Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

C. Weierstrass

Note sur la théorie des fonctions de Jacobi à plusieurs variables

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 136-141

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_136_1>

MÉLANGES.

NOTE SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS DE JACOBI A PLUSIEURS VARIABLES;

PAR M. C. WEIERSTRASS.

(Séance du 4 mai 1882 de l'Académie de Berlin.)

Traduction publiée avec l'autorisation de l'auteur,

PAR M. J. MOLK.

La fonction $\sigma(u \mid \omega\omega')$, que nous désignerons simplement par $\sigma(u)$, satisfait à l'équation

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_1)\,\sigma(u_2 + u_3)\,\sigma(u_2 - u_3)\\
&\quad + \sigma(u - u_2)\,\sigma(u - u_2)\,\sigma(u_3 - u_1)\,\sigma(u_3 - u_1)\\
&\quad + \sigma(u + u_3)\,\sigma(u - u_3)\,\sigma(u_1 + u_2)\,\sigma(u_1 - u_2) = 0 \ [1],
\end{aligned}
\right.
$$

u, u_1, u_2, u_3 désignant quatre quantités quelconques.

---

(1) M. Weierstrass désigne par $\sigma(u)$ une fonction analytique univoque, ayant,

J'ai démontré ce théorème, pour la première fois, en 1862, dans mon cours à l'Université de Berlin.

La nature de cette équation est bien différente de celle des relations découvertes par Jacobi, entre les produits de fonctions ϑ prises quatre à quatre (page 507 du tome I de ses *Œuvres complètes*). Elle ne contient qu'*une seule* fonction, tandis que chacune des équations de Jacobi, que l'on peut d'ailleurs en déduire, contient deux ou plusieurs fonctions ϑ.

On sait que des relations, analogues à celles que Jacobi a trouvées entre les fonctions ϑ à *un* argument existent aussi entre les fonctions ϑ à plusieurs arguments. Par contre, je ne crois pas que la généralisation suivante de l'équation (1) ait été jamais exposée.

La fonction $\sigma(u)$ peut être exprimée à l'aide de la fonction $\vartheta_1(x)$ de Jacobi, par la relation

$$\sigma(u) = C e^{auu} \vartheta_1(cu) \tag{2}$$

C, a, c désignant, ainsi que q qui paraît dans $\vartheta_1(x)$, des fonctions déterminées de ω, ω', indépendantes de u. Il est d'ailleurs facile de vérifier que l'équation (1) a encore lieu lorsque l'on y remplace $\sigma(u)$ par l'expression (2), en laissant les constantes q, a, c, C complètement arbitraires.

Je définis de même une fonction $\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)})$ de ρ variables, en considérant une fonction impaire quelconque ϑ de ρ arguments,

$$\vartheta_1(v, v', \ldots, v^{(\rho-1)}),$$

---

pour toute valeur finie de son argument, le caractère d'une fonction rationnelle, et s'annulant une fois, aux points

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega', \quad (\mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots, \pm \infty).$$

On suppose que la partie réelle de $\dfrac{\omega'}{\omega i}$ est positive.

Cette fonction est impaire. Elle peut être représentée par une série entière, convergente pour toute valeur finie de u, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles entières de g_2 et g_3, les *invariants* de la fonction σ,

$$\frac{1}{60} g_2 = \sum\nolimits_w' \frac{1}{w^4}, \quad \frac{1}{140} g_3 = \sum\nolimits_w' \frac{1}{w^6}.$$

Comparez *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen,* formules rassemblées et publiées par M. Schwarz, d'après le cours de M. Weierstrass.

en y substituant à $v, v', \ldots, v^{(\rho-1)}$ des fonctions linéaires et homogènes de $u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}$, dont le déterminant est différent de zéro, et en posant ensuite

$$\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}) = \mathrm{C}.e^{(\psi u, u', \ldots, u^{(\rho-1)})}.\Im_1(v, v', \ldots, v^{(\rho-1)}),$$

où ψ désigne une fonction entière et homogène du second degré de $u, u', \ldots u^{(\rho-1)}$, et C une constante arbitraire.

