BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 225-228

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_225_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. KŒNIGS, ancien Élève de l'École Normale supérieure. — SUR LES PROPRIÉTES INFINITÉSIMALES DE L'ESPACE RÉGLÉ. — Thèse présentée à la Sorbonne. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

C'est à Plücker qu'on rapporte généralement les fondements de la théorie de l'*espace réglé,* c'est-à-dire, de celui dont la ligne droite est l'élément. L'usage d'un système particulier de coordonnées, qu'il imagina, lui permit de faire reposer cette théorie sur les propriétés des complexes linéaires et de lui donner pour la première fois un développement systématique. D'éminents géomètres l'ont suivi dans cette voie : nous citerons M. Klein, qui a montré tout le parti qu'on peut tirer des coordonnées plückériennes et de leurs transformations linéaires.

Mais, dans l'étude des systèmes de droites, Plücker avait eu des précurseurs, entre autres, Monge, Malus, Hamilton, Sturm, Kummer, Möbius, Chasles. De plus, dans ces derniers temps, par des raisonnements divers, M. Lie est parvenu à montrer l'identité d'un complexe général avec le système géométrique qui accompagne certaines équations aux dérivées partielles. Tout portait donc à penser qu'on pouvait établir sur des bases profondes, indépendantes des coordonnées, grâce à l'étude directe du déplacement d'une ligne droite, toutes les propriétés infinitésimales de l'espace réglé : en un mot, il y avait lieu de chercher à appliquer à l'espace, ou variété, à quatre dimensions dont la droite est l'élément, la méthode dont Gauss a indiqué le premier l'usage, pour l'espace ponctuel.

L'auteur du présent Mémoire est parvenu à reconnaître que, dans l'espace réglé comme dans l'espace ponctuel, comme dans l'espace tangentiel, comme dans celui dont la sphère est l'élément, *toute propriété infinitésimale s'exprime par une propriété d'involution.*

M. Kœnigs commence par définir certains éléments primordiaux qui paraissent nécessaires et suffisants pour exprimer par leurs relations mutuelles les propriétés infinitésimales.

Un point a et un plan α mené par ce point forment un *couple* (a, α).

Parmi les couples en nombre ∞^2 qui sont situés sur une droite A (c'est-à-dire, dont le point est sur la droite A, contenue elle-même sur le plan α), il y en a une simple infinité (∞^1) qui vérifient une condition donnée : leur ensemble constitue une corrélation. Si la condition consiste en l'égalité des rapports anharmoniques des quatre points et les quatre plans de quatre couples quelconques de la corrélation, la corrélation est dite *anharmonique*. En vertu du théorème de M. Chasles sur la distribution des plans tangents dans les surfaces réglées, à toute droite infiniment voisine d'une droite A correspond une corrélation anharmonique sur cette droite A :

« *Ainsi, de même qu'un point de l'espace infiniment voisin d'un point fixe définit une direction issue de ce point fixe, et inversement, que dans une foule de questions la considération de cette direction peut être substituée à celle du point voisin, de même, dans l'espace réglé, une droite infiniment voisine d'une droite définit sur elle une corrélation anharmonique dont l'usage peut réciproquement être substitué à celui de la droite infiniment voisine, au moins dans certaines questions.* »

L'étude du déplacement d'une ligne droite infiniment voisine comprend donc tout d'abord celle des corrélations anharmoniques, en nombre ∞^3, qui existent sur la position initiale de la droite.

Si u_1, u_2, u_3, u_4 sont les paramètres dont dépend la connaissance d'une droite (u), et $u_i + du_i$ ceux qui se rapportent à une droite voisine $(u + du)$, l'évanouissement d'une forme homogène $f(du)$ des différentielles du exprime une propriété du système de droites (u) et $(u + du)$ et, par suite, de la corrélation qu'elles déterminent sur l'une d'elles (u). On peut même considérer les différentielles, du, ou des quantités finies t proportionnelles à ces différentielles, comme des coordonnées homogènes des diverses corrélations anharmoniques qui existent sur la droite (u).

Parmi ces corrélations, celles qui annulent une ou deux formes de coordonnées t constituent un *réseau* ou une *série* de corrélations. Ces réseaux et ces séries remplacent évidemment les cônes de directions élémentaires dans l'espace ponctuel.

Dans ce dernier espace, parmi les formes des différentielles, il en est une qui se distingue spécialement : c'est celle qui représente le carré ds^2 de la distance élémentaire. Ici aussi, M. Kœnigs trouve qu'une forme quadratique *fondamentale* joue un rôle prépondérant.

La condition de rencontre de deux droites (u), $(u + du)$, s'exprime par l'évanouissement d'une forme quadratique $N(du)$: il est clair que toutes les formes telles que $KN(du)$, où K est seulement fonction des variables u, expriment par leur évanouissement la même propriété. L'auteur remarque qu'il est possible de choisir K, de sorte que la forme qui en résulte représente le *moment* des deux droites (u), $(u + du)$, c'est-à-dire, le produit de leur plus courte distance par le sinus de leur angle; et c'est cette forme qui remplace le ds^2 de l'espace ponctuel. Les angles, l'orthogonalité se définissent par les mêmes formations covariantes. Il en résulte d'intéressantes analogies avec l'espace ponctuel.

Après avoir établi les propriétés infinitésimales du premier ordre, M. Kœnigs en fait diverses applications au théorème de Sturm sur les pinceaux, et à un mode particulier de représentation linéaire des surfaces, sur lequel M. Darboux, dans son cours de la Sorbonne, avait donné des indications dont l'auteur déclare avoir profité. Enfin, dans une dernière application, on examine un système de coordonnées, dans lequel les complexes linéaires offrent les propriétés des sphères, et l'on en déduit un système analogue aux coordonnées pentasphériques, dont les coordonnées plückériennes et le système sextuplement orthogonal de M. Klein sont des cas particuliers.

La troisième Partie du Mémoire est consacrée aux propriétés infinitésimales du second ordre. Le premier problème traité est une extension de la théorie des géodésiques et conduit à une interprétation géométrique des coordonnées appelées *normales* par M. Lipschitz.

A et B étant deux droites d'un système réglé (espace réglé, complexe ou congruence), il s'agit de trouver une surface réglée faisant partie du système, passant par A et B, et telle que l'intégrale

$$I = \int_A^B \sqrt{M(du)}$$

ait sa première variation nulle : $M(du)$ représentant la forme fondamentale. On arrive à ce résultat curieux : *Les hélicoïdes gauches sont les surfaces géodésiques de l'espace réglé.*

L'analogie précédemment reconnue entre les complexes linéaires et les sphères permet de définir les hyperboloïdes osculateurs d'une congruence, ou d'un complexe. Ici encore, le moment élémentaire $M(du)$ sert de lien aux diverses propriétés du second ordre. Ainsi, après avoir déterminé exactement le rôle du cône de Malus, elle montre que *les propriétés du second ordre sont identiques avec celles d'un faisceau de cônes du second degré dont fait partie le cône de Malus.*