BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

A. KORKINE

Sur un problème d'interpolation (Extrait d'une lettre à M. Hermite)

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 228-242

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_228_1>

MÉLANGES.

SUR UN PROBLÈME D'INTERPOLATION

(Extrait d'une Lettre à M. HERMITE);

PAR M. A. KORKINE.

« Monsieur,

« Dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* de M. Darboux (tome II, 1871), M. Ermakof a publié un critérium de convergence des séries à termes positifs, qui est plus sensible que tous les critériums semblables connus jusqu'à présent.

» Il existe un certain problème d'interpolation lié avec ce critérium; c'est sur ce problème que je prends la liberté de vous présenter quelques réflexions.

» Soit ψx (1) une fonction ou une branche d'une fonction qui a une seule valeur pour chaque valeur de x. Nous ferons la même supposition par rapport à toutes les autres fonctions que nous allons considérer, en ayant toujours soin de choisir une branche conve-

(1) J'écris ψx au lieu de $\psi(x)$, pour ne pas embarrasser de parenthèses nos formules

nable, si plusieurs valeurs de la fonction correspondent à une même valeur de x.

» Soit encore $\psi_{-1}x$ la fonction inverse de ψx déterminée de manière qu'on ait

$$\psi_{-1}\psi x = \psi\psi_{-1}x = x.$$

» Convenons de représenter par les formules

$$\psi_1 x, \quad \psi_2 x, \quad \psi_3 x, \quad \ldots, \quad \psi_n x$$

respectivement les fonctions

$$\psi x, \quad \psi\psi x, \quad \psi\psi\psi x, \quad \ldots, \quad \psi\psi_{n-1}x,$$

et par les suivantes

$$\psi_{-2}x, \quad \psi_{-3}x, \quad \ldots, \quad \psi_{-n}x$$

les fonctions

$$\psi_{-1}\psi_{-1}x, \quad \psi_{-1}\psi_{-1}\psi_{-1}x, \quad \ldots, \quad \psi_{-1}\psi_{-n+1}x,$$

n étant un nombre entier positif.

» Conformément à cette notation, désignons aussi par $\psi_0 x$ la variable x elle-même.

» Alors, la fonction ψx étant donnée, on peut déterminer la valeur de $\psi_y x$ pour chaque valeur de x, y désignant un nombre entier positif ou négatif.

» Le problème d'interpolation que je viens de mentionner consiste dans la détermination de la fonction $\psi_y x$ pour toutes les valeurs de y, en l'assujettissant à satisfaire à l'équation

$$\psi_y \psi_z x = \psi_{y+z}x,$$

y et z étant des quantités quelconques.

» Comme nous supposons que ψx soit donnée, il faut que les valeurs de $\psi_y x$ pour les valeurs entières de y soient les mêmes que nous avons définies tout à l'heure.

» Avant d'aborder ce problème, nous déduirons une certaine identité qui nous servira dans la suite et qui conduit immédiatement au théorème de M. Ermakof.

» Soient $f(x)$ une fonction de x et a une constante; désignons aussi par la formule $\psi'_y x$ la dérivée $\frac{\partial \psi_y x}{\partial x}$.

» Cela posé, cette identité résultera, si l'on ajoute membre à membre celles qui suivent,

$$\int_a^{\psi a} f(x)\,dx = \int_a^{\psi a} f(x)\,dx, \quad \int_a^{\psi a} f(\psi x)\psi' x\,dx = \int_{\psi a}^{\psi_2 a} f(x)\,dx,$$

$$\int_a^{\psi a} f(\psi_2 x)\psi'_2 x\,dx = \int_{\psi_2 a}^{\psi_3 a} f(x)\,dx, \quad \ldots,$$

$$\int_a^{\psi a} f(\psi_{y-1} x)\psi'_{y-1} x\,dx = \int_{\psi_{y-1} a}^{\psi_y a} f(x)\,dx;$$

on aura ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^{\psi a} [f(x) + f(\psi x)\psi' x + f(\psi_2 x)\psi'_2 x + \ldots + f(\psi_{y-1} x)\psi'_{y-1} x]\,dx \\ &\quad = \int_a^{\psi_y a} f(x)\,dx. \end{aligned}\right.$$