Ceci posé, si $r = 2\rho$, choisissons arbitrairement $r+2$ systèmes d'arguments :

$$\begin{array}{llll} u, & u', & \ldots, & u^{(\rho-1)}, \\ u_1, & u'_1, & \ldots, & u_1^{(\rho-1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r+1}, & u'_{r+1}, & \ldots, & u_{r+1}^{(\rho-1)}, \end{array}$$

et formons le produit

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma(u+u_1, \ldots)\,\sigma(u_2+u_3, \ldots) \ldots \sigma(u_r+u_{r+1}, \ldots) \\ .\sigma(u-u_1, \ldots)\,\sigma(u_2-u_3, \ldots) \ldots \sigma(u_r-u_{r+1}, \ldots) \end{array} \right\}$$

où, pour abréger, nous n'avons écrit que le premier argument de chaque fonction σ. Permutons ensuite les indices $1, 2, \ldots, r+1$, de la manière suivante : Faisons d'abord parcourir à ces $r+1$ indices un cycle complet; dans chacune des permutations ainsi obtenues, répétons la même opération avec les $r-1$ derniers indices; dans chacune de ces permutations, avec les $r-3$ derniers indices, et ainsi de suite [1]

A chaque permutation correspond un produit (3) de fonctions σ; *la somme de ces produits est identiquement nulle.*

La démonstration de ce théorème est facile. Il suffit de remplacer dans le produit (3) chaque facteur par la série qui le représente; on peut alors transformer cette expression en une suite de produits dans lesquels chaque facteur ne dépend que de l'un des systèmes d'arguments considérés. Permutant alors les indices $1, 2, \ldots, r+1$ de la manière indiquée, on voit que la somme des termes obtenus est identiquement nulle.

---

[1] Pour $\rho = 2$, par exemple, $r = 4$ et les permutations, obtenues par le procédé indiqué, sont

1 2 3 4 5,	2 3 4 5 1,	3 4 5 1 2,	4 5 1 2 3,	5 1 2 3 4,
1 2 4 5 3,	2 3 5 1 4,	3 4 1 2 5,	4 5 2 3 1,	5 1 3 4 2,
1 2 5 3 4,	2 3 2 4 5,	3 4 2 5 1,	4 5 3 1 2,	5 1 4 2 3.

Le nombre des termes de l'équation augmente très rapidement avec ρ; il est égal à 1, 3, 5, ..., $(r+1)$.

Si l'on remplace u, u', ... par u_0, u'_0, ..., et si l'on pose

$$\sigma(u_\alpha + u_\beta,\ u'_\alpha + u'_\beta,\ \ldots)\ \sigma(u_\alpha - u_\beta,\ u'_\alpha - u'_\beta,\ \ldots) = S_{\alpha,\beta}$$

et

$$S = \sum \begin{Bmatrix} \sigma(u_0 + u_1, \ldots)\ \sigma(u_2 + u_3, \ldots)\ \ldots\ \sigma(u_r + u_{r+1}, \ldots) \\ .\sigma(u_0 - u_1, \ldots)\ \sigma(u_2 - u_2, \ldots)\ \ldots\ \sigma(u_r - u_{r+1}, \ldots) \end{Bmatrix},$$

on voit que $S_{\alpha,\alpha} = 0$ et $S_{\alpha,\beta} = -S_{\beta,\alpha}$, et l'on a identiquement

$$S^2 = |\ S_{i,k}\ | \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r+1).$$

On peut donc aussi démontrer le théorème énoncé, en prouvant que le déterminant

$$|\ S_{i,k}\ | \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r+1)$$

est nul pour des valeurs quelconques de u_0, u'_0, ...; u_1, u'_1, ...; u_{r+1}, u'_{r+1}, ... Des théorèmes connus conduisent à ce résultat (1).

