G. DARBOUX

Sur le problème de Pfaff

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 14-36

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_14_1>

MÉLANGES.

SUR LE PROBLÈME DE PFAFF;

PAR M. G. DARBOUX.

La méthode que Pfaff a fait connaître en 1814, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin,* pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes, a été longtemps négligée : les belles découvertes de Jacobi et de Cauchy ont seules attiré l'attention des géomètres qui s'occupent de cette théorie.

Cependant, la méthode de Pfaff, qui est, d'ailleurs, la généralisation de celle que l'on doit à Lagrange pour le cas de deux variables indépendantes, offre de sérieux avantages. Elle substitue à des calculs souvent compliqués l'emploi de certaines identités différentielles qui donnent la clef et la solution intuitive des difficultés qui se présentent dans les autres méthodes. Les beaux résultats obtenus par M. Lie dans différents Mémoires insérés aux *Mathematische Annalen* montrent tout le parti qu'on peut tirer de ces identités, par exemple si l'on veut réduire au plus petit nombre possible les intégrations que l'on a à effectuer successivement avant de parvenir à la solution complète d'une équation aux dérivées partielles.

Dans le travail qu'on va lire, je me suis proposé d'expliquer la solution du problème de Pfaff sans rien emprunter à la théorie des équations aux dérivées partielles, et je me suis surtout attaché à mettre en évidence les propriétés d'invariance qui jouent un rôle fondamental dans cette solution. Je ne me suis nullement occupé des intégrations qui sont nécessaires pour amener une expression différentielle à sa forme réduite, et d'ailleurs, d'après les formules que j'ai données, les opérations que l'on doit faire pour obtenir la solution de ce problème peuvent se calquer en quelque sorte sur celles qui se rapportent à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles.

Dans la première Partie j'étudie les formes réduites, et je montre que l'intégration du premier système de Pfaff suffit et donne immédiatement la forme réduite quand il s'agit de l'expression différentielle correspondante à une équation aux dérivées partielles.

Dans la seconde Partie j'étudie les relations entre les formes réduites, et je démontre en particulier trois propositions qui servent de base à la théorie des groupes de M. Lie (1).

---

(1) La première Partie de ce travail a été écrite en 1876 et communiquée à M. Bertrand, qui enseignait alors au Collège de France la théorie des équations aux dérivées partielles. M. Bertrand a bien voulu exposer la méthode que je lui avais soumise, dans sa première leçon de janvier 1877.

Quelque temps après paraissait dans le *Journal de Borchardt* un beau Mémoire de M. Frobenius qui porte d'ailleurs une date antérieure à celle de janvier 1877 (septembre 1876) et où ce savant géomètre suit une marche assez analogue à celle que j'ai communiquée à M. Bertrand, en ce sens qu'elle repose sur l'emploi des invariants et du covariant bilinéaire de M. Lipschitz. En revenant dans ces derniers temps sur mon travail, il m'a semblé que mon exposition était plus affranchie de calcul et que, par suite de l'importance que la méthode de Pfaff est appelée à prendre, il y avait intérêt à la faire connaître.

Dans la même année 1877 a paru aussi, dans l'*Archiv for Mathematik* de Christiania, un important Mémoire de M. Lie sur le même sujet (t. II, p. 338). Mais ce travail repose sur des méthodes tout à fait différentes de celle que je vais exposer.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Considérons l'expression différentielle

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n,$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, \ldots, x_n$. Nous la désignerons par la notation Θ_d, où l'indice d indique le système de différentielles adopté. Ainsi l'on aura

$$\Theta_d = X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n, \tag{1}$$

et si l'on emploie d'autres différentielles désignées par la caractéristique δ

$$\Theta_\delta = X_1\, \delta x_1 + \ldots + X_n\, \delta x_n. \tag{2}$$

Des deux égalités précédentes on déduit

$$\delta\Theta_d = \sum \delta X_i\, dx_i + \sum X_i\, \delta dx_i,$$

$$d\Theta_\delta = \sum dX_i\, \delta x_i + \sum X_i\, d\delta x_i,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta\Theta_d - d\Theta_\delta &= \sum (\delta X_i\, dx_i - dX_i\, \delta x_i)\\ &= \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)(dx_i\, \delta x_k - dx_k\, \delta x_i),\end{aligned}$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons des indices $1, 2, \ldots n$, et se composant, par conséquent, de $\frac{n(n-1)}{2}$ termes. Nous poserons, pour abréger,

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \tag{3}$$

et l'égalité précédente deviendra

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_i \sum_k a_{ik}(dx_i\, \delta x_k - dx_k\, \delta x_i). \tag{4}$$

En vertu des identités

$$a_{ik}+a_{ki}=0, \quad a_{ii}=0$$

qui découlent de la formule (3), on peut encore écrire l'équation (4) sous la forme

$$(4\ bis) \qquad \delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k.$$

Supposons maintenant que dans l'expression différentielle (1) on remplace les variables x_i par d'autres variables y_i; en effectuant la substitution définie par les formules

$$(5) \qquad x_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_n),$$

qui donnent

$$dx_i = \sum \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\,dy_k,$$

l'expression Θ_d prendra la forme

$$(6) \qquad \Theta_d = \sum Y_i\,dy_i.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que les n fonctions ψ_i soient indépendantes; par suite, les nouvelles variables y_i pourront être regardées comme fonctions indépendantes des anciennes, x_i. Quant aux coefficients Y_i, on peut toujours, par l'emploi des formules (5), les transformer en des fonctions des variables y_i.

