série à former, et c'est justement en ce qu'il est nécessaire de fixer une limite inférieure que repose l'essentiel de toute la preuve. Aurait-on choisi y_1, d'après l'inégalité précédente, α se trouve sur un intervalle déterminé brièvement par

$$a' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n'_1}, \quad b' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n'_1},$$

et d'une longueur $\frac{2\varepsilon}{n'_1}$.

Dans cet intervalle, il nous faut déterminer α, de telle façon que, pour $n'_2 > n'_1$, on ait

$$\frac{y_2\frac{\pi}{2}-\varepsilon}{n'_2} < x < \frac{y_2\frac{\pi}{2}+\varepsilon}{n'_2};$$

y_2 doit répondre à l'inégalité

$$(n'_2 a' + \varepsilon)\frac{2}{\pi} < y_2 < (n'_2 b' - \varepsilon)\frac{2}{\pi};$$

il est plus grand que y_1; dans cet intervalle il se trouvera au moins un nombre impair si

$$n'_2 \geqq \left(\frac{\pi+2\varepsilon}{b'-a'} = \frac{\pi+2\varepsilon}{2\varepsilon}n'_1\right).$$

De cette façon nous ne possédons toujours qu'une limite inférieure, selon laquelle on tire n'_2 de la série primitive $n_1, n_2, \ldots$ et après que y_2 est choisi selon l'inégalité donnée, il reste encore la grandeur α limitée sur un intervalle fini, dont la longueur est $\frac{2\varepsilon}{n'_2}$.

Dans cet intervalle, on peut déterminer un nouvel intervalle, pour les valeurs duquel une grandeur $n'_3 . \alpha$ répond à la question, et ainsi de suite une place α sera définie par ce procédé, pour laquelle les valeurs $\sin n'_1\alpha$, $\sin n'_2\alpha$, ..., $\sin n'_k\alpha$, ... sont différentes de l'unité de quantités aussi petites qu'on le veut, de sorte que contrairement à l'hypothèse la valeur absolue des membres de la série

$$a_{n'_1}\sin n'_1\alpha,\quad a_{n'_2}\sin n'_2\alpha,\quad \ldots,\quad a_{n'_k}\sin n'_k\alpha \ldots$$

n'est pas plus petite que δ'.

Il n'existe donc pas de série $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ dont les valeurs sont toutes égales ou plus grandes que tout petit nombre δ', c'est-à-dire que l'on ait $\lim a_n = 0$, de même que $\lim b_n = 0$.

Theorème XVI. — *Si deux séries trigonométriques, en général convergentes, concordent partout, excepté aux points discrets dans un intervalle de* $-\pi$ *à* $+\pi$, *c'est-à-dire si leur différence forme une série trigonométrique, qui en général est nulle et seulement aux points discrets différente de* 0 *d'une quantité* *plus grande que δ, ou enfin, dans le cas où elle diverge, seulement aux points discrets posséderait des limites d'indétermination dont la valeur est plus grande que δ : ces deux séries sont identiques dans leur forme, c'est-à-dire que les coefficients correspondants sont égaux et leur différence est partout nulle.*

La différence des deux séries donne une série avec des coefficients qui finalement disparaissent.

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(c_k \sin kx + d_k \cos kx),$$

ce qui définit une fonction $f(x)$ qui seulement aux points discrets diffère de o d'une valeur déterminable. ou possède des limites d'indéterminations dont la différence avec o est plus grande que δ.

La série trigonométrique

$$\frac{1}{2} d_0 x^2 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k \sin kx + d_k \cos kx}{k^2}$$

définit une fonction continue $F(x)$ qui, comme Riemann [1] l'a démontré, a la propriété que premièrement

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = f(x)$$

partout où $f(x)$ est convergente, et secondement que partout sans exception

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

D'après cela, la fonction $F(x)$ répond aux conditions du théorème XIII et est une fonction linéaire :

$$Cx + C' + \frac{1}{2} d_0 x^2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k \sin kx + d_k \cos kx}{k^2}.$$

---

[1] *L. c.*, p. 232. Le théorème de Riemann sert de fondement à la démonstration ici comme plus loin, § 6.

