BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

AXEL HARNACK

Théorie de la série de Fourier

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 242-260

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_242_1>

© Gauthier-Villars, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THÉORIE DE LA SÉRIE DE FOURIER (1).

PAR M. LE D^r^ AXEL HARNACK, A DRESDE.

1. — PRINCIPES GÉNÉRAUX DU CALCUL INTÉGRAL.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable entre des limites a et b a été énoncée par Riemann (2) de la manière suivante : « *Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämmtlicher Theilintervalle δ die Gesammtgrosse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grosser als eine gegebene Grosse σ sind, stets unendlich klein wird*, so *convergirt die Summe*

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \ldots \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n),$$

wenn sämmtliche δ unendlich klein werden.

Pour donner à ce principe une forme plus courte, il est opportun de ranger une masse infinie de points dans un intervalle linéaire, comme il suit : Si l'on appelle l'intervalle de $x - \delta$ à $x + \delta$ l'*entourage* d'un point x d'une longueur 2δ, où δ représente une petite quantité quelconque, mais finie, on nommera « masse discrète » (*discrete Menge*) une multitude infinie de points, contenus entre

(1) Ce travail n'est en partie qu'une nouvelle rédaction d'un article publié par moi dans les *Math. Annalen.*, t. XVII et XIX; j'ai regardé comme un devoir de le publier, parce que la faute relevée (p. 526) a de l'influence sur quelques principes énoncés par moi.

(2) *Œuvres comp.*, p. 227. *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.*

les limites a et b, si toutefois il est possible de renfermer les points de cette quantité dans des entourages dont la somme peut être faite plus petite qu'un nombre quelconque, tandis que le nombre des entourages pourra croître à volonté.

Par contre, on nommera « masse linéaire » la multitude infinie de points, si la somme des entourages ne peut pas être aussi petite qu'on le désire.

L'idée de quantité discrète, qui a été énoncée pour la première fois par H. Hankel [1], ne peut pas être confondue avec celle d'une quantité de points de première espèce qui sert de fondement à une série de théorèmes généraux du Calcul intégral dans les travaux de MM. Cantor [2] et Dini [3]. Mais il est nécessaire de remarquer que chaque quantité de points de première espèce est en même temps une masse discrète. Pour rendre aussi claire que possible cette différence, je vais d'abord donner quelques exemples faciles.

1. Chaque nombre fini de points dans un intervalle d'une longueur finie est une quantité discrète; on désigne leur ordre par o.

2. La quantité infinie de points dans l'intervalle de o à 1, qui sont déterminés par les nombres

$$1, \tfrac{1}{2}, (\tfrac{1}{2})^2, (\tfrac{1}{2})^3, \ldots (\tfrac{1}{2})^n, \ldots,$$

est discrète, car les points de cette masse se rassemblent seulement au point o. Si l'on sépare du point o un petit intervalle quelconque, on retient un nombre fini de points de la masse dans l'autre partie, de telle façon que la somme totale des entourages peut devenir aussi petite qu'on le veut. Les endroits où les points de la masse se concentrent d'une manière infinie s'appellent les limites ou points limites (*Grenzpunkte*); l'ensemble de ces limites s'appelle la première dérivée. Dans le cas présent, la première dérivée est de l'ordre o; c'est pourquoi on désigne l'ordre de la masse primitive par 1.

---

(1) *Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen;* Tübingen, 1870, et un article intitulé *Grenze,* dans le *Allg. Encyclopädie,* v. Ersch. u. Gruber.

(2) *Math. Annalen.,* t. V, XV, XVII.

(3) *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali,* 1878, *Serie di Fourier.* Pisa; 1880.

3. Une quantité discrète peut avoir plusieurs dérivées, ou être d'un ordre plus élevé. Les points

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ (\tfrac{1}{2})^2,\ (\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^2,\ (\tfrac{1}{2})^3,\ (\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^3,\ (\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^3,\ (\tfrac{1}{2})^4,\ (\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^4,\ldots$$

se rassemblent en un nombre infini de points, qui correspondent aux places

$$0,\ \tfrac{1}{2},(\tfrac{1}{2})^2,\ (\tfrac{1}{2})^3,\ \ldots,$$

ce qui n'empêche pas cette masse d'être discrète. Si l'on porte à partir de o un petit intervalle quelconque, il reste encore un nombre fini de points, où existe une accumulation de points infinis, et si l'on enveloppe cette masse de petits intervalles, il ne reste plus qu'un nombre fini de points de la masse donnée. La première dérivée est du premier ordre, la masse primitive du second ordre.