» Pour en déduire le théorème de M. Ermakof, supposons qu'il soit donné une série

$$(2)\qquad f(0) + f(1) + f(2) + \ldots,$$

à termes positifs, et prenons la fonction ψx telle que la série

$$(3)\qquad f(x) + f(\psi x)\psi' x + f(\psi_2 x)\psi'_2 x + \ldots$$

soit également à termes positifs pour toutes les valeurs de x comprises entre a et ψa.

» Supposons aussi que pour les valeurs indéfiniment croissantes de y la quantité $\psi_y x$ soit positive et indéfiniment croissante, x étant compris entre a et ψa.

» Cela posé, considérons le rapport

$$\frac{f(\psi_y x)\psi'_y x}{f(\psi_{y-1} x)\psi'_{y-1} x} = \frac{f(\psi\psi_{y-1} x)\psi'\psi_{y-1} x}{f(\psi_{y-1} x)},$$

de deux termes consécutifs de la série (3), qui devient

$$(4)\qquad \frac{f(\psi z)\psi' z}{fz},$$

en faisant $\psi_{y-1} x = z$.

» Si le rapport (4) pour les valeurs infiniment grandes de z reste inférieur à une certaine quantité, qui est elle-même inférieure à l'unité, la série (3) est convergente et le premier terme de l'identité (1) sera fini quelque grand que soit y. Il en est de même du second terme, qui devient à la limite

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

» Or dans ce cas la série (2), d'après le théorème de Cauchy, est aussi convergente.

» Si le rapport (4) reste supérieur à l'unité, z étant infiniment grand, la série (3) est divergente et les deux termes de l'identité (1) seront infiniment grands pour les valeurs indéfiniment croissantes de y.

» Dans ce cas, en vertu du même théorème de Cauchy, la série (2) est divergente.

» M. Ermakof déduit de son théorème un remarquable caractère de convergence des séries, en faisant

$$\psi z = e^z.$$

» En revenant à notre problème, laissons à ψx la signification d'une fonction donnée quelconque.

» Nous allons chercher d'abord la forme que doit avoir la fonction $\psi_y x$, si elle est continue par rapport à x et y, au moins entre certaines limites. Nous supposons aussi que la dérivée $\frac{\partial \psi_y x}{\partial y}$ tende vers une limite déterminée lorsque y s'approche de zéro.

» Désignons cette limite par λx et différentions l'équation

$$\psi_z \psi_y x = \psi_{y+z} x$$

par rapport à z; nous aurons

$$\frac{\partial \psi_z \psi_y x}{\partial z} = \frac{\partial \psi_{y+z} x}{\partial z} = \frac{\partial \psi_{y+z} x}{\partial y},$$

ou, en faisant $\psi_y x = \xi$,

$$\frac{\partial \psi_z \xi}{\partial z} = \frac{\partial \psi_{y+z} x}{\partial y}.$$

» Posons $z = 0$ dans cette équation. Comme la dérivée $\frac{\partial \psi_z \xi}{\partial z}$ deviendra alors $\lambda \xi$ et que $\psi_{y+z} x$ sera ξ, il viendra

$$\lambda \xi = \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

» En désignant par $\varphi\xi$ l'intégrale

$$\int \frac{d\xi}{\lambda\xi},$$

on déduit de là

$$\varphi\xi = \varphi\psi_y x = y + \theta x,$$

θx étant une fonction de x.