Il s'ensuit que $C = d_0 = 0$, car l'égalité doit subsister pour toutes les valeurs de x, et le second membre de l'égalité est une fonction périodique.

La série infinie du second membre est uniformément convergente, car la série $\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente.

On peut alors facilement prouver, en intégrant entre les limites $-\pi$ à $+\pi$ (le second membre peut être intégré terme à terme), après que l'on a multiplié chaque membre par $\sin lx$ et $\cos lx$, que

$$C' = 0 \quad \text{et} \quad c_k = d_k = 0$$

pour toutes les valeurs de k, parce que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin \overline{kx}^2 \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \overline{kx}^2 \, dx = \pi$$

et

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos kx \, dx = 0$$

(k et l sont des nombres entiers différents).

Ces dernières équations sont appelées les propriétés des intégrales des fonctions trigonométriques.

Le théorème démontré attire l'attention sur une circonstance particulière de la série trigonométrique. Si une fonction $f(x)$ est définie par une série trigonométrique dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, et qu'on la change aux points discrets, il n'existera pour cette nouvelle fonction aucune autre série trigonométrique que la primitive. On peut même dire que celle-ci doit être considérée comme la seule et unique représentation de la nouvelle fonction par une série trigonométrique, quoique la fonction et la série diffèrent en un nombre infini de points, qui, il est vrai, sont discrets.

Le premier théorème de ce paragraphe repose sur la propriété plus générale d'une masse discrète et peut par conséquent être étendu à des points qui, dans un intervalle, ne sont pas partout denses.

Le deuxième théorème demande pour sa preuve le théorème XIII et est, par cela même, joint à la seconde propriété d'une masse discrète.

Il me semble impossible de prouver le théorème XIII sans employer cette propriété.

III

Sur la représentation des valeurs moyennes d'une fonction, par une série de Fourier.

Une série trigonométrique sera dite série de Fourier, si ses coefficients ont la forme

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx.$$

$f(x)$ est une fonction quelconque intégrable, seulement dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$.

Pour qu'une série infinie composée avec ces coefficients puisse en général être convergente, il faut que, d'après le premier théorème du paragraphe précédent, $\lim a_k = 0$, $\lim b_k = 0$ pour $k = \infty$. La fonction $f(x)$ doit aussi remplir cette condition. Je remplace cette condition par la condition, plus étroite comme on le verra plus tard : « *Non seulement $f(x)$, mais aussi $[f(x)]^2$, doivent être intégrables dans le même intervalle.* »

Cette condition sera remplie d'elle-même si $f(x)$ est partout une fonction finie et intégrable ; elle peut aussi subsister, si $f(x)$ devient infini; il n'y a que la manière de devenir infini qui est limitée.

Cette condition sera introduite pour montrer la propriété importante des coefficients que M. Plarr (1), et plus tard, indépendamment de ce dernier, M. Töpler (2), ont démontrées.

Si l'on considère le problème de représenter une fonction qui est

(1) *Comptes rendus,* mai 1857.

(2) Les questions générales de cette espèce ont été étudiées d'une manière plus large dans la dissertation de M. Gram : *Om Rækkeudviklinger bestemte ved Hjælp af de mindste Kvadraters Methode.* Kjöbenhavn, 1879. — *Anzeiger der Akad. zu Wien,* 7 déc. 1876. — *Repertorium der Math.*, F. I, p. 402.

intégrable ainsi que son carré, et qui est donnée arbitrairement pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, par une série avec un nombre fini de termes,

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

et cela de la manière la plus avantageuse, c'est-à-dire que, d'après la méthode des moindres carrés,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - b_0 - \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)^2 dx$$

soit un minimum, on trouve, par la différentiation partielle de l'intégrale relativement à chaque coefficient, que d'après la propriété des intégrales des fonctions représentant sin et cos, chaque coefficient doit prendre la valeur qu'il possède dans le développement de la série de Fourier. Il obtient cette valeur indépendamment du nombre n de membres pris dans la série et de la manière de laquelle ceux-ci ont été choisis.