En général, toute masse de points possédant un nombre fini de dérivées est discrète; car, si l'on prend comme point de départ la dernière dérivée, d'ordre o, c'est-à-dire un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, la masse de points, dont on prend la dérivée, possède seulement en ces points des amas de points infiniment nombreux, et en outre un nombre fini de points $b_1, b_2, \ldots, b_n$. La grandeur totale de leurs entourages peut par conséquent être diminuée à volonté. La masse de premier ordre est discrète; elle sert de point de départ pour arriver aux ordres plus élevés : la masse de deuxième ordre ne contient qu'un nombre fini de points $c_1, c_2, \ldots, c_p$, après qu'on a enveloppé les $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et les $b_1, b_2, \ldots, b_n$ par des intervalles arbitrairement petits; ce qui prouve qu'elle est discrète. Le caractère d'une masse discrète reste donc conservé chez un nombre fini de progrès.

Mais l'exemple suivant va nous indiquer la manière dont on peut construire une masse discrète qui n'appartient pas à la première espèce. Représentons-nous un intervalle de o à 1, partagé en un nombre infini de parties, ayant les longueurs de o à $\frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2}$ à $(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2$, de $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2$ à $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3$, etc., et supposons que l'on ait disséminé sur la première division de l'intervalle une masse de points du premier ordre, sur la deuxième division une masse du second ordre, sur la troisième une du troisième ordre, etc.; ces masses infiniment nombreuses ne possèdent plus dans leur totalité un nombre fini de dérivées, mais la totalité est discrète ; ce qui est facile à prouver. Si l'on sépare à partir de l'endroit 1 un intervalle aussi petit que l'on voudra, de longueur δ, il se trouve sur la longueur de o à $1-\delta$ un nombre fini de masses de première espèce, de telle sorte que tous les points qu'elles contiennent peuvent être enfermés dans un nombre fini d'intervalles, dont la somme est aussi petite qu'on le désire.

La masse discrète possède la propriété qu'on peut déterminer près de chaque endroit, à une distance arbitrairement petite, un intervalle de longueur finie, dans lequel il n'y a aucun point de cette masse, et cela de chaque côté de l'endroit considéré. Soit α un point quelconque de l'intervalle a, b ; il serait impossible à une distance quelconque de α de trouver un intervalle qui ne contînt pas de points de la masse, si dans l'entourage d'un point quelconque sur une longueur δ prise à partir de α il y avait un nombre infini de points. De plus il serait impossible de renfermer tous les points de la masse dans des intervalles dont la somme fût plus petite que δ, c'est-à-dire que, contrairement à l'hypothèse, la masse ne serait pas discrète.

Une masse discrète n'est, en aucun intervalle, aussi petit qu'il soit, partout dense (*überall dicht*). Une masse de cette propriété est toujours linéaire, comme, par exemple, la totalité des nombres rationnels ou irrationnels dans un intervalle ; de même tous les nombres dont le dénominateur (réduit à sa plus simple expression) est une puissance d'un nombre a.

Le théorème précédemment énoncé n'est pas renversable, quoique Hankel ait cherché à le prouver dans le travail nommé plus haut (1). C'est aussi la raison pour laquelle la condition d'intégrabilité donnée par Dirichlet (2) est inadmissible et que le théorème de l'intégrale de Riemann ne peut être exprimé par un autre. *On peut aussi distribuer une masse linéaire de telle façon qu'elle ne soit pas partout dense dans aucun intervalle.*

L'exemple suivant prouve cette possibilité. Sur un espace de

(1) L'inadmissibilité de la preuve a été remarquée par Dini : *Fondamenti,* p. 250.

(2) *Journal f. Mathem.*, t. IV, p. 169.

o à 1 on construit $n+1$ points à égale distance, comme les nombres o, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., $\frac{n-1}{n}$, 1. On porte à partir de o une longueur δ et de même de chaque côté de chaque point de division, et à la fin de $1-\delta$ à 1 la même longueur. Soit $2\delta < \frac{1}{n}$, ou $\delta < \frac{1}{2n}$. Les points de la masse à construire ne doivent se trouver que sur ces longueurs, de plus les points nommés doivent appartenir à la masse. Le nombre n, ainsi que plus loin les nombres n', n'', ... sont par exemple des nombres pairs. Appelons h la somme des longueurs, soit $2n\delta$ et partageons de nouveau chaque intervalle en n' points, portons de chaque côté de chaque point de division la longueur δ', soit $2n'\delta' < \delta$ ou $\delta' < \frac{\delta}{2n'}$. Posons la somme de tous ces nouveaux intervalles égale à $h' = 2n.2n'\delta'$, et $h' < h$. Si nous continuons ce mode de division, que dans l'intervalle δ' on construise les intervalles δ'', dont le nombre $2n''$ et dont la grandeur soit déterminée par l'inégalité $2n''\delta'' < \delta'$, de telle façon que la somme de tous ces espaces $2n.\ 2n'.\ 2n''.\ \delta''$ soit $h'' < h'$, nous avons une masse linéaire, si les valeurs de h, h', h'', ... ne descendent pas au-dessous d'une valeur déterminée; par contre, la masse deviendra discrète, si cette valeur limite devient égale à zéro. Dans les deux cas on peut, à l'intérieur d'un intervalle aussi petit qu'il soit, déterminer un nouvel intervalle, qui ne contienne aucun point de la masse; en outre, la masse de points n'appartient plus à la première espèce, parce que chaque point de division devient un point limite, et que dans l'entourage voisin de chaque point il tombe un nombre infini de points.