» Il résulte de cette équation celle qui suit

$$\psi_y x = \varphi_{-1}(y + \theta x).$$

» En ayant égard à ce que $\psi_0 x = x$, on aura, pour $y = 0$,

$$x = \varphi_{-1}(\theta x);$$

par conséquent $\varphi_{-1} x$ et θx sont des fonctions inverses l'une de l'autre; θx ne diffère donc pas de φx.

» Ainsi la forme définitive de $\psi_y x$ peut être exprimée par la formule

$$\psi_y x = \varphi_{-1}(y + \varphi x). \tag{5}$$

» Pour que les valeurs de $\psi_y x$, qui correspondent aux valeurs entières de y, soient celles que nous avons définies précédemment, il faut et il suffit que la fonction φx satisfasse à l'équation

$$\varphi_{-1}(1 + \varphi x) = \psi x, \tag{6}$$

que l'on obtient en faisant $y = 1$ dans la précédente.

» Réciproquement, si l'équation (6) est satisfaite la formule (5) donnera une solution du problème proposé.

» En effet, on déduit de cette formule

$$\psi_z \psi_y x = \varphi_{-1}(z + \varphi\psi_y x),$$

et encore

$$\varphi\psi_y x = y + \varphi x;$$

donc on aura

$$\psi_z \psi_y x = \varphi_{-1}(z + y + \varphi x).$$

» Le second terme de cette équation représentant $\psi_{y+z} x$ en vertu de la même formule (5), il en résulte

$$\psi_z \psi_y x = \psi_{y+z} x,$$

y et z étant des quantités quelconques.

» Ainsi, puisque la condition (6) est remplie, la formule (5) donne effectivement une solution.

» De cette manière la recherche de la fonction $\psi_y x$ est réduite à celle de la fonction φx, qui ne dépend que d'une seule variable x.

» Proposons-nous maintenant de déduire toutes les valeurs de $\psi_y x$ lorsqu'une seule d'entre elles est connue.

» Soit φx la fonction qui détermine cette solution connue de notre problème, de sorte qu'elle soit donnée par la formule

$$\psi_y x = \varphi_{-1}(y + \varphi x).$$

» Toute autre solution peut être exprimée par l'équation

$$\psi_y x = \mu_{-1}(y + \mu x),$$

μx et $\mu_{-1} x$ étant des fonctions inverses, qui satisfont à la condition

$$\mu_{-1}(1 + \mu x) = \psi x.$$

» En supposant que y soit un nombre entier, ces deux formules représenteront la même quantité $\psi_y x$.

» Or on en déduit

$$\varphi\psi_y x = y + \varphi x, \quad \mu\psi_y x = y + \mu x,$$

par conséquent

$$\mu\psi_y x - \varphi\psi y x = \mu x - \varphi x.$$

» En remplaçant ici $\psi_y x$ par sa valeur

$$\varphi_{-1}(y + \varphi x),$$

nous aurons

$$\mu\varphi_{-1}(y + \varphi x) - \varphi\varphi_{-1}(y + \varphi x) = \mu\varphi_{-1}(y + \varphi x) - (y + \varphi x) = \mu x - \varphi x.$$

» Faisons $\varphi x = u$ et par conséquent $x = \varphi_{-1} u$; il viendra

$$\mu\varphi_{-1}(y + u) - (y + u) = \mu\varphi_{-1} u - u.$$

» La fonction $\mu\varphi_{-1} u - u$ est donc périodique ayant pour période l'unité, puisque y est un nombre entier arbitraire. En la désignant par σu, nous aurons

$$\mu\varphi_{-1} u = u + \sigma u,$$

ou, en remplaçant $\varphi_{-1} u$ par x et u par φx,

$$\mu x = \varphi x + \sigma\varphi x.$$

» Ainsi la fonction μx, qui donne une seconde solution, se déduit de la fonction φx, qui détermine la première, par l'addition à φx d'un terme $\sigma\varphi x$, σx étant une fonction périodique avec la période égale à l'unité.