Théorème XVII. — *Chaque terme de la série de Fourier a la propriété, qu'il donne, considéré en lui-même, avec la plus petite déviation, définie plus haut, une représentation de la fonction dans un intervalle de $-\pi$ à $+\pi$.*

Je me sers de l'intégrale précédente, au moyen de laquelle la grandeur de la déviation est mesurée pour la démonstration du

Théorème XVIII. — *Si une fonction $f(x)$ et son carré sont intégrables, on a*

$$\lim \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

et

$$\lim \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

pour $n = \infty$.

En effet, si l'on résout l'intégrale, dans laquelle a_k et b_k sont les intégrales au commencement définies, on obtient l'égalité

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)-b_0-\sum_{k=1}^{k=n}(a_k\sin kx+b_k\cos kx)\right]^2 dx$$
$$=\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2 dx-2\pi b_0^2-\pi\sum_{k=1}^{k=n}(a_k^2+b_k^2).$$

Le premier membre de l'égalité est positif, quelque grand que soit n, et par conséquent le second membre ne devient pas négatif si grand que soit n. De là

$$2\pi b_0^2+\pi\sum_{k=1}^{k=n}a_k^2+b_k^2$$

ne dépassera pas la valeur $\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2 dx$ pour les valeurs arbitrairement croissantes de n.

On peut alors déterminer n, de telle façon que

$$\sum_{k=n}^{k=n+m}a_k^2+b_k^2$$

reste pour toutes les valeurs de m une grandeur aussi petite qu'on voudra.

Il s'ensuit que $\lim a_n$ et $\lim b_n$ sont égales à o.

En même temps se trouve démontré le théorème suivant :

Théorème XIX. — *Les coefficients d'une série de Fourier où $f(x)$ est intégrable ainsi que son carré tendent vers* o *de façon que*

$$\lim a_n\sqrt{n} \quad \text{et} \quad \lim b_n\sqrt{n}=0.$$

Il est utile de remarquer que dans cette preuve la fonction n'est nullement limitée quant à ce qui touche le nombre des maxima et minima.

Dans le cas que le nombre de maxima et minima dans la fonction $f(x)$ est fini, MM. Heine et C. Neumann ont donné des limites supérieures pour les intégrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

pour chaque valeur de n (*Kugelfunctionen*, 2. Auflage, t. I; et *Die Kreis- Kugel- u. Cylinderfunctionen*, Leipzig, 1881).

Il faut remarquer du reste que, dans le théorème précédent, n désigne l'indice que a_n et b_n reçoivent véritablement dans la série $\Sigma\, a_k^2 + b_k^2$; il s'ensuit que le théorème XIX *n'a pas de valeur dans sa forme pour une série, dans laquelle manque un nombre infini de membres:* comme par exemple dans la série $\Sigma a^n \sin(b^n x)$, où b est nombre entier quelconque et où l'on peut avoir $a < 1$ et $a\sqrt{b} > 1$.

Comme $f(x)$ est une fonction quelconque, on pourra donner au théorème XVIII la forme suivante :

Théorème XX. — *Si $f(x)$ et son carré sont des fonctions intégrables, on a entre des limites quelconques*

$$\lim \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sin nx\, dx \quad \text{et} \quad \lim \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cos nx\, dx = 0.$$

Le résultat nous dit davantage; car, si l'on désigne le reste de la série de Fourier, à partir du terme possédant l'indice n au terme à l'index $n+m$, par R_{nm}, on a

$$R_{nm} = \sum_{k=n}^{k=n+m} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

et

$$\int_{-\pi}^{+} R_{mn}^2\, dx = \pi \sum_{k=n}^{k=n+m} a_k^2 + b_k^2.$$

Le reste R_{nm} a alors la propriété, qu'en choisissant n on peut rendre l'intégrale de R_{nm}^2 plus petite que tout petit nombre δ, et comme l'intégrale ne contient que des termes positifs, il est clair que, entre des limites quelconque x_0 et x_1 tombant dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} R_{nm}\, dx < \delta.$$