Cela posé, appliquons la formule (4) à la nouvelle expression de Θ_d. Si nous posons

$$(7) \qquad b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i},$$

nous aurons

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}\,dy_i\,\delta y_k,$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}\,dy_i\,\delta y_k.$$

Cette formule est fondamentale dans notre théorie; aussi, avant de continuer, nous en donnerons une démonstration directe sans nous appuyer sur la propriété exprimée par l'équation

$$d\delta x_i = \delta d x_i,$$

dont nous avons fait usage.

De la comparaison des expressions (1) et (6) de Θ_d on déduit les égalités

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial y_k} = Y_k,$$

qui servent de définition aux quantités Y_k. On déduit de là

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = \sum_\alpha X_\alpha \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y_k \partial y_i} + \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_k} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_i},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} - \frac{\partial X_{\alpha'}}{\partial x_\alpha} \right) \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_k} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_i} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_k} \right),$$

la somme du second membre étant étendue à tous les systèmes de valeurs différentes de α, α' et comprenant, par conséquent, $\frac{n(n-1)}{2}$ termes.

Si l'on multiplie l'équation précédente par $dy_i\,\delta y_k - dy_k\,\delta y_i$, et que l'on fasse la somme des $\frac{n(n-1)}{2}$ équations ainsi obtenues, le coefficient de

$$\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} - \frac{\partial X_{\alpha'}}{\partial x_\alpha}$$

dans le second membre sera

$$\sum_i \sum_k \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_k} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_i} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_k} \right) (dy_i\,\delta y_k - dy_k\,\delta y_i),$$

c'est-à-dire

$$dx_{\alpha'}\,\delta x_\alpha - dx_\alpha\,\delta x_{\alpha'}.$$

On aura donc

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}-\frac{\partial Y_k}{\partial y_i}\right)(dy_i\,\delta y_k-dy_k\,\delta y_i)\\ &\quad=\sum_\alpha\sum_{\alpha'}\left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_{\alpha'}}-\frac{\partial X_{\alpha'}}{\partial x_\alpha}\right)(dx_\alpha\,\delta x_{\alpha'}-dx_{\alpha'}\,\delta x_\alpha),\end{aligned}\right.$$

ce qui est la même chose que l'équation (8).

II.

Cela posé, considérons les variables x_i comme des fonctions d'une variable auxiliaire t définies par les équations différentielles

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}\,dx_1+\ldots+a_{n1}\,dx_n=\lambda X_1\,dt,\\ a_{12}\,dx_1+\ldots+a_{n2}\,dx_n=\lambda X_2\,dt,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{1n}\,dx_1+\ldots+a_{nn}\,dx_n=\lambda X_n\,dt,\end{array}\right.$$

où λ sera une quantité que l'on pourra choisir arbitrairement, o, une constante ou une fonction de t, suivant les cas. Nous ferons remarquer que les équations (10) peuvent être remplacées par l'équation unique

$$(10)^a\quad \sum_i\sum_k a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k=\lambda\,dt\sum X_i\,\delta x_i,$$

que l'on obtient en les ajoutant, après les avoir multipliées respectivement par $\delta x_1,\ldots,\delta x_n$; pourvu que l'on exige que cette équation soit vérifiée pour toutes les valeurs attribuées aux différentielles auxiliaires δx_i. Ainsi le système (10) peut être remplacé par l'équation unique

$$(10)^b\quad \delta\Theta_d-d\Theta_\delta=\lambda\,\Theta_\delta\,dt,$$

qui devra avoir lieu, quelles que soient les différentielles δ. Dans les applications, il sera toujours préférable de former directement les deux membres de cette dernière équation au lieu de calculer successivement les quantités a_{ik} qui figurent dans le système (10). Dès à présent, les remarques qui précèdent vont nous conduire à une propriété fondamentale du système (10).

Supposons que l'on effectue un changement de variables et que l'on remplace les variables x_i par d'autres variables y_i en nombre égal, qui soient fonctions indépendantes des premières. Il est aisé de voir que le système (10) se transformera dans celui que l'on formerait de la même manière, en prenant les nouvelles variables indépendantes. Cela résulte immédiatement de ce que ce système, écrit sous la forme $(10)^b$, est évidemment indépendant de tout choix de variables indépendantes. Mais, pour plus de netteté, considérons l'équation $(10)^a$. On sait, en vertu de l'égalité (8), que son premier membre deviendra

$$\sum\sum b_{ik}\, dy_i\, \delta y_k.$$

Quant au second membre, il se transformera évidemment dans le suivant

$$\lambda\, dt \sum \mathrm{Y}_k\, \delta y_k.$$

Ainsi l'équation $(10)^a$ prendra la forme

$$\sum_i \sum_k b_{ik}\, dy_i\, \delta y_k = \lambda\, dt \sum_i \mathrm{Y}_i\, \delta y_i.$$

Les fonctions y_i étant indépendantes, leurs différentielles δy_i sont arbitraires, comme les différentielles δx_i : on pourra donc égaler les coefficients de ces différentielles dans les deux membres, et l'on aura les équations

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} b_{11}\, dy_1 + b_{21}\, dy_1 + \ldots + b_{n1}\, dy_n = \lambda \mathrm{Y}_1\, dt,\\ b_{12}\, dy_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda \mathrm{Y}_2\, dt,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ b_{1n}\, dy_1 + \ldots\ldots\ldots + b_{nn}\, dy_n = \lambda \mathrm{Y}_n\, dt. \end{array}\right.$$