Les masses de points, qui dans tout intervalle ne sont pas partout denses, diffèrent peu des autres, quant à ce qui touche aux problèmes du Calcul différentiel; par contre la différence entre une masse discrète et une masse linéaire est importante dans le Calcul intégral, quand même la masse linéaire n'est pas partout dense. Pour donner aux théorèmes suivants un énoncé général, j'ai préféré m'appuyer sur l'idée d'une masse discrète, quoique dans la preuve des cinq premiers théorèmes la seconde qualité générale de celle-ci soit seule employée.

Théorème I. — *Une fonction qui dans l'intervalle de a à b* *doit être partout continue, est complètement définie, si elle est donnée à l'exception des points discrets.*

Soit x une valeur pour laquelle la fonction $f(x)$ est encore inconnue ; on peut déterminer dans le voisinage de x des points $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$, qui n'appartiennent pas à la masse discrète, et dont les valeurs $f(x + \varepsilon)$ et $f(x - \varepsilon)$ sont connues. La valeur $f(x)$ est la limite des progressions déterminées par $f(x + \varepsilon)$ et $f(x - \varepsilon)$, pendant que ε tend vers o. Le théorème peut être aussi énoncé de la manière suivante : deux fonctions continues, qui ne peuvent différer qu'en des points discrets, sont identiques. C'est un énoncé particulier du théorème général : une fonction continue est parfaitement définie lorsqu'elle est connue dans chaque petit intervalle en un point.

Théorème II. — *Si une fonction continue reste sur tous les points d'un intervalle, à l'exception d'une masse discrète, toujours au-dessus ou toujours au-dessous d'une limite déterminée, elle ne peut en aucun point dépasser cette limite.*

Soit G la limite supérieure, il serait possible, si la fonction continue était en un point x égale à $G + h$ $(h > o)$, de déterminer un intervalle fini $x \pm \varepsilon$, dans lequel toutes les valeurs de la fonction diffèrent de $f(x)$ d'une valeur plus petite que la grandeur positive h. Cet intervalle contiendrait des points qui n'appartiennent pas à la masse discrète, et dans lesquels, contre l'hypothèse, les valeurs de la fonction sont supérieures à G.

Théorème III. — *Si pour une fonction continue $f(x)$ on peut déterminer en chaque point d'un intervalle, à l'exception d'une masse discrète, une limite supérieure de Δx, de telle façon que $f(x + \Delta x) - f(x)$ ne puisse pas devenir négative (resp. positive), la différence $f(x + \Delta x) - f(x)$ ne sera jamais négative (resp. positive), aussi petit que soit $\Delta x > o$.*

Considérons d'après la première hypothèse le cours de la fonction dans un intervalle de x_0 à x_1 ; si la fonction ne croît pas partout entre x_0 et x_1, elle doit être dans tout l'intervalle constante, c'est-à-dire partout $f(x + \Delta x) - f(x) = o$, ou bien elle atteint dans un point entre x_0 et x_1, qui peut être égal à x_0, un maximum relatif. Pour cette valeur x on peut déterminer Δx de sorte que $f(x+\Delta x)-f(x)$ soit <0. Soit $-\eta$ la valeur de cette différence, si x tend vers o, η tend aussi vers o. Soit ε une valeur positive quelconque plus petite que η, on peut déterminer un endroit, $x+\Delta' x (\Delta' x < \Delta x)$, pour lequel $f(x+\Delta' x)-f(x)=-\varepsilon$, et $x+\Delta' x$ marque la place première entre $x+\Delta x$ et x, où l'égalité se trouve remplie. Il suit de là que

$$f(x+\Delta x)-f(x+\Delta' x) = -\eta+\varepsilon < 0,$$

pendant que Δx décroît jusqu'à $\Delta' x$.