» C'est la seule condition à laquelle doit satisfaire σx, car si l'on prend au lieu de φx la fonction

$$\mu x = \varphi x + \sigma\varphi x,$$

on obtient toujours une seconde solution.

» En effet, on a

$$\varphi\psi_y x = y + \varphi x,$$

et supposant que y soit un entier, il viendra

$$\sigma\varphi\psi_y x = \sigma(y + \varphi x) = \sigma\varphi x.$$

» Donc on aura

$$\varphi\psi_y x + \sigma\varphi\psi_y x = y + \varphi x + \sigma\varphi x,$$

ou bien

$$\mu\psi_y x = y + \mu x.$$

» Il résulte de là

$$\psi_y x = \mu_{-1}(y + \mu x).$$

» Ainsi la fonction $\psi_y x$ donnée par l'équation

$$\psi_y x = \varphi_{-1}(y + \varphi x)$$

est représentée aussi, pour les valeurs antérieures de y, par la formule

$$\mu_{-1}(y + \mu x).$$

» Cela étant, cette formule donne une solution lorsque y est une quantité quelconque, comme nous avons démontré. »

» Il suit de là qu'il suffit de trouver une seule solution de notre problème pour en déduire toutes les autres. En effet, $\psi_y x$ étant connue, on déterminera φx en résolvant par rapport à y l'équation

$$\psi_y a = x,$$

a étant une constante. La valeur de y en fonction de x, obtenue de cette manière, est la fonction φx, telle que

$$\varphi_{-1}(y + \varphi x) = \psi_y x,$$

comme il est facile de s'en assurer.

» Ayant φx, on trouvera toutes les solutions, comme il a été expliqué ci-dessus.

» Passons maintenant à la détermination de la fonction $\psi_y x$, lorsque ψx est donnée. On peut procéder en suivant deux méthodes : la première consiste dans la recherche de la fonction φx, dont on déduira $\psi_y x$; la seconde, dans le développement direct de $\psi_y x$ en série, sans déterminer préalablement φx.

» Si l'on veut chercher φx, il faut résoudre l'équation

$$\varphi_{-1}(1+\varphi x) = \psi x, \tag{6}$$

ou bien cette autre, qui lui est équivalente,

$$1+\varphi x = \varphi\psi x. \tag{7}$$

» On trouve l'équation (7) dans un Mémoire d'Abel (¹), où il réduit sa résolution à celle d'une équation ordinaire aux différences finies. Or, comme celle-ci n'est pas plus facile à résoudre que l'autre, sa solution étant la valeur de la fonction $\psi_y x$ pour une valeur particulière de x, j'essayerai de traiter directement l'équation (7).

» Soit $f(x)$ une fonction quelconque, mais telle que la série

$$\left\{\begin{aligned} &f(x)+f(\psi x)\psi' x+f(\psi_2 x)\psi'_2 x+f(\psi_3 x)\psi'_3 x+\ldots\\ &\qquad +f(\psi_{-1} x)\psi'_{-1} x+f(\psi_{-2} x)\psi'_{-2} x+f(\psi_{-3} x)\psi'_{-3} x+\ldots\end{aligned}\right. \tag{8}$$

soit convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre certaines limites.

» Comme la fonction $\psi_y x$ est connue, tant que y est un nombre entier, si l'on a choisi la fonction $f(x)$, on peut, pour une valeur donnée de x, déterminer la valeur de chaque terme de la série (8), et par conséquent celle de la somme d'autant de termes qu'on voudra.

» La somme de la série (8), que nous allons désigner par $\omega(x)$, est une fonction de x, qui satisfait évidemment à l'équation

$$\omega(\psi x)\psi' x = \omega(x). \tag{9}$$

» En prenant une constante C et la valeur de x comprises entre

(¹) *Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable* (*Œuvres complètes*, t. II).

les limites de convergence de la série (8), faisons

$$\theta(x)=\int_{\delta}^{x}\omega(x)\,dx,$$

et nous aurons, en vertu de l'équation (9),

$$(10)\qquad \theta(\psi x)=\theta(x)+\mathrm{C},$$

C étant une constante déterminée, exprimée par la différence $\theta(\psi x)-\theta(x)$.