Ainsi, toutes les fois que les fonctions x_i satisferont aux équations (10), les fonctions y_i satisferont aux équations (11). La réciproque se démontrerait évidemment de la même manière. On peut donc dire que les systèmes (10) et (11) sont absolument équivalents, qu'ils sont deux formes d'un même système d'équations différentielles écrites avec des variables différentes. Comme ils sont composés de la même manière au moyen des variables qui y entrent, nous exprimerons d'une manière abrégée la propriété dont il s'agit en disant que *le système* (10) *est invariant.* Nous allons faire usage de cette proposition pour indiquer les formes réduites auxquelles on peut ramener l'expression différentielle Θ_d.

III.

Supposons d'abord n pair. Le déterminant gauche

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

sera un carré parfait. Nous commencerons par supposer que ce déterminant est différent de zéro.

Alors on pourra résoudre les équations (10) par rapport à $dx_1, \ldots, dx_n$, et l'on obtiendra un système de la forme

$$\frac{dx_1}{\mathrm{H}_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\mathrm{H}_n} = \lambda\, dt,$$

admettant $n - 1$ intégrales indépendantes de t.

Prenons pour nouvelles variables ces $n - 1$ intégrales, que nous désignerons par $y_1, \ldots, y_{n-1}$, et une fonction y_n assujettie à la seule condition de ne pas être une intégrale du système. Alors $y_1, \ldots, y_n$ formeront un système de n fonctions indépendantes, et le système (10), écrit avec les nouvelles variables, prendra la forme (11). Il faut donc exprimer que les équations (11) sont vérifiées quand on y suppose constantes les $n - 1$ fonctions $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

On devra donc avoir

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_1}{\partial y_n} - \frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial y_1}\right) dy_n = -\lambda \mathrm{Y}_1\, dt, \\
\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_2}{\partial y_n} - \frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial y_2}\right) dy_n = -\lambda \mathrm{Y}_2\, dt, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 = \lambda \mathrm{Y}_n\, dt.
\end{gathered}$$

On déduit de là

$$\mathrm{Y}_n = 0,$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{Y}_1}{\partial y_n} = \frac{\partial \log \mathrm{Y}_2}{\partial y_n} = \ldots = \frac{\partial \log \mathrm{Y}_{n-1}}{\partial y_n} = \frac{-\lambda\, dt}{dy_n}.$$

Les dernières équations montrent que les fonctions $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{n-1}$

dépendent réellement de y_n, mais que leurs rapports mutuels en sont indépendants. On pourra donc poser pour $i < n$

$$Y_i = KY_i^0,$$

Y_i^0 étant indépendant de la variable y_n, et K, au contraire, la contenant nécessairement. On a ainsi ramené l'expression différentielle à la forme

$$\theta_d = K(Y_1^0\, dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\, dy_{n-1}),$$

qui a un terme de moins, mais qui jouit encore de la propriété de ne contenir la variable y_n que dans le facteur K. On peut encore écrire

$$\theta_d = y_n(Y_1^0\, dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\, dy_{n-1}), \tag{12}$$

en désignant maintenant par y_n le coefficient K.

Supposons maintenant n impair. Alors le déterminant

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

sera nul comme symétrique gauche d'ordre impair, et, par conséquent, les équations (10) ne seront jamais impossibles si l'on y fait $\lambda = 0$. Nous supposerons d'abord que tous les mineurs du premier ordre de Δ ne soient pas nuls. Dans ce cas, les équations (10), où l'on fera $\lambda = 0$, détermineront complètement les rapports des différentielles. Elles admettront donc $n - 1$ intégrales indépendantes, que nous désignerons encore par $y_1, \ldots, y_{n-1}$, et que nous prendrons pour nouvelles variables en leur adjoignant une fonction y_n, qui ne sera pas une intégrale, et formera, par conséquent, avec elles un système de n fonctions indépendantes. Alors les équations (11) devront être vérifiées par la substitution des équations

$$\lambda = 0, \quad dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_{n-1} = 0,$$

ce qui donnera

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Y_1}{\partial y_n} - \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} = 0, \\
\frac{\partial Y_2}{\partial y_n} - \frac{\partial Y_n}{\partial y_2} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y_n} - \frac{\partial Y_n}{\partial y_{n-1}} = 0.
\end{gathered}$$

Il est aisé de trouver la forme la plus générale des fonctions satisfaisant à ces équations. Posons, en effet,

$$Y_n = \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}, \quad Y_k = \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} + Y_k^0.$$

Les équations exprimeront que les dérivées des fonctions Y_k^0, par rapport à y_n, sont toutes nulles. On pourra donc poser

$$\Theta_d = d\Psi + Y_1^0\, dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\, dy_{n-1},$$

les fonctions Y_k^0 ne dépendant pas de y_n.