Il serait possible que, par un choix déterminé de ε, la place $x+\Delta' x$ appartienne à la masse discrète, pour laquelle il n'est pas connu que la différence doive devenir ou égale ou plus grande que o; mais, comme ε prend toutes les valeurs entre o et η d'une manière continue, les points correspondants $x+\Delta' x$ doivent aussi parcourir des intervalles continus, dans lesquels il y a des points qui n'appartiennent pas à la masse discrète, pour lesquels la différence ne peut pas devenir négative. Il n'y a pas par conséquent, dans un intervalle quelconque de x_0 à x_1, de valeur maximale, la fonction ne décroît pas. Un cas spécial est :

Théorème IV. — *Une fonction continue qui dans un intervalle quelconque doit être constante partout, à l'exception d'une masse discrète, est constante dans tout l'intervalle, c'est-à-dire qu'elle possédera partout sans exception la même valeur.*

Théorème V. — *Toute la fonction continue $f(x)$, où l'on peut déterminer, à l'exception d'une masse discrète, en chaque place de l'intervalle de $x=a$ à $x=b$ une limite supérieure pour Δx, de sorte que*

$$\operatorname{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

soit plus petite qu'une petite valeur quelconque δ, sera constante dans tout l'intervalle.

Considérons la fonction $\psi(x)=\pm[f(x)-f(a)]-(x-a)\delta$, où δ est une valeur arbitrairement petite, on a

$$\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x} = \pm\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]-\delta \quad (\Delta x > 0).$$

La différence $\psi(x+\Delta x)-\psi(x)$ sera partout, à l'exception d'une masse discrète, négative; par conséquent, elle ne peut pas devenir positive d'après le théorème III. De plus $\psi(x)$ est une fonction, qui nulle part ne croît et qui, ayant pour $x=a$ la valeur o, ne sera nulle part positive. Dans tout l'intervalle on a alors

$$\text{abs}\,[f(x)-f(a)] < (x-a)\delta < (b-a)\delta$$

et, comme δ est une valeur aussi petite qu'on le veut, on a

$$f(x)=f(a).$$

Les fonctions, partout finies, qui dans un intervalle deviennent discontinues, peuvent se montrer à la place d'une discontinuité sous plusieurs formes. La discontinuité est premièrement *ponctuelle,* si à une place x $\lim f(x+\varepsilon)$ de même que $\lim f(x-\varepsilon)$ pour $\varepsilon=0$ possède une déterminée et même limite, mais la valeur de $f(x)$ diffère de cette limite ou est tout à fait indéterminée entre des limites finies. La différence entre la valeur de $f(x)$ ou les limites de l'indétermination (*Unbestimmtheitsgrenzen*) de cette valeur et entre les valeurs voisines doit s'appeler l'*oscillation* de la fonction. La fonction subit secondement un brusque changement déterminé dans ses valeurs, si $\lim f(x+\varepsilon)$ et $\lim f(x-\varepsilon)$ pour $\varepsilon=0$ prennent des valeurs déterminées, mais différentes entre elles. La différence de ces valeurs s'appelle l'*oscillation*. La fonction sera troisièmement complètement indéterminée à la place x, si une des limites ou toutes deux sont complètement indéterminées, ce qui est le cas, si $f(x\pm\varepsilon)$ possède un nombre infini de maxima et de minima, dont la différence n'est pas nulle. Soient G la valeur de la limite supérieure, qui ne doit pas être dépassée par les valeurs de la fonction, g la limite inférieure dans l'intervalle de x à $x+\varepsilon$; G peut, pendant que ε tend vers o, avec une diminution constante ou sans variation, atteindre une grandeur déterminée G', de même que g avec une progression constante une valeur g'. Ces valeurs G' et g' donnent les limites de l'indétermination de la fonction à la place x prise en avant; de la même manière on pourra déterminer les limites de l'indétermination G'' et g'' pour l'autre côté. Les valeurs extrêmes de ces quatre grandeurs déterminent la valeur du maxima et du minima à la place de discontinuité; leur différence donne l'oscillation de la fonction en cette place. Il est clair qu'une discontinuité ponctuelle peut se combiner avec les deux autres systèmes; dans ce cas, la différence des valeurs extrêmes est l'oscillation de la fonction.

Une fonction, qui est en général continue, mais en un nombre infini de places discontinue, est appelée *ponctuée discontinue* (*punktirt unstetig*); si les places ou les oscillations de la fonction sont plus grandes qu'un nombre fini quelconque δ, elles ne représentent toujours qu'une masse discrète de points.

Linéaire discontinue est une fonction dans laquelle ces points forment une masse linéaire.

On tire directement le théorème suivant de la définition de l'intégrale donnée par Riemann :

Théorème VI. — *Les fonctions ponctuées discontinues dans un intervalle sont intégrables, et inversement : chaque fonction partout finie et intégrable est ou partout continue ou ponctuée discontinue.*

On ne peut pas dire que, dans une fonction ponctuée discontinue, les points de discontinuité représentent, pris dans leur ensemble, une masse discrète; il se peut que dans chaque intervalle, si petit qu'il soit, une discontinuité se présente, ce qui est contre la nature même d'une masse discrète. Il n'y a que dans les places dans lesquelles les oscillations sont plus grandes qu'un petit nombre δ qu'on rencontre la masse discrète.