Remplaçons dans l'équation $S = 0$

$$\begin{array}{llll} u, & u', & \ldots \text{ par } u + \frac{w}{2}, & u' + \frac{w'}{2}, \ \ldots; \\ u, & u'_1, & \ldots \text{ par } u_1 + \frac{w}{2}, & u'_1 + \frac{w'}{2}, \ \ldots; \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;} \\ u_{r+1}, & u'_{r+1}, & \ldots \text{ par } u_{r+1} + \frac{w}{2}, & u'_{r+1} + \frac{w'}{2}, \ \ldots; \end{array}$$

nous obtiendrons

$$(4)\quad 0 = \sum \begin{Bmatrix} .\sigma(u + u_1 + w, \ldots)\sigma(u_2 + u_3 + w, \ldots) \ldots \sigma(u_r + u_{r+1} + w, \ldots) \\ .\sigma(u - u_1, \ldots) \ldots\ \sigma(u_2 - u_3, \ldots) \ldots\ldots \sigma(u_r - u_{r+1}, \ldots\ldots) \end{Bmatrix},$$

la somme étant étendue à toutes les permutations indiquées.

Dans la théorie des fonctions elliptiques on déduit des conséquences nombreuses de la formule (1). Je laisse ici de côté les conséquences non moins nombreuses que l'on peut déduire de la for-

(1) C'est Jacobi qui a, le premier, donné une méthode pour former l'expression dont le carré est un déterminant de Pfaff, et que M. Cayley nomme, pour cette raison, *Pfaffian*. (*Zur Pfaff'schen Integrationsmethode*, t. 2 du *Journal de Crelle*.)

mule (4) par des méthodes analogues. Par contre, je désire appeler l'attention sur une question à laquelle donne naissance l'équation $S = 0$, et qui se rapporte à la théorie des fonctions.

On peut démontrer directement, sans rien savoir de la fonction $\sigma(u)$, qu'il existe une fonction transcendante entière de la variable u, contenant *quatre* constantes arbitraires, telle que l'équation (1) soit vérifiée lorsqu'on y remplace $\sigma(u)$ par cette fonction.

A cet effet, on cherche d'abord s'il est possible de satisfaire identiquement à l'équation (1), en y remplaçant $\sigma(u)$ par une série entière; on voit alors que cette série ne saurait contenir que des puissances impaires de u, et que ses coefficients peuvent être exprimés en fonctions rationnelles et entières des quatre premiers d'entre eux, qui restent arbitraires. A l'aide de l'équation (1) elle-même, on démontre ensuite que cette série entière est convergente, quelles que soient les valeurs que l'on donne à la variable u et aux quatre constantes arbitraires; elle représente, par suite, une fonction jouissant des propriétés énoncées.

Si maintenant nous posons $\varphi(u) = \frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2}$, nous tirons de l'équation (1) la relation

$$\left[\frac{d\varphi(u)}{du}\right]^2 = A\varphi^3(u) + B\varphi^2(u) + C\varphi(u) + D,$$

où A, B, C, D sont des constantes. Cette relation nous montre la connexité des fonctions σ définies par l'équation (1) avec la théorie des fonctions elliptiques.

Mais alors on est amené à se demander s'il ne serait pas possible de démontrer directement, d'une manière analogue, l'existence d'une fonction transcendante entière de ρ variables $u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}$, telle que l'équation (4) soit vérifiée lorsqu'on y remplace $\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)})$ par cette fonction.

Il suffirait également de montrer d'abord qu'il est possible de satisfaire identiquement à l'équation (4) en y remplaçant $\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)})$ par une série entière de $u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}$. Sans doute l'expression des coefficients de cette série, en fonction d'un certain nombre de constantes arbitraires, se présentera sous une forme bien plus compliquée que dans le cas d'une variable u. Ces coefficients sont, en effet, nécessairement des fonctions algébriques des constantes arbitraires; cela résulte déjà de l'existence, pour $\rho > 1$, de plusieurs fonctions impaires $\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)})$ contenant les mêmes constantes arbitraires et satisfaisant à l'équation (4); de 6 par exemple pour $\rho = 2$. Cependant le grand développement auquel est parvenu le mécanisme de l'Algèbre me permet de croire que le problème posé ne saurait être considéré aujourd'hui comme impossible à résoudre.