Mais ici deux cas différents peuvent se présenter. En général, Ψ contiendra y_n, et, par conséquent, $\Psi, y_1, \ldots, y_{n-1}$ seront n fonctions indépendantes. En changeant de notation, et désignant Ψ par y_n, on aura la première forme réduite

$$(13) \qquad \Theta_d = dy_n + Y_1^0\, dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\, dy_{n-1}.$$

Mais il peut aussi arriver que Ψ ne contienne pas y_n. Alors on aura

$$\Theta_d = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + Y_1^0\right) dy_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}} + Y_{n-1}^0\right) dy_{n-1},$$

ou plus simplement

$$(14) \qquad \Theta_d = Y_1^0\, dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\, dy_{n-1}.$$

Il sera, du reste, très aisé *a priori* de distinguer ces formes l'une de l'autre. La seconde, en effet, est caractérisée par cette propriété que Θ_d s'annule quand on a

$$dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_{n-1} = 0.$$

On voit donc que l'on obtiendra cette forme toutes les fois que l'équation

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n = 0$$

sera une conséquence, une simple combinaison linéaire des équations (10), où l'on aura fait $\lambda = 0$.

Considérons, par exemple, la forme à trois variables

$$F_d = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0.$$

Le système (10) devient ici

$$(15)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}}=\frac{dy}{\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}}=\frac{dz}{\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}}.$$

Si l'on remplace dans la forme dx, dy, dz par les quantités qui leur sont proportionnelles, on obtient l'expression bien connue

$$(16)\qquad X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right).$$

Si cette expression n'est pas nulle, on pourra ramener F_d à la forme

$$d\gamma + M\,d\alpha + N\,d\beta,$$

où α, β sont les intégrales du système (15), M et N des fonctions de α et de β, et γ une fonction indépendante de α, β. Si, au contraire, l'expression (16) est nulle, le terme $d\gamma$ disparaîtra et il reste

$$F_d = M\,d\alpha + N\,d\beta = \mu\,du,$$

ce qui est d'accord avec les résultats connus.

IV.

Nous avons supposé jusqu'ici que le système (10) était déterminé. Imaginons maintenant qu'il ne le soit pas. Alors, si n est pair, le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn}$$

sera nul, et il en sera, par conséquent, de même de tous ses mineurs du premier ordre, en vertu d'une propriété connue des déterminants symétriques gauches. Si n est impair, les mineurs du premier ordre du même déterminant seront tous nuls.

Alors les équations (10) se réduisent à moins de n équations distinctes, et ne suffisent plus à déterminer les rapports mutuels de $dx_1, \ldots, dx_n, dt$. Mais je remarque qu'elles forment toujours un système équivalent au système (11), le raisonnement que nous avons fait pour établir cette équivalence ne souffrant pas d'exception.

Pour simplifier, supposons que l'on ait fait $\lambda = 0$. Les équations (10) seront indéterminées. Supposons qu'elles se réduisent à p équations distinctes, p pouvant être égal à zéro.

J'ajoute arbitrairement $n - p - 1$ équations différentielles, par exemple, les suivantes :

$$d\varphi_1 = 0, \quad d\varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad d\varphi_{n-p-1} = 0,$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-p-1}$ sont des fonctions quelconques, et j'obtiens ainsi un système parfaitement déterminé. J'appelle encore $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les $n - 1$ intégrales du système ainsi complété, et, en leur adjoignant une fonction y_n qui ne soit pas une intégrale, j'obtiens encore n fonctions indépendantes y_i, que je substitue aux variables x_i. Le système (11), où l'on fera $\lambda = 0$, devra être vérifié, comme le premier, quand on y fera

$$dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_{n-1} = 0.$$

En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas où n est impair, nous serons conduits aux mêmes conclusions, et nous trouverons l'une des formes (13) ou (14). En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Une forme Θ_d à n variables peut toujours être ramenée par l'intégration du système (10) *à l'une des trois formes*

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{r} y_n(\mathrm{Y}_1\, dy_1 + \ldots + \mathrm{Y}_{n-1}\, dy_{n-1}), \\ \mathrm{Y}_1\, dy_1 + \ldots + \mathrm{Y}_{n-1}\, dy_{n-1}, \\ dy_n + \mathrm{Y}_1\, dy_1 + \ldots + \mathrm{Y}_{n-1}\, dy_{n-1}, \end{array} \right.$$

où les variables $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sont indépendantes, et où les fonctions Y_i ne dépendent que de $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Quelques-unes de ces fonctions Y_i pourront, d'ailleurs, être nulles. La première de ces trois formes ne se présente que lorsque n est pair et le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

différent de zéro.

On peut encore énoncer le résultat précédent de la manière suivante. Désignons par Θ_d^n une forme différentielle à n variables.

On peut toujours ramener Θ_d^n à l'une des trois formes

$$y_n \Theta_d^{n-1}, \quad \Theta_d^{n-1}, \quad dy_n + \Theta_d^{n-1},$$

où y_n est une variable tout à fait indépendante de celles qui figurent dans la nouvelle expression différentielle Θ_d^{n-1}.

V.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Une forme Θ_d peut toujours être ramenée à l'un des deux types suivants :

$$(17) \qquad \begin{cases} dy - z_1\,dy_1 - z_2\,dy_2 - \ldots - z_p\,dy_p, \\ \qquad z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_p\,dy_p, \end{cases}$$

où les fonctions $y, y_1, \ldots, z_k$ constituent un système de variables indépendantes, c'est-à-dire sont des fonctions indépendantes de toutes les variables qui entrent dans la forme Θ_d.

Le premier des deux types précédents sera appelé type *indéterminé;* l'autre sera le type *déterminé.*

Cette proposition, nous allons le démontrer, est une conséquence presque immédiate de la précédente. En effet, elle est évidente pour les formes à une et à deux variables. Il suffira donc de montrer que, si elle est vraie pour une forme à $n-1$ variables, elle l'est aussi pour une forme contenant une variable de plus.