D'un autre côté, on saisit facilement qu'une fonction intégrable contiendra des endroits dans ses intervalles, si petits qu'ils soient, où elle est continue, quoique cette condition ne suffise pas pour rendre l'intégrabilité possible. En effet, soit δ un nombre petit à volonté, on laissera de côté toutes les places où les oscillations sont plus grandes que δ. Comme ces points représentent une masse discrète, on peut déterminer un point x dans un voisinage quelconque de chaque point, pour lequel l'inégalité

$$f(x \pm \theta h) - f(x) < \delta$$

sera remplie; h est une grandeur dépendante de δ et θ un nombre quelconque entre 0 et 1. On pourra dire aussi : dans un voisinage quelconque de chaque point, on peut déterminer un intervalle fini (de $x - h$ à $x + h$) pour lequel toutes les valeurs de la fonction diffèrent entre elles d'une valeur moindre qu'un petit nombre 2δ.

Si δ tend vers o, l'intervalle se réduit à un point, dans lequel la condition de continuité est remplie. Un tel point se trouve par conséquent dans un voisinage quelconque de tout point; c'est-à-dire dans chaque intervalle, si petit qu'il soit.

THÉORÈME VII. — *L'intégrale d'une fonction est déterminée dès que la fonction à intégrer est déterminée à l'exception des points discrets;* ou plus exactement: *deux fonctions intégrables donnent la même intégrale, si les places où elles diffèrent d'une grandeur plus grande que le petit nombre quelconque δ représentent une masse discrète.*

THÉORÈME VIII. — *Le quotient différentiel, pris en avant de l'intégrale finie*

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx,$$

est en général égal à $f(x)$. Les places où il diffère de cette valeur de plus qu'une grandeur δ quelconque, ou dans le cas où $f(x)$ est indéterminée, les places dans lesquelles la différence entre les limites de l'indétermination et le quotient différentiel est plus grande que δ, ou enfin les places où les limites de l'indétermination du quotient diffèrent de plus que δ des limites de la fonction représentent une masse discrète.

Dans l'intervalle d'intégration de a à b, représentons-nous tous les points de discontinuité, où les oscillations de la fonction intégrable $f(x)$ sont plus grandes qu'un petit nombre δ, renfermées dans un intervalle petit à volonté; x peut alors désigner chaque valeur dans un voisinage quelconque de tout point, et l'on a

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(x)dx.$$

Nous avons trois cas à considérer.

1° Ou bien la fonction est continue à la place x, et

$$\lim_{h=0} f(x+h)=f(x);$$

et alors le quotient différentiel pris en avant de $F(x)$ est égal à $f(x)$.

2° Ou $\lim f(x+h)$ a une limite déterminée $f(x+0)$; mais cette valeur diffère de la valeur $f(x)$ ou de la limite d'indétermination de cette valeur de moins de δ, et l'on a

$$F'(x) = f(x+0) = f(x) \pm (<\delta).$$

3° Ou enfin la fonction a, dans un voisinage quelconque de x pris en avant, un nombre infini de maxima et de minima; les oscillations resteront pourtant plus petites que δ. Soient G la limite supérieure, g la limite inférieure des valeurs de la fonction dans l'intervalle de x à $x+h$:

$$G > \frac{F(x+h) - F(x)}{h} > g$$

tend h vers 0; le quotient des différences n'a pas besoin de prendre une valeur déterminée, cependant il reste toujours entre G et g qui tendent vers G′ et g' dont la différence est plus petite que δ. Ce sont par conséquent les limites du quotient différentiel, dont la fonction diffère de moins de δ : toutes les places x, par lesquelles ces rapports n'ont pas de valeur, sont mises à part dès le commencement : elles sont discrètes.

Il est bon de remarquer que dans le dernier cas il peut encore se montrer pour $f(x)$ une discontinuité ponctuée, ce qui n'empêche pas la différence entre les valeurs extrêmes de $f(x)$ d'être plus petite que δ dans l'intervalle desquelles tombent les limites de l'indétermination du quotient différentiel.

Pour le quotient pris en arrière le même théorème subsiste.

Comme les places où la différence des valeurs $f(x+0)$ et $f(x-0)$ est plus grande que δ ou bien les valeurs extrêmes G′, g' et G″, g'' diffèrent de plus de δ ne peuvent représenter qu'une masse discrète de points, on reconnaîtra facilement que le quotient pris en avant ou en arrière de l'intégrale définie ne diffère entre elle qu'en des points discrets d'une valeur déterminable. Ils donnent la même intégrale, d'après le théorème VII, que la fonction $f(x)$.