» En faisant

$$\frac{1}{\mathrm{C}}\,\theta(x)=\varphi x,$$

l'équation (10) deviendra

$$\varphi\psi x=\varphi x+1,$$

et la fonction φx est donc $\frac{1}{\mathrm{C}}\,\theta(x)$.

» Si l'on peut assigner une quantité a, de telle façon que la série (8) soit convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre a et ψa, il est possible de déterminer la constante C indépendamment de la fonction $\theta(x)$.

» En effet, d'après l'identité (1), on a

$$\int_{a}^{\psi a}[f(x)+f(\psi x)\psi' x+f(\psi_2 x)\psi'_2 x+\ldots$$
$$+f(\psi_{y-1}x)\psi'_{y-1}x]\,dx=\int_{a}^{\psi_y a}f(x)\,dx.$$

» On aura de la même manière

$$\int_{a}^{\psi a}[f(\psi_{-1}x)\psi'_{-1}x+f(\psi_{-2}x)\psi'_{-2}x+\ldots$$
$$+f(\psi_{-z}x)\psi'_{-z}x]\,dx=\int_{\psi_{-z}a}^{a}f(x)\,dx.$$

» En ajoutant ces deux identités terme à terme, on aura

$$\int_{a}^{\psi a}[f(x)+f(\psi x)\psi' x+f(\psi_2 x)\psi'_2 x+\ldots+f(\psi_{y-1}x)\psi'_{y-1}x$$
$$+f(\psi_{-1}x)\psi'_{-1}x+f(\psi_{-2}x)\psi'_{-2}x+\ldots+f(\psi_{-z}x)\psi'_{-z}x]\,dx$$
$$=\int_{\psi_{-z}a}^{\psi_y a}f(x)\,dx.$$

» Supposons maintenant les entiers y et z infiniment grands et passons à la limite; comme celle du premier terme est

$$\int_a^{\psi a} \omega(x)\,dx = \theta(\psi a) - \theta(a) = C,$$

nous aurons

$$C = \int_{\lim \psi_{-z} a}^{\lim \psi_y a} f(x)\,dx.$$

» Quant au choix convenable de la fonction $f(x)$, nous ne nous en occuperons pas ici, cette question dépendant de la nature de la fonction ψx.

» Le second moyen de déterminer $\psi_y x$ est son développement en série suivant les puissances croissantes entières et positivesde la différence $x - \alpha$, α étant une racine de l'équation

$$\psi x = x.$$

» Je suppose que la fonction ψx soit aussi développable en une semblable série. Je ne discuterai point la possibilité de ces développements; en les supposant possibles, je me propose seulement de déterminer les coefficients de la série exprimant $\psi_y x$ en fonction de ceux de la série qui représente ψx.

» Il est évident que, en vertu de l'équation

$$\psi \alpha = \alpha,$$

on aura

$$\psi_y \alpha = \alpha$$

pour toutes les valeurs entières de y.

» Si y n'est pas un entier, on peut faire

$$y = m + \lambda,$$

m étant un nombre entier et $\lambda < 1$. Comme on a

$$\psi \psi_\lambda \alpha = \psi_\lambda \psi \alpha = \psi_\lambda \alpha,$$

la quantité $\psi_\lambda \alpha$ est une racine de l'équation $\psi x = x$.

» Or on a de même

$$\psi_y \alpha = \psi_{m+\lambda} \alpha = \psi_\lambda \psi_m \alpha = \psi_\lambda \alpha;$$

donc $\psi_y \alpha$ est aussi une racine de cette équation.