Pour cela, nous remarquerons qu'une forme à n variables peut être ramenée à un des trois types A. Négligeant le second, qui ne dépend que de $n-1$ variables et pour lequel, par conséquent, le théorème est admis, nous remarquerons que les deux autres se composent d'une manière très simple avec la fonction à $n-1$ variables $Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}$.

Remplaçant cette forme à $n-1$ variables par l'un des deux types (17), nous obtiendrons pour la forme à n variables l'une des expressions suivantes :

$$\begin{gathered} y_n(du - v_1\,du_1 - v_2\,du_2 - \ldots - v_p\,du_p), \\ y_n(v_1\,du_1 + \ldots + v_p\,du_p), \\ d(y_n + u) - v_1\,du_1 - v_2\,du_2 - \ldots - v_p\,du_p, \\ dy_n + v_1\,du_1 + v_2\,du_2 - \ldots + v_p\,du_p, \end{gathered}$$

où u, u_i, v_k sont des fonctions indépendantes de $y_1, \ldots, y_{n-1}$, et où, par conséquent, y_n, u, u_i, v_k sont des fonctions indépendantes des variables primitives.

Les deux dernières expressions rentrent évidemment dans le type indéterminé. Quant aux deux premières, on les ramène au second type en substituant aux fonctions $v_1, \ldots, v_p$ les suivantes :

$$v_1 y_n = \pm w_1, \quad \ldots, \quad v_p y_n = \pm w_p.$$

Le théorème est donc établi. Il en résulte évidemment la conséquence suivante :

Si la forme réduite de l'expression à n variables Θ_d est

$$z_1\, dy_1 + \ldots + z_p\, dy_p,$$

les $2p$ fonctions z_i, y_k des variables x_i étant indépendantes, on a nécessairement $2p \lesseqgtr n$.

Si la forme réduite est

$$dy - z_1\, dy_1 - \ldots - z_p\, dy_p,$$

il faudra de même que l'on ait $2p + 1 \lesseqgtr n$.

VI.

Nous allons maintenant résoudre le problème suivant :

Étant donnée une forme Θ_d à n variables, auquel des deux types (17) *peut-elle être ramenée et quelle est alors la valeur du nombre p?*

Ce problème est susceptible d'une solution extrêmement simple. En effet, supposons que l'on transforme l'expression Θ_d en prenant comme nouvelles variables celles qui figurent dans la forme réduite, et d'autres d'une manière quelconque pour compléter le nombre de n fonctions indépendantes. Voyons ce que deviendra le système (10). Ce système peut se remplacer par l'unique équation

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \lambda\Theta_\delta dt, \tag{18}$$

qui doit avoir lieu, quelles que soient les différentielles δ. Supposons d'abord que la forme réduite de Θ_d soit

$$\Theta_d = dy - z_1\,dy_1 - z_2\,dy_2 - \ldots - z_p\,dy_p.$$

On aura

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = dz_1\,\delta y_1 - dy_1\,\delta z_1 + \ldots + dz_p\,\delta y_p - dy_p\,\delta z_p,$$

et le système (10) ou l'équation (18), qui lui est équivalente, nous donnera

$$(19)\qquad \begin{cases} dy_1 = 0, & dz_1 = -\lambda z_1\,dt, \\ dy_2 = 0, & dz_2 = -\lambda z_2\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ dy_p = 0, & dz_p = -\lambda z_p\,dt, \\ & 0 = \lambda\,dt. \end{cases}$$

On voit que l'on aura nécessairement $\lambda = 0$, et que les équations (10) se réduiront à $2p$, qui seront complètement intégrables.

Si, au contraire, la forme réduite est

$$\Theta_d = z_1\,dy_1 + \ldots + z_p\,dy_p,$$

le système (10) sera équivalent au suivant :

$$(20)\qquad \begin{cases} dy_1 = 0, & dz_1 = \lambda z_1\,dt, \\ dy_2 = 0, & dz_2 = \lambda z_2\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ dy_p = 0, & dz_p = \lambda z_p\,dt. \end{cases}$$

Il ne sera pas nécessaire ici de faire $\lambda = 0$, ce qui distingue ce cas du premier. D'ailleurs les équations admettront $2p - 1$ intégrales indépendantes de t,

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1, & \frac{z_2}{z_1} &= C'_1, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ y_p &= C_p, & \frac{z_p}{z_1} &= C'_{p-1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

Si les équations (10), *considérées comme déterminant les différentielles dx_i, sont impossibles tant que λ est différent de zéro, la forme Θ_d est réductible au type indéterminé*

$$dy - z_1\,dy_1 - z_2\,dy_2 - \ldots - z_p\,dy_p.$$

Le nombre $2p$ est égal à celui des équations distinctes auxquelles se réduisent les équations (10) *quand on y fait* $\lambda = 0$, *et, par conséquent, il sera facile de le déterminer* a priori. *De plus, les $2p$ équations auxquelles se réduisent alors les équations* (10) *sont complètement intégrables, et les variables y_i, z_k de la forme réduite sont des fonctions de leurs $2p$ intégrales.*

Si les équations (10) *peuvent être vérifiées en supposant λ différent de zéro, la forme est réductible au type déterminé*

$$z_1\,dy_1 + \ldots + z_p\,dy_p.$$

Le nombre $2p$ est égal à celui des équations distinctes auxquelles se réduisent alors les équations (10). *De plus, ces équations sont toujours complètement intégrables, et l'on aurait, au moyen des variables de la forme réduite, un système d'intégrales de ces équations par les formules*

$$\begin{array}{ll} y_1 = \alpha_1, & z_1\,e^{-\int\lambda dt} = \beta_1, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots, \\ y_p = \alpha_p, & z_p\,e^{-\int\lambda dt} = \beta_p. \end{array}$$

En d'autres termes, ces équations différentielles admettent pour intégrales indépendantes de t les fonctions $y_1, \ldots, y_p$ et les quotients $\frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_p}{z_1}$.