Nous tirons de cette inégalité que toutes les places où la valeur R_{nm} est plus grande qu'un nombre quelconque g ne peuvent remplir qu'un intervalle h, qui est déterminé par la condition

$g^2 h < \delta$. De là on a

$$\int_{x_0}^{x_1} \text{abs}\,[R_{nm}]\,dx < g(x_1 - x_0) + \frac{\delta}{g},$$

et si l'on pose $g = \sqrt{\dfrac{\delta}{x_1 - x_0}}$, le second membre de l'inégalité sera alors plus petit que $2\sqrt{\delta(x_1 - x_0)}$ et

$$\text{abs} \int_{x_0}^{x_1} R_{nm}\,dx \leqq \int_{0}^{x_1} \text{abs}\, R_{nm}\,dx < 2\sqrt{\delta(x_1 - x_0)}.$$

pour toutes les valeurs de m, seulement en choisissant n (¹).

Désignons par S_n la somme des termes

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

on aura, d'après le théorème démontré plus haut, que

$$\lim \int_{x_0}^{x_1} S_n(x)\,dx,$$

pour $n = \infty$, a une valeur déterminée. Car

$$\int_{x_0}^{x_1} S_{n+m}\,dx - \int_{x_0}^{x_1} S_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} R_{n++1,m}\,dx$$

est une différence qui, par le choix de m, devient aussi petite qu'on le veut, indépendamment de m.

Nous avons à déterminer la valeur de cette intégrale. D'après la sommation connue et développée par Dirichlet, on a

$$S_n = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos k(\alpha - x)\,d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{\sin(n - \frac{1}{2})(\alpha + x)}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha.$$

(¹) Il ne faut pas conclure de cette inégalité que R_{nm}, par un choix de n indépendant de m, devienne aussi petite qu'on le veut même pour une valeur unique de x; car, d'après les valeurs variées de m, des valeurs oscillantes peuvent appartenir à la même place x, et ces valeurs peuvent devenir aussi grandes qu'on le veut. L'en-

Après le remplacement de l'ordre de l'intégration, on a

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{S}_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,dx.$$

L'intégrale se partage en deux parties,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{S}_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin n(\alpha-x)\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,dx \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha \int_{x_0}^{x_1} \cos n(\alpha-x)\,dx.\end{aligned}$$

Le second terme du second membre reçoit, après le développement de l'intégrale intérieure, le facteur $\frac{1}{n}$ et tend vers 0, avec des valeurs croissantes de n; il faudra alors considérer la limite du premier terme et nous la désignerons par le signe I.

Nous posons $\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x)$ ou $f(x) = \varphi'(x)$; de là il suit

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi'(\alpha)\,d\alpha \int_{\alpha-x_1}^{\alpha-x_0} \sin nz \cot\tfrac{1}{2}z\,dz;$$

désignons l'intégrale intérieure simplement par $\psi(\alpha)$, on a, après l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi'(\alpha)\psi(\alpha)\,d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}[\varphi(\alpha)\psi(\alpha)]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\psi'(\alpha)\,d\alpha.\end{aligned}$$

Cette formule est valable pour toutes les valeurs finies de n, car les fonctions φ et ψ sont partout finies. Mais, comme $\varphi(-\pi) = 0$ et

$$\psi'(\alpha) = \sin n(\alpha - x_0)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - x_0) - \sin n(\alpha - x_1)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - x_1)$$

on a

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx \int_{\pi-x_1}^{\pi-x_0} \sin nz \cot\tfrac{1}{2}z\,dz \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)[\sin n(\alpha-x_1)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-x_1) - \sin n(\alpha-x_0)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-x_0)]\,d\alpha.\end{aligned}$$

---

semble de ces places ne doit remplir, pour chaque valeur de m, qu'un intervalle plus petit que $\frac{\delta}{g^2}$.

