Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue des publications académiques et périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 2 (1881), p. 5-236

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_2_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (1).

Tome VIII; 1879-80.

Laguerre. — Sur la fonction exponentielle. (11-18).

Si l'on considère l'expression

$$V = Fe^{ax} + F_1 e^{bx} + \ldots + F_{m-1} e^{lx},$$

où $a, b, c, \ldots, l$ désignent des constantes quelconques et $F, F_1, \ldots, F_{m-1}$ des polynômes de degrés $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, on peut disposer des coefficients de ces polynômes de façon que, en développant V suivant les puissances entières ascendantes de x, le développement commence par un terme en $x^{\mu+m-1}$, où $\mu = \alpha + \beta + \ldots + \lambda$. La détermination de ces polynômes a fait l'objet d'une Note de M. Hermite dans le *Journal de Borchardt* (t. 88); depuis, M. Laguerre a rattaché cette recherche à une équation différentielle linéaire d'ordre m. Dans cette Communication, il traite directement du cas où $m = 3$.

---

(1) Voir *Bulletin*, IV$_2$, 7.

Halphen. — Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide. (18-20).

Si par quatre points a, b, c, d d'une droite G passent quatre surfaces $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dont les quatre normales en ces quatre points appartiennent à un même hyperboloïde, et qu'on assujettisse a, b, c, d à rester respectivement sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le déplacement de G est généralement impossible ou ambigu.

Si par cinq points a, b, c, d, e d'un corps solide passent cinq surfaces $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ dont les normales en ces points soient rencontrées par deux mêmes droites, et qu'on assujettisse a, b, c, d, e à rester respectivement sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, le déplacement du solide est généralement impossible ou ambigu.

Laguerre. — Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels. (21-27).

Soit

$$Wz' = Vz + U$$

une telle équation où U, V, W sont des polynômes entiers en x, et supposons que z soit développable suivant les puissances décroissantes de x; soit f_n le polynôme de degré n, dénominateur de la réduite de rang n, en sorte que le développement de

$$z - \frac{\varphi_n}{f_n},$$

suivant les puissances décroissantes de x_n, commence par un terme en $\frac{1}{x^{2n+1}}$. La recherche des polynômes φ_n, f_n dépend d'une équation linéaire du second ordre

$$Wy'' + W_0 y' + W_1 y = 0,$$

dont les solutions sont

$$y_1 = f_n, \quad y_2 = e^{-\int \frac{V}{W} dx} (\varphi_n - f_n z)$$

et où l'on a fait

$$W_0 = V + W' - W\frac{\Theta'_n}{\Theta_n},$$

$$W_1 = \frac{K_n}{\Theta_n},$$

en représentant par K_n et par Θ_n des polynômes dont le dernier satisfait à l'équation

$$f_n^2 U + f_n \varphi_n V - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = A_n \Theta_n,$$

A_n étant un coefficient indépendant de x. Si l'on pose maintenant

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = P_n,$$

on a

$$f_{n+1} - Q_{n-1} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0,$$

$$\varphi_{n+1} - Q_{n-1} \varphi_n + P_{n-1} \varphi_{n-1} = 0,$$

$$Wf'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1},$$

$$W\varphi'_n = U f_n + (V - \Omega_n)\varphi_n - \Theta_n \varphi_{n+1}.$$

en faisant

$$Q_n = \frac{\Omega_{n+1} + \Omega_n + V}{\Theta_{n+1}},$$

et en représentant par Ω_n un polynôme entier dont le degré est indépendant de n, dont la forme est donnée par la troisième relation et que l'on détermine complètement en exprimant que, pour une valeur convenable de P_n, l'expression

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dx}$$

satisfait à l'équation différentielle

$$W u'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W}\right) u = 0.$$

L'auteur applique ces formules au développement de la fonction

$$z = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x},$$

puis, dans une Communication postérieure, à celui de la fonction

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega;$$

dans ce dernier cas, on a

$$W = x^2 - 1, \quad V = -2\omega, \quad U = 0.$$

Θ_n est une constante que l'auteur prend égale à -1. On trouve ensuite

$$P_n = (n+1)^2 - \omega^2,$$
$$\Omega_n = \omega - (n+1)x.$$

D'ailleurs l'équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont f_n et $\varphi_n \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\omega$ appartient au type de l'équation hypergéométrique, en sorte que la forme de f_n s'obtient aisément. Enfin M. Laguerre relie cette question au développement suivant les puissances de $x^2 - 1$ de la fonction $(x+z)^\omega$, ce qui le conduit à diverses formules intéressantes.