» En supposant que $\psi_y x$ soit une fonction continue de y dans le voisinage de la valeur $y = 0$ et en admettant la possibilité des séries mentionnées, il faut qu'on ait $\psi_y \alpha = \alpha$ pour des valeurs quelconques de y.

» Soit maintenant

$$\psi x = \alpha + A_0(x-\alpha) + A_1(x-\alpha)^2 + A_2(x-\alpha)^3 + \ldots$$

le développement de ψx. Nous considérons les coefficients

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots,$$

ainsi que α, comme connus, et nous allons nous borner au cas le plus ordinaire, en supposant que A_0 ne soit pas nul.

» En vertu de ce que $\psi_y \alpha = \alpha$, le développement de $\psi_y x$ sera de la forme

$$(a) \qquad \psi_y x = \alpha + \alpha_0(x-\alpha) + \alpha_1(x-\alpha)^2 + \alpha_2(x-\alpha)^3 + \ldots.$$

» Les coefficients

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots$$

sont des fonctions de y, telles que pour $y = 0$ on a

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0,$$

car $\psi_0 x = x$, et pour $y = 1$ on a

$$\alpha_0 = A_0, \quad \alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = A_2, \quad \ldots,$$

puisque $\psi_1 x = \psi x$.

» Pour déduire les valeurs générales des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, on peut procéder de différentes manières.

» D'après la forme $\varphi_{-1}(y + \varphi x)$ de la fonction $\psi_y x$, il est évident que le rapport

$$\frac{\partial \psi_y x}{\partial y} : \frac{\partial \psi_y x}{\partial x}$$

est égal à $\frac{1}{\varphi' x} = \lambda x$. Donc on aura

$$\frac{\partial \psi_y x}{\partial y} = \frac{\partial \psi_y x}{\partial x} \cdot \lambda x.$$

» Le développement de λx étant de la forme

$$\lambda x = \beta_0(x-\alpha) + \beta_1(x-\alpha)^2 + \beta_2(x-\alpha)^3 + \ldots,$$

l'équation précédente fournit l'identité

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}(x-\alpha) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(x-\alpha)^2 + \ldots$$
$$= [\alpha_0 + 2\alpha_1(x-\alpha) + 3\alpha_2(x-\alpha)^2 + \ldots][\beta_0(x-\alpha) + \beta_1(x-\alpha)^2 + \ldots].$$

» En comparant les coefficients des mêmes puissances de $x-\alpha$ dans les deux termes, on en déduira ces équations

$$\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}=\beta_0\alpha_0,\quad \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}=2\beta_0\alpha_1+\beta_1\alpha_0,\quad \ldots.$$

» De la première il suit

$$\alpha_0=Ce^{\beta_0 y},$$

C étant une constante. Or pour $y=0$ on a $\alpha_0=1$, et pour $y=1$, $\alpha_0=A_0$; donc

$$C=1,\quad \beta_0=\log A_0,\quad \alpha_0=A_0^y.$$

» De la même manière, de l'équation

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}=2\beta_0\alpha_1+\beta_1\alpha_0,$$

il résulte

$$\alpha_1=A_1A_0^{y-1}\frac{A_0^y-1}{A_0-1},$$

et ainsi de suite.

» On parvient plus directement aux valeurs des coefficients $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$, comme il suit.

» On a l'identité

(11) $$\psi_y\psi x-\alpha=\psi\psi_y x-\alpha.$$

» En ayant égard aux développements de ψx et $\psi_y x$, il vient

$$\psi_y\psi x-\alpha=\alpha_0(\psi x-\alpha)+\alpha_1(\psi x-\alpha)^2+\alpha_2(\psi x-\alpha)^3+\ldots,$$
$$\psi\psi_y x-\alpha=A_0(\psi_y x-\alpha)+A_1(\psi_y x-\alpha)^2+A_z(\psi_y x-\alpha)^3+\ldots.$$