Théorème IX (théorème fondamental du Calcul intégral). — *Soit* $F(x)$ *une fonction continue qui possède une dérivée partout finie et intégrable* $F'(x)$, *on a*

$$\int_a^x F'(x)\,dx - F(x) = \text{const.}$$

$F'(x)$ *peut représenter la dérivée de* $F(x)$ *de deux côtés et celui-ci naturellement peut être changé à volonté aux points discrets.*

Ces deux corollaires sont les suites immédiates du théorème VII et de la remarque à la fin du théorème VIII.

Soit $F'(x)$ la dérivée prise en avant, on pose

$$\varphi(x) = \int_a^x F'(x)\,dx - F(x)$$

et l'on a

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} F'(x)\,dx - \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Par suite du théorème précédent, on ne peut pas directement en des points discrets déterminer un Δx, pour lequel le côté droit de l'égalité soit plus petit que tout petit nombre. Il faut tout d'abord excepter les points où $F(x)$ ne possède aucune dérivée définie, dans lesquels les limites de l'indétermination de

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

diffèrent de plus de δ; puis les places où $F'(x)$ a une valeur déterminée, mais où $\lim_{h=0} F'(x+h)$ diffère avec $F'(x)$ de plus de δ. Mais tous ces points représentent, par suite de l'intégrabilité de $F'(x)$, une masse discrète. On peut alors conclure, d'après le théorème V, que la fonction continue $\varphi(x)$ est constante. Il s'ensuit que l'on fait reconnaître aux places singulières que le quotient

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

devient égal à zéro et l'on a :

Théorème X. — *Si une fonction continue* $F(x)$ *posssède dans un intervalle une dérivée* $F'(x)$ *partout finie et intégrable, la valeur du quotient des différences* $\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ *est égale à*

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} F'(x)\,dx,$$

c'est-à-dire qui est partout égale à une valeur qui se trouve *entre la plus grande et la plus petite des valeurs de* $F'(x)$ *dans l'intervalle de* x *à* $x+\Delta x$ *respectivement entre les limites extrêmes de l'indétermination de cette fonction, si petit que soit* Δx.

L'intégration de fonctions, qui deviennent dans un intervalle infinies ou indéfinies entre des limites infinies, demandent une définition spéciale, si les points d'infinité forment une masse infinie.

Quant à ce qui suit, il suffira de poser : si une fonction $f(x)$ devient infinie, dans un intervalle de a à x en un nombre infini de places, qui forment une masse discrète, on doit considérer sous l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$ la fonction continue de x qui pour $x=a$ devient égale à o et dont la dérivée en général, c'est-à-dire à l'exception des points discrets, diffère de la valeur $f(x)$ d'une petite quantité quelconque, moindre que δ, dans le cas où il existe une telle fonction.

Cette définition est déterminée ; car, d'après le théorème V, il ne peut pas y avoir deux fonctions continues différentes l'une de l'autre qui possèdent la qualité demandée.

Il n'est pas difficile de former un exemple de fonctions intégrables qui deviennent infinies dans des points discrets infiniment nombreux. La fonction

$$f(x)=\frac{d\left[x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^r\right]}{dx}=\left(\sin\frac{1}{x}\right)^r-r\,\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{r-1}\cos\frac{1}{x}$$

est une forme simple de cette espèce. Elle possède pour $0<r<1$, dans un intervalle si petit qu'il soit près de o, un nombre infini de points d'infinités.

Si une fonction à intégrer est infinie dans un intervalle dans des points discrets, le problème de l'intégration se trouve dans la preuve de l'existence d'une fonction continue ayant la qualité demandée.

Il est nécessaire pour ce qui suit de modifier un peu l'énoncé du théorème IX.

Une fonction $F(x)$, qui n'est nulle part, dans un intervalle, soumise à de brusques changements de valeurs (ce qui n'est pas suffisant pour déterminer la continuité, car elle peut être indéterminée entre des limites finies ou infinies, ou bien être déterminée et infinie), et dont la dérivée est partout connue comme une fonction finie et intégrable (à l'exception des points discrets), ne peut être déterminée et infinie ou indéterminée aux points discrets que si la valeur de la dérivée au rapprochement des points discrets croît en dehors de chaque limite.

En effet, soit x un point dans lequel la fonction $F(x)$ entre des limites finies ou infinies est indéterminée, ou bien déterminée et infinie pendant que dans l'intervalle de $x - h$ à x il n'y a aucun point singulier, on peut déterminer dans cet intervalle dans un voisinage quelconque de x deux places $x - \varepsilon$ et $x - \varepsilon + \Delta x$, telles que la valeur absolue de $\frac{F(x-\varepsilon+\Delta x) - F(x-\varepsilon)}{\Delta x}$ sera plus grande qu'un grand nombre quelconque K.