Lebon (*E.*). — Sur l'arête de rebroussement d'une développable. (27-30).

Halphen. — Observations sur la théorie des caractéristiques. (31-34).

Critique de diverses propositions contenues dans le *Kalkul der abzählenden Geometrie* de M. Schubert.

Laguerre. — Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (35-36).

Laguerre. — Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$. (36-52).

Cette dernière Communication a été analysée ci-dessus.

Holst (E.). — Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques. (52-59).

Pour vérifier que le produit de certaines fonctions algébriques

$$P = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$$

reste toujours constant, il suffit de démontrer qu'il ne peut jamais devenir nul (ou, ce qui revient au même, qu'il ne peut jamais devenir infini).

Applications. — I. Soient τ l'aire d'un triangle donné, T l'aire du triangle polaire réciproque par rapport à une ellipse $2a$, $2b$; soient enfin τ_1, τ_2, τ_3 les aires des trois triangles formés par le centre O de l'ellipse et deux des sommets de τ; on a

$$T = \frac{a^2 b^2}{4} \frac{\tau^2}{\tau_1 \tau_2 \tau_3}.$$

II. Soient données deux courbes planes φ, ψ. Appelons

$P_{N\varphi\psi}$ le produit des normales communes aux deux courbes, chaque normale étant comptée entre les deux pieds sur les deux courbes;

$P_{T\varphi\psi}$ le produit des tangentes communes aux deux courbes, chaque tangente étant comptée entre les deux points de contact;

$P_{N\varphi\,as\psi}$ le produit des normales communes à la courbe φ et aux asymptotes de la courbe ψ;

$P_{N\psi\,as\varphi}$ le produit analogue, en changeant les deux courbes.

On a

$$P_{N\varphi\psi} = P_{T\varphi\psi}\, P_{N\varphi\,as\psi}\, P_{N\psi\,as\varphi},$$

etc... ....

Schubert. — Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques. (60-61).

Schubert. — Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple. (61).

Halphen. — Sur une formule d'analyse. (62-64).

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\
&= \varphi\left(\frac{1}{x}\right) f^{(n)}(x) - \frac{n}{1}\,\frac{1}{x}\,\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(n-1)} \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{x^2}\,\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x^2}\right]^{(n-2)} - \dots \\
&\quad + (-1)^k\,\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}\,\frac{1}{x^k}\,\varphi^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x^k}\right]^{(n-k)} + \dots .
\end{aligned}$$

Romilly (W. de). — Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires. (64-72).

Étant donnée une fonction explicite z de deux fonctions arbitraires F_1, F_2 qui sont elles-mêmes fonctions de fonctions données φ_1 et φ_2 de x et de y, on peut se proposer d'éliminer les fonctions arbitraires et de trouver une relation entre la fonction explicite z de F_1 et F_2, les fonctions φ_1 et φ_2 et leurs différentielles. — Problème inverse.

Caron. — Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles. (73-74).

Laquière. — Rectification d'une formule de probabilité. (76-79).

Une droite l est divisée en m segments : quelle est la probabilité pour que n d'entre eux soient d'une longueur plus grande qu'une longueur donnée a?

Laquière. — Note sur un problème de probabilité. (79-81).

La probabilité que le centre O d'une courbe fermée tombe dans l'intérieur du triangle rectiligne ABC, dont les trois sommets sont pris au hasard dans l'intérieur de la surface limitée par la courbe, est égale à $\frac{1}{4}$.

Haag. — Note sur une classe d'équations différentielles. (80-81).

Sur l'équation différentielle

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^2 + A\left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)^2 + \ldots + L\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + M\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ny^2 + P = 0,$$

A, ..., P étant des constantes.

Laquière. — Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier. (82-102).

Léauté. — Note sur le calcul approché, par la méthode de Poncelet, des radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$. (106-109).

Poncelet a développé sa méthode d'approximation pour les radicaux de la forme $\sqrt{x^2+y^2}$; les formules relatives aux radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$ se déduisent de celles de Poncelet par le changement des lignes trigonométriques en lignes hyperboliques.