Comme application, étudions la forme réduite de Θ_d dans le cas le plus général.

Si n est pair, le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

n'est pas nul, et l'on peut résoudre les équations (10) par rapport aux différentielles dx_i; λ n'est pas nul, et les équations (10) sont toutes distinctes. On a donc ici le second type (17), et la forme réduite est

$$z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_{\frac{n}{2}}\,dy_{\frac{n}{2}}.$$

Si, au contraire, n est impair, le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

est nul; mais ses mineurs du premier ordre ne sont pas nuls en général. Il faut donc, nous l'avons vu, sauf un cas exceptionnel, que $\lambda = 0$, et alors les équations se réduisent à $n - 1$ distinctes; la forme réduite est

$$dy - z_1\,dy_1 - \ldots - z_{\frac{n-1}{2}}\,dy_{\frac{n-1}{2}}.$$

VII.

Nous avons vu comment on reconnaît à quel type se rattache une forme différentielle et comment on détermine le nombre p; il resterait à indiquer les intégrations qui sont nécessaires pour ramener une expression différentielle donnée à sa forme canonique. Les belles découvertes de MM. Mayer et Lie ont beaucoup diminué la difficulté de ce sujet; mais, dans ce travail, je ne m'occuperai que des propriétés d'invariance relatives à une forme différentielle. Je vais donc me contenter d'expliquer la marche générale des intégrations, mon unique but étant de montrer que la méthode de Pfaff, appliquée à une équation aux dérivées partielles, conduit aux mêmes résultats que celle de Cauchy.

Considérons d'abord une expression différentielle

$$\theta_d^n = X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

dont la forme canonique soit

$$z_1\,dy_1 + \ldots + z_p\,dy_p. \tag{21}$$

Nous savons qu'alors le système de Pfaff

$$\delta\theta_d - d\theta_\delta = \lambda\theta_\delta\,dt$$

est complètement intégrable si $2p < n$, et admet par conséquent, *dans tous les cas*, $2p - 1$ intégrales indépendantes de t. Il y aura donc toujours au moins $n - 2p - 1$ des variables x_i qui ne seront pas des intégrales. Supposons, pour fixer les idées, que ce soient les dernières

$$x_{2p}, \quad x_{2p+1}, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Les $2p - 1$ intégrales du système de Pfaff se réduisent, quand on fait

$$x_{2p} = x_{2p}^0, \quad x_{2p+1} = x_{2p+1}^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0,$$

$x^0_{2p}, \ldots, x^0_n$ étant des constantes numériques, à des fonctions de $x_1, \ldots, x_{2p-1}$. Il y aura donc une intégrale qui se réduira à x_1, une autre à x_2, et ainsi de suite ([1]). Nous désignerons par $[x_i]$ ou u_i celle de ces intégrales qui se réduit à x_i. Nous savons que les fonctions u_i dépendent uniquement des variables $y_1, \ldots, y_p$ qui figurent dans la forme canonique (21), et des quotients $\frac{z_p}{z_1}, \ldots, \frac{z_p}{z_1}$. Cela posé, prenons pour nouvelles variables

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_{2p-1}, \quad x_{2p}, \quad \ldots, \quad x_n,$$

qui sont évidemment des fonctions indépendantes des premières.

La forme Θ^n_d deviendra

$$K(U_1\, du_1 + \ldots + U_{2p-1}\, du_{2p-1}), \tag{22}$$

$U_1, \ldots, U_{2p-1}$ ne dépendant que de $u_1, \ldots, u_{2p-1}$ et K contenant au contraire une ou plusieurs des variables $x_{2p}, \ldots, x_n$. Cela est aisé à démontrer de plusieurs manières. Par exemple, si l'on part de la forme canonique (21)

$$z_1\left(dy_1 + \frac{z_2}{z_1}\, dy_2 + \ldots + \frac{z_p}{z_1}\, dy_p\right),$$

on sait que $\frac{z_k}{z_1}$, y_i sont des fonctions des variables u_i. Si donc on remplace y_i, $\frac{z_k}{z_1}$ par leurs expressions en fonction des intégrales u_i et si l'on remarque que z_1 est une fonction indépendante des précédentes, on retrouve bien l'expression (22).