» Or, en désignant $x-\alpha$, pour abréger, par z, on a

$$\psi x-\alpha=A_0z+A_1z^2+A_2z^3+\ldots,$$
$$\psi_y x-\alpha=\alpha_0z+\alpha_1z^2+\alpha_2z^3+\ldots;$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}\psi_y\psi x-\alpha={}&\alpha_0(A_0z+A_1z^2+A_2z^3+\ldots)\\&+\alpha_1(A_0z+A_1z^2+A_2z^3+\ldots)^2+\alpha_2(A_0z+A_1z^2+\ldots)^3+\ldots,\\ \psi\psi_y x-\alpha={}&A_0(\alpha_0z+\alpha_1z^2+\alpha_2z^3+\ldots)\\&+A_1(\alpha_0z+\alpha_1z^2+\alpha_2z^3+\ldots)^2+A_2(\alpha_0z+\alpha_1z^2+\ldots)^3+\ldots.\end{aligned}$$

» En vertu de l'identité (11), ces deux développements sont égaux. En comparant les coefficients des mêmes puissances de z, on aura les équations pour déterminer successivement α_1, α_2, α_3, α_4, ..., la quantité α_0 étant trouvée et égale à A_0^y.

» Ces équations sont

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_1\alpha_0 + A_0^2\alpha_1 = A_0\alpha_1 + A_1\alpha_0^2,\\
&A_2\alpha_0 + 2A_0A_1\alpha_1 + A_0^3\alpha_2 = A_0\alpha_2 + 2A_1\alpha_0\alpha_1 + A_2\alpha_0^3,\\
&A_3\alpha_0 + (2A_0A_2 + A_1^2)\alpha_1 + 3A_0^2A_1\alpha_2 + A_0^4\alpha_3\\
&\quad = A_0\alpha_3 + A_1(2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2) + 3A_2\alpha_0^2\alpha_1 + A_3\alpha_0^4,\\
&A_4\alpha_0 + 2(A_0A_3 + A_1A_2)\alpha_1 + 3(A_0^2A_2 + A_0A_1^2)\alpha_2 + 4A_0^3A_1\alpha_3 + A_0^5\alpha_4\\
&\quad = A_0\alpha_4 + 2A_1(\alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) + 3A_2(\alpha_0^2\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1^2) + 4A_3\alpha_0^3\alpha_1 + A_4\alpha_0^5,
\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

» On en déduit facilement, en ayant égard à la valeur,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= A_0^y,\\
\alpha_1 &= A_1A_0^{y-1}\,\frac{A_0^y - 1}{A_0 - 1},\\
\alpha_2 &= 2A_1^2A_0^{y-1}\,\frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)}{(A_0 - 1)(A_0^2 - 1)} + A_2A_0^{y-1}\,\frac{A_0^{2y} - 1}{A_0^2 - 1},\\
\alpha_3 &= A_1^3A_0^{y-2}\,\frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(A_0 + 5)A_0^y - 5A_0^2 - 1]}{(A_0 - 1)(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)}\\
&\quad + A_1A_2A_0^{y-1}\,\frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(3A_0 + 5)A_0^y + (5A_0 + 2)]}{(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)}\\
&\quad + A_3A_0^{y-1}\,\frac{A_0^{3y} - 1}{A_0^3 - 1},\\
\alpha_4 &= 2A_1^4A_0^{y-1}\,\frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)(A_0^{y-2} - 1)[(2A_0^2 + 3A_0 + 7)A_0^y - (7A_0^3 + 2A_0 + 3)]}{(A_0 - 1)(A_0^2 - 1)(A_0^3 -)(A_0^4 - 1)}\\
&\quad + A_1^2A_2A_0^{y-2}\,\frac{\left\{\begin{aligned}&(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(3A_0^3 + 14A_0^2 + 20A_0 + 21)A_0^{2y}\\ &\qquad + (-9A_0^4 - 15A_0^3 + 2A_0^2 + 9A_0 + 1)A_0^y\\ &\qquad - (21A_0^4 + 12A_0^3 + 6A_0^2 + 5A_0 + 2)]\end{aligned}\right\}}{(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)(A_0^4 - 1)}\\
&\quad + 2A_1A_3A_0^{y-1}\,\frac{\left\{\begin{aligned}&(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(2A_0^2 + 2A_0 + 3)A_0^{2y}\\ &\qquad + (2A_0^2 + 3A_0 + 1)A_0^y + 3A_0^2 + A_0 + 1]\end{aligned}\right\}}{(A_0^3 - 1)(A_0^4 - 1)}\\
&\quad + 3A_2^2A_0^y\,\frac{(A_0^{2y} - 1)(A_0^{2y-2} - 1)}{(A_0^2 - 1)(A_0^4 - 1)} + A_4A_0^{y-1}\,\frac{A_0^{4y} - 1}{A_0^4 - 1},
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