Si x_0 et x_1 se trouve *dans l'intervalle* de $-\pi$ à $+\pi$, l'argument $\frac{1}{2}z$ dans l'intégrale de la première somme ne sera ni nul ni égal à π; $\cot\frac{1}{2}z$ sera alors une fonction continue et finie dans l'intervalle d'intégration et, d'après le théorème XX,

$$\lim_{n=\infty}\int_{\pi-x_1}^{\pi-x_0}\sin nz\cot\tfrac{1}{2}z\,dz = 0.$$

On prend de nouveau dans l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-x_1)\sin n(\alpha-x_1)\,d\alpha$$

un petit intervalle aussi petit qu'on le veut et qui renferme les places $\alpha = x_1$. A l'extérieur de cet intervalle $\varphi(\alpha)\cot\frac{1}{2}(\alpha-x_1)$ est une fonction continue et finie et la valeur limite des intégrales, relatives à ces parties d'intervalle est égale à zéro. On a

$$\lim\int_{x_0}^{x_1}S_n(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}[\varphi(x_1+z)-\varphi(x_0+z)]\cot\tfrac{1}{2}z\sin nz\,dz.$$

D'après les théorèmes qui seront démontrés dans le paragraphe suivant à propos de la valeur limite de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}F(z)\cot\tfrac{1}{2}z\sin nz\,dz,$$

et comme la fonction

$$\varphi(x_1+z)-\varphi(x_0+z) = \int_{x_0+z}^{x_1+z}f(x)\,dx = F(z)$$

est continue et possède une dérivée dont le carré est intégrable, on a

$$\lim\int_{x_1}^{x_0}S_n(x_1)\,dx = F(0) = \int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx;$$

cela prouve le théorème suivant :

Théorème XXI. — *Si l'on forme, à l'aide d'une fonction qui, de même que son carré, est intégrable (spécialement avec une fonction continue), les coefficients de la série de Fourier, cette série donne toujours une représentation des valeurs moyennes de* $f(x)$, *quand même la fonction a un nombre infini de maxima* *et de minima en un nombre infini de places. Par rapport à tout petit intervalle de x_0 à x_1, la valeur moyenne de la fonction sera donc exprimée avec une approximation quelconque par la valeur moyenne de la série de Fourier intégrée terme à terme.*

Cette représentation peut être appelée uniformément convergente. Soit h la longueur de l'intervalle d'intégration ; on peut rapprocher à volonté la valeur moyenne de $S_n(x)$ dans l'intervalle de x à $x+h$ de la valeur moyenne de $f(x)$, et cela pour toutes les valeurs de x, uniquement par le choix de n.

Car la série

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} S_n(x)\,dx = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} -\frac{a_k}{k}\,\frac{\cos k(x+h) - \cos kx}{h} + \frac{b_k}{k}\,\frac{\sin k(x+h) - \sin kx}{h}$$

est, d'après le théorème XIX, uniformément convergente, dès qu'une valeur déterminée et finie de h est donnée.

Cette formule reste valable si les limites de l'intégrale se confondent avec les limites $-\pi$ à $+\pi$, soit séparément, soit toutes deux.

Nous verrons plus tard que l'on peut encore plus étendre les suppositions de ce théorème.

Ce théorème peut être considéré comme la suite du théorème sur l'intégration d'une série trigonométrique, qui sera discuté dans le dernier paragraphe. La preuve donnée ici est plus générale, car on ne fait pas l'hypothèse que la représentation de la fonction $f(x)$ doit avoir lieu par une série trigonométrique.

Il me semble important de rendre attentif sur ce que la nature de la série de Fourier existe dans la représentation de la valeur moyenne (comme toutes le séries analogues). Elle rend ce service pour toutes les fonctions continues sans exception.

Une autre question plus éloignée est celle-ci : Sous quelles conditions la série de Fourier nous donne-t-elle la valeur de la fonction $f(x)$ en une place déterminée?

La réponse est donnée par le théorème de Riemann : *Si la série* *en un point pour lequel* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *a une valeur déterminée est convergente, elle tend toujours vers cette valeur.* [*Voir* plus loin le théorème XXVIII, intimement uni au théorème de M. du Bois-Reymond (théorème XXVII)].

Les recherches commencées par Dirichlet, et poursuivies par d'autres, cherchent à répondre à la question suivante : Sous quelles conditions la série de Fourier devient-elle convergente en une place déterminée?

(*A suivre.*)