Je ferai remarquer que la fonction K, qui figure dans cette expression, n'est pas complètement définie. Rien n'empêche de la diviser par une fonction quelconque $\varphi(u_1, \ldots, u_{2p-1})$, à la condition de multiplier les quantités U par la même fonction φ. Mais on peut déterminer complètement K par la condition suivante :

Supposons que, pour $x_{2p} = x^0_{2p}, \ldots, x_{2n} = x^0_{2n}$, K se réduise à

([1]) Cette classification des intégrales d'un système d'équations est, comme on sait, due à Cauchy dans le cas où il y a une seule variable indépendante. Elle a été déjà utilisée, en ce qui concerne les systèmes complètement intégrables, par M. Lie, dans le Mémoire, que nous avons déjà cité, sur le problème de Pfaff.

une fonction

$$\psi(x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_{2p-1}).$$

Nous diviserons K par $\psi(u_1, u_2, \ldots, u_{2p-1})$, et alors la nouvelle valeur de K sera complètement définie et jouira de la propriété de se réduire à 1 quand on fera $x_{2p} = x^0_{2p}, \ldots, x_n = x^0_n$.

Cela posé, écrivons l'identité

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n = K(U_1\, du_1 + \ldots + U_{2p-1}\, du_{2p-1}),$$

et faisons dans les deux membres $x_{2p} = x^0_{2p}, \ldots, x_n = x^0_n$. Désignons par X^0_p ce que devient alors X_p. Comme K devient alors égal à 1, u_i égal à x_i, on aura

$$X^0_1\, dx_1 + \ldots + X^0_{2p-1}\, dx_{2p-1} = U_1\, dx_1 + \ldots + U_{2p-1}\, dx_{2p-1},$$

et par conséquent on pourra écrire

$$U_i = X^0_i,$$

ce qui nous conduit au théorème suivant :

Supposons que la forme canonique d'une expression différentielle

$$\Theta^n_d = X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n$$

soit

$$z_1\, dy_1 + \ldots + z_p\, dy_p.$$

Le premier système de Pfaff sera complètement intégrable si $2p < n$, et dans tous les cas admettra $2p - 1$ intégrales indépendantes. Il y aura donc toujours au moins $n - 2p + 1$ des variables x_i qui ne seront pas des intégrales de ce système. Soient $x_{2p}, \ldots, x_n$, $n - 2p + 1$ variables jouissant de cette propriété. Considérons les $2p - 1$ intégrales du système de Pfaff qui se réduisent à $x_1, \ldots, x_{2p-1}$ quand on fait $x_{2p} = x^0_{2p}, \ldots, x_n = x^0_n$, et désignons par u_i celle qui se réduit à x_i. Si l'on choisit ces intégrales pour nouvelles variables, l'expression Θ^n_d prend la forme suivante

$$K(U_1\, du_1 + \ldots + U_{2p-1}\, du_{2p-1}),$$

où l'on déduit U_h de X_h en y remplaçant respectivement $x_1, \ldots, x_{2p-1}$ par $u_1, \ldots, u_{2p-1}$; $x_{2p}, \ldots, x_n$ par les constantes $x^0_{2p}, \ldots, x^0_n$.

Considérons maintenant le cas où la forme Θ_d^n est réductible au type

(23) $$dy - z_1\,dy_1 - z_2\,dy_2 - \ldots - z_p\,dy_p.$$

On sait qu'alors le système de Pfaff ne sera possible que si l'on y fait $\lambda = 0$, et que dans tous les cas il admettra $2p$ intégrales qui seront $z_1, \ldots, z_p, y_1, \ldots, y_p$. Nous pouvons ici raisonner comme précédemment. Parmi les n variables x_i, il y en aura au moins $n - 2p$ qui ne seront pas des intégrales. Soient

$$x_{2p+1}, \quad \ldots, \quad x_n$$

$n - 2p$ variables jouissant de cette propriété. Désignons par u_i celle des intégrales qui se réduit à x_i quand on remplace $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ par les constantes numériques $x_{2p+1}^0, \ldots, x_n^0$. Enfin effectuons un changement de variables qui substitue aux variables primitives les suivantes

$$u_1, \ \ldots, \ u_{2p}, \ x_{2p+1}, \ \ldots, \ x_n.$$

On aura, pour la nouvelle forme de l'expression différentielle,

(24) $$d\mathrm{H} + \mathrm{U}_1\,du_1 + \ldots + \mathrm{U}_{2p}\,du_{2p}.$$

En effet, dans la forme canonique (23), les variables z_i, y_k, qui sont les intégrales du système de Pfaff, peuvent être regardées comme des fonctions de $u_1, \ldots, u_{2p}$. Si donc on les supposait exprimées en fonction de $u_1, \ldots, u_{2p}$, on obtiendrait bien un résultat de la forme précédente.

Dans l'expression (24), la fonction H n'est pas définie et il est clair que cette expression ne changerait pas si on remplaçait H par

$$\mathrm{H} - \varphi(u_1, \ \ldots, \ u_{2p}),$$

à la condition d'ajouter $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}$ à U_i. Si H se réduit à $\psi(x_1, \ldots, x_{2p})$ pour $x_{2p+1} = x_{2p+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$, nous conviendrons d'en retrancher

$$\psi(u_1, \ \ldots, \ u_{2p});$$

alors la nouvelle valeur de H se réduira à zéro pour $x_{2p+1} = x_{2p+1}^0, \ldots,$ $x_n = x_n^0$.