» On peut vérifier ces expressions, en remarquant que, si l'on prend pour y un entier positif arbitraire et pour A_0 une racine de l'unité de degré quelconque, les valeurs de α_1, α_2, α_3, ... ne deviennent point infinies.

» Les équations (12) déterminent aussi les coefficients β_1, $\beta_2, \ldots$, du développement de la fonction $\lambda x = \frac{1}{\varphi' x}\cdot$ En effet, nous avons vu que la dérivée

$$\frac{\partial \psi_y x}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial y}(x-\alpha) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(x-\alpha)^2 + \ldots$$

devient λx, pour $y=0$; donc les quantités $\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}, \ldots$, pour $y=0$, ont respectivement les valeurs $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$.

» Différentions donc par rapport à y les équations (12) et faisons ensuite $y=0$ dans les équations que nous allons ainsi obtenir.

» En remarquant que α_0 se réduira à l'unité et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ s'évanouiront, on obtient

$$\begin{aligned}
A_1\beta_0 + A_0^2\beta_1 &= A_0\beta_1 + 2A_1\beta_0,\\
A_2\beta_0 + 2A_0A_1\beta_1 + A_0^3\beta_2 &= A_0\beta_2 + 2A_1\beta_1 + 3A_2\beta_0,\\
A_3\beta_0 + (2A_0A_2 + A_1^2)\beta_1 + 3A_0^2A_1\beta_2 + A_0^4\beta_3 &= A_0\beta_3 + 2A_1\beta_2 + 3A_2\beta_1 + 4A_3\beta_0,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

» Or nous avons trouvé $\beta_0 = \log A_0$; par conséquent,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{A_1}{A_0(A_0-1)}\log A_0,\\
\beta_2 &= \frac{2(A_0A_2 - A_1^2)}{A_0^2(A_0-1)(A_0+1)}\log A_0,\\
\beta_3 &= \frac{3A_0^2(A_0+1)A_3 - (8A_0+7)A_0A_1A_2 + (5A_0+4)A_1^3}{A_0^3(A_0^3-1)(A_0+1)}\log A_0,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. En faisant dans la série (a) $\alpha=0$ et $A_0=1$, on aura, comme cas particulier, celle qui a été obtenue par M. Cayley (*Quarterly Journal*, t. III) et mentionnée depuis par M. Schröder (*Mathematische Annalen*, t. III).

» Je dois réclamer toute votre bienveillance, Monsieur, pour les considérations précédentes, qui ont tant de défauts et je m'estimerai très heureux si elles peuvent jeter quelque jour sur le problème en question.

» C'est en espérant qu'elles peuvent servir aux géomètres, qui s'occuperont du même problème, que je vous prie, Monsieur, de vouloir bien faire paraître un extrait de cette Lettre dans le *Bul-*

letin de M. Darboux, où est aussi inséré le Mémoire de M. Ermakof.

» Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mon profond respect.

« A. KORKINE. »

1er mai 1882.