Le quotient est égal à

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\Delta x} F'(x)\,dx;$$

car, d'après l'hypothèse, il existe dans l'intervalle de $x - \varepsilon$ à $x - \varepsilon + \Delta x$ une dérivée partout finie et intégrable.

Il s'ensuit que la valeur absolue de la fonction $F'(x)$ ne peut pas être dans cet intervalle de l'intégration partout plus petit que le nombre K; que, par suite, les valeurs de la dérivée croissent en dehors de toute limite à l'approche des points discrets.

Ce résultat se trouve brièvement résumé de la façon suivante :

Théorème XI. — *Une fonction qui n'est soumise en aucune place d'un intervalle à de brusques changements de valeur et dont la dérivée, à l'exception des points discrets, est connue comme étant une fonction intégrable, dont la valeur absolue ne dépasse nulle part une valeur déterminée, est continue dans tout l'intervalle, et sa valeur est*

$$F(x) = \int F'(x)\,dx.$$

Il me reste à démontrer le théorème qui, depuis les recherches de Riemann, représente le fondement de la théorie des séries trigonométriques. Comme on sait, on a ce théorème : *Si l'on peut déterminer pour une fonction continue $f(x)$, dans tout intervalle de*

$x = a$ à $x = b$, une limite supérieure de Δx, telle que l'on ait

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}\right] < \delta,$$

$f(x)$ sera une fonction linéaire.

La preuve qu'a donnée M. Schwarz va trouver ici sa place.

On fait

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

$$\chi(x) = \pm\psi(x) - \frac{\delta}{2}(x) - a\,(b-x),$$

où δ représente un nombre positif aussi petit qu'on le veut; on aura alors

$$\frac{\chi(x+\Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \pm\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + \delta,$$

valeur qui peut être faite positive en chaque endroit x si l'on choisit une limite supérieure de Δx. Il s'ensuit que la fonction continue $\chi(x)$, qui aux confins de l'intervalle a la valeur o, ne peut être nulle part positive; car elle devrait prendre une valeur maximum en un endroit quelconque. Les places où ce maximum a lieu pourraient être innombrables.

Désignons par x la dernière place dans l'intervalle de a à b, à laquelle appartient ce maximum, il nous faut avoir

$$\chi(x+\Delta x) - \chi(x) < 0, \quad \chi(x-\Delta x) - \chi(x) \leqq 0,$$

et l'on aurait contre la supposition

$$\chi(x+\Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x-\Delta x) < 0.$$

Par conséquent, $\chi(x)$ est partout négatif, et

$$\text{abs}\,\psi(x) < \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x) < \frac{\delta}{2}(b-a)^2.$$

Comme δ est aussi petit que l'on veut, on aura

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)].$$

Dans le cas où la condition de ce théorème ne prévaut plus pour les points d'une masse discrète, on a le théorème suivant :

THÉORÈME XII. — *Une fonction continue $f(x)$, qui à chaque place d'un intervalle, à l'exception d'une masse discrète, possède pour Δx une limite supérieure, telle que l'on ait*

$$\operatorname{abs}\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}<\delta,$$

permettra de déterminer, dans un voisinage quelconque de chaque place, un intervalle de longueur finie, dans lequel $f(x)$ est une fonction déterminée et linéaire.

La fonction continue $f(x)$ est à considérer géométriquement comme une ligne formée de zigzags possédant autant qu'on le veut un nombre infini d'angles.

Il nous reste encore à poser la condition pour laquelle, dans le cas où elle est remplie, $f(x)$ sera exprimée par une seule fonction linéaire.

Pour les applications qui viennent, il importe de prouver que la condition suivante suffit. On doit avoir partout sans exception

$$\operatorname{abs}\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x}<\delta.$$

La fonction continue qui donne une ligne de zigzags est une intégrale, c'est-à-dire qu'elle possède une dérivée intégrable.

Car, après la mise à part des points discrets, il y a dans tous les intervalles une dérivée qui dans chaque intervalle est constante et par conséquent intégrable.