Écrivons maintenant l'identité

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n = dH + U_1\,du_1 + \ldots + U_{2p}\,du_{2p},$$

et faisons-y $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$. Soit encore X^0_i ce que devient X_i par cette substitution. Comme u_i devient alors égal à x_i et H égal à zéro, on aura

$$X^0_1\,dx_1 + \ldots + X^0_{2p}\,dx_{2p} = U_1\,dx_1 + \ldots + U_{2p}\,dx_{2p},$$

et par conséquent

$$U_k = X^0_k.$$

Nous pouvons donc énoncer la nouvelle proposition qui suit :

Supposons que la forme canonique d'une expression différentielle

$$\Theta^n_d = X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n$$

soit

$$dy - z_1\,dy_1 - \ldots - z_p\,dy_p.$$

Le premier système de Pfaff ne sera possible que si l'on y fait $\lambda = 0$ *et il admettra* $2p$ *intégrales. Soient* $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ *un système de variables qui ne fassent pas partie de ces intégrales, et désignons par* u_i *l'intégrale du système de Pfaff qui se réduit à* x_i *pour* $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$. *L'expression* Θ^n_d *pourra être ramenée à la forme*

$$dH + U_1\,du_1 + \ldots + U_{2p}\,du_{2p},$$

où l'on déduit U_k *de* X_k *en y remplaçant* $x_1, \ldots, x_{2p}$ *respectivement par* $u_1, \ldots, u_{2p}$; $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ *par les constantes* $x^0_{2p+1}, \ldots, x^0_n$. H *est une fonction qui se réduit à zéro pour* $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$.

Il est bon de remarquer que H se déterminera sans difficulté par une quadrature, quand $u_1, \ldots, u_{2p}$ seront connus. Car on a

$$dH = \Theta^n_d - U_1\,du_1 - \ldots - U_{2p}\,du_{2p},$$

et tout sera connu dans le second membre.

Les deux théorèmes qui précèdent conduisent à plusieurs conséquences. On voit tout de suite que les divers systèmes d'équations différentielles auxquels conduit successivement l'application de la méthode acquièrent en quelque sorte une existence indépendante. On peut écrire chacun d'eux avant d'avoir intégré le précédent. M. Mayer avait déjà fait des remarques analogues relativement aux systèmes complètement intégrables. On voit, de plus, qu'à partir du second système, on n'a plus d'indétermination et l'on ne rencontre plus que des formes appartenant aux deux types généraux.

On peut faire une application importante des résultats qui précèdent à la forme particulière que l'on rencontre dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Soit

$$p_1 = f(z, x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n) \tag{25}$$

une équation aux dérivées partielles, où p_i désigne $\frac{\partial z}{\partial x_i}$. Il est clair que l'intégration de cette équation est équivalente au problème suivant : *Annuler la forme*

$$\Theta_d = dz - f\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n$$

à $2n$ *variables* $z, x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n$, *en établissant* n *relations entre ces variables;* et l'on sait que la solution de ce problème n'offre aucune difficulté dès que Θ_d est ramené à la forme canonique. Or, *je dis que pour ramener* Θ_d *à la forme canonique, il suffira d'intégrer le premier système de Pfaff relatif à cette forme.*

Écrivons, en effet, ce système

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \lambda\,\Theta_\delta\,dt,$$

ou bien

$$\begin{aligned} df\,\delta x_1 - \delta f\,dx_1 + dp_2\,\delta x_2 - \delta p_2\,dx_2 + \ldots + dp_n\,\delta x_n - dx_n\,\delta p_n \\ = \lambda\,dt(\delta z - f\,\delta x_1 - \ldots - p_n\,\delta x_n), \end{aligned}$$

ce qui donne les équations

$$\begin{aligned} df - \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 \qquad &= -\lambda f\,dt, \\ -\frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_1 + dp_2 &= -\lambda p_2\,dt, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_1 + dp_n = -\lambda p_n\,dt,\\
&-\frac{\partial f}{\partial z}\,dx_1 \qquad\quad = \lambda\,dt,\\
&-\frac{\partial f}{\partial p_2}\,dx_1 - dx_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&-\frac{\partial f}{\partial p_n}\,dx_1 - dx_n = 0,
\end{aligned}
$$

que l'on met aisément sous la forme suivante

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{-1} = \frac{dx_2}{\dfrac{\partial f}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\dfrac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{-dp_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial f}{\partial z}},\\
&dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n.
\end{aligned}
\right.
$$

On reconnaît les équations différentielles de la caractéristique.

Nous voyons ici que x_1 n'est jamais une intégrale. Désignons par $[z]$, $[p_k]$, $[x_i]$ les intégrales de ce système qui se réduisent respectivement à z, p_k, x_i pour $x_1 = x_1^0$, x_1^0 étant une constante quelconque. *Il n'y aura aucune difficulté à déterminer ces intégrales dès que le système* (26) *sera complètement intégré.* Si nous appliquons maintenant le premier des deux théorèmes que nous avons démontrés, nous voyons que l'on aura

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&dz - f\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n\\
&\quad = \mathrm{L}\,\big\{ d[z] - [p_2]\,d[x_2] - [p_3]\,d[x_3] - \ldots - [p_n]\,d[x_n] \big\},
\end{aligned}
\right.
$$

L dépendant de x_1. Nous obtenons ainsi du premier coup la forme réduite qui devait être le terme de nos calculs. L'équation précédente se rencontre dans la méthode de Cauchy et elle y joue un rôle fondamental. Il est inutile de revenir sur des propositions bien connues et de montrer comment elle conduit à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles proposée. Il nous suffira d'avoir établi que la méthode de Pfaff, au moyen d'un facile complément, devient aussi parfaite que les autres. Mais il est juste aussi d'ajouter que cette classification des intégrales, qui nous a permis d'arriver au but, constitue un progrès bien essentiel, qui est encore dû à Cauchy. (*A suivre.*)