On peut donc poser, quand même la dérivée à l'approche des points discrets deviendrait infinie,

$$f(x)=\int^x f'(x)dx.$$

La nature de cette seconde condition est de faire disparaître les changements brusques de $f'(x)$ en chaque place; car on a

$$\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x}f'(x)dx+\int_x^{x-\Delta x}f'(x)dx\right].$$

Si les limites $\lim f'(x+\Delta x)$ et $\lim f'(x-\Delta x)$ ont des valeurs finies et déterminées par $\Delta x=0$, ces valeurs ne peuvent pas différer l'une de l'autre. Pour la fonction $f'(x)$, on connaît partout la valeur de la dérivée $f''(x) = 0$ (à l'exception des points discrets). On sait alors, d'après le théorème XI, que $f'(x)$ est une fonction continue, pour laquelle

$$f'(x) - f'(\alpha) = \int_\alpha^x f''(x)\,dx = 0$$

et, ce qu'il faut démontrer, $f'(x)$ est constante dans tout l'intervalle. Le résultat est le suivant :

Théorème XIII. — *Si $f(x)$ est une fonction continue, pour laquelle on peut déterminer* 1° *à chaque place d'un intervalle de a à b (excepté une masse discrète), une limite supérieure pour Δx, de sorte que l'on ait*

$$\operatorname{abs} \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} < \delta;$$

2° *faire partout sans exception*

$$\operatorname{abs} \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x} < \delta,$$

on aura

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)].$$

Très uni avec ce théorème se trouve le suivant :

Théorème XIV. — *Si l'on peut déterminer dans une fonction continue $F(x)$ à chaque place (excepté une masse discrète), une limite supérieure de Δx, telle que*

$$\frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x+\Delta x)}{\Delta x^2}$$

diffère d'une fonction intégrable $f(x)$ de moins que de tout petit nombre δ et que

$$\lim \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x+\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

pour chaque valeur de x, et si l'on désigne par $F_1(x)$ l'intégrale double

$$F_1(x) = \int_\beta^x dy \int_\alpha^y f(z)\,dz,$$

(α *et* β *sont des valeurs quelconques dans l'intervalle donné*), *la différence* $(\mathrm{F}\,x) - \mathrm{F}_1(x) = \varphi(x)$ *est une fonction linéaire de* x.

La fonction $\mathrm{F}_1(x)$ possede la première dérivée partout continue

$$\mathrm{F}'_1(x) = \int_\alpha^x f(z)\,dz.$$

Il s'ensuit, d'après un théorème connu sur double définition de la seconde dérivée d'une fonction, qu'on a

$$\lim \frac{\mathrm{F}_1(x+\Delta x) - 2\mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_1(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = f(x)$$

partout où $\lim f(x \pm \Delta x)$ prend une valeur déterminée pour $\Delta x = 0$.

On peut prouver ce théorème directement par l'égalité

$$\mathrm{F}_1(x) = \int_\beta^x f(y)(x-y)\,dy + \text{const.},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_1(x+\Delta x) - 2\mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_1(x-\Delta x) &= \int_0^{\Delta x} [f(x+\alpha) + f(x-\alpha)](\Delta x - \alpha)\,d\alpha \\ &= [f(x+\theta\Delta x) + f(x-\theta\Delta x)]\frac{\Delta x^2}{2}.\end{aligned}$$

Si l'on met à part les places appartenant à une masse discrète, dans lesquelles l'égalité de la fonction $f(x)$ avec la limite du quotient de la différence d'ordre 2 de la fonction $\mathrm{F}(x)$ n'est pas donnée; de plus, les places où les limites de l'indétermination de la fonction $f(x)$ diffèrent de plus de δ ou, dans le cas où $f(x)$ posséderait une valeur déterminée, où les oscillations de la fonction $f(x-\Delta x)$ et $f(x+\Delta x)$ sont plus grandes que δ, places qui, par suite de l'intégrabilité de $f(x)$, ne représentent qu'une masse discrète, on verra que $\varphi(x)$ remplit la condition du théorème XII, et que cette fonction doit être linéaire dans chaque intervalle séparé.

Elle remplit aussi la condition du théorème XIII, d'après l seconde supposition,

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi(x+\Delta x) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x} \\ &\quad = \frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - 2\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x-\Delta x)}{\Delta x} - \int_{x-\theta\Delta x}^{x+\theta\Delta x} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Les deux termes de droite tendent vers o avec Δx, le premier d'après l'hypothèse, le second puisque $f(x)$ est une fonction intégrable.

Donc $\varphi(x)$ est linéaire dans tout l'intervalle.

Un cas spécial de ce théorème est le suivant : *Si une fonction* $F(x)$ *a la propriété que*

$$\lim \frac{F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x)}{\Delta x^2}=f(x)$$

donne une fonction partout finie et intégrable, on a

$$\int_\beta^x dy\int_\alpha^y f(z)dz=[F(x)-F(\beta)]-(x-\beta)F'(\alpha),$$

même si l'on change la valeur de la fonction $f(z)$ *arbitrairement aux points discrets.*

Pour le cas où la fonction $f(x)$ devient infinie dans l'intervalle sans pourtant cesser d'être intégrable, l'équation précédente n'a de valeur que si

$$\lim \frac{F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

devient partout égale à zéro.

(*A suivre.*)