Laisant. — Remarques sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$. (109-111).

Humbert. — Sur l'équation hypergéométrique. (112-120).

Soit l'équation

$$\Delta y'' + G y' + F = 0,$$

où

$$\Delta = Ax^2 + Bx + C, \quad G = Dx + E,$$

qui se ramène aisément à l'équation hypergéométrique; elle admet comme solution un polynôme de degré n si l'équation du second degré

$$An(n-1) + Dn + F = 0$$

admet une solution entière positive n, l'autre racine n'étant pas en même temps entière et inférieure à $n - 1$.

Si K est une fonction de x satisfaisant à la relation

$$\frac{K'}{K}=\frac{G}{\Delta},$$

ce polynôme sera

$$P_n=\frac{\Delta}{K}D_n K\Delta^{n-1},$$

formule qui équivaut à une formule bien connue de Jacobi. Cette formule ne donne rien lorsque $K\Delta^{n-1}$ est une constante; dans ce cas, la solution la plus générale de l'équation est donnée par la formule

$$P_n=\Delta^n D_{n-1}\frac{\alpha x+\beta}{\Delta},$$

α et β étant des constantes arbitraires; on arrive à d'autres expressions des solutions de l'équation différentielle lorsqu'elle est satisfaite en remplaçant y par un polynôme, en faisant des substitutions appartenant au type

$$y=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta,$$

a et b étant les racines de l'équation $\Delta=0$.

Polignac (de). — Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications. (120-124).

Humbert. — Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme. (124-128).

Posant

$$\Delta(x)=Ax^2+Bx+C,\quad \frac{K'(x)}{K(x)}=\frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C},$$

l'auteur traite du développement de la fonction

$$\int\frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x-z)}$$

suivant les puissances croissantes de $\Delta(z)$.

Le Paige (C.). — Note sur les déterminants bordés. (128-132).

Soit Δ le discriminant de la forme quadratique à n variables

$$f=\Sigma a_{ik}x_i x_k;$$

soit Δ_1 le déterminant symétrique obtenu en bordant Δ de p rangées et de p colonnes composées chacune de n éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ et de p zéros; soit encore

$$F-\Sigma A_{ik}x_k$$

la forme adjointe de f; soit enfin

$$D = \begin{vmatrix} \sum \lambda_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \lambda_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \dots \\ \sum \mu_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \mu_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix};$$

on aura

$$2^p \Delta_1 \Delta^{p-1} = D.$$

Laquière. — Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier. (132-158).

Rodet (*L.*). — Le souan-pan des Chinois et la banque des argentiers. (158-168).

Lucas (*É.*). — Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern concernant les nombres de Bernoulli. (169-172).

Ces formules sont les suivantes :

$$B^p(B+1)^n = (-1)^{p+n} B^n (B+1)^p,$$
$$2^p B^p (2B+1)^n - B^p(B+1)^n + (-1)^{p+n}[2^n B^n (2B+1)^p - B^n(B+1)^p] = 0,$$

où, les opérations effectuées, les exposants doivent être remplacés par des indices.

Lucas (*É.*). — Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées. (173-182).

M. Lucas démontre trois propositions dues à M. Sylvester sur l'impossibilité de décomposer en cubes de nombres rationnels certaines classes de nombres entiers et donne en outre diverses propositions se rapportant au même sujet.

Pour que l'équation

$$X^3 + Y^3 = AZ^3$$

soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, il faut et il suffit que A appartienne à la forme $xy(x+y)$, préalablement débarrassée des facteurs cubiques qu'elle peut contenir.

Si x, y, z vérifient l'équation

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 3AZ^3,$$

on peut décomposer le nombre A en deux cubes ou résoudre l'équation

$$X^3 + Y^3 = AZ^3,$$

et cela par des formules qui expriment X, Y, Z par des fonctions homogènes du troisième degré en x, y, z.

Un nombre positif quelconque entier ou fractionnaire est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs.

Humbert. — Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions. (182-187).

Il s'agit en particulier des fonctions de la forme

$$(x^2-1)^\alpha \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega;$$

l'auteur donne la réduite générale.

Lucas (É.). — Sur l'extension du théorème de Descartes. (187-191).

Démonstration élémentaire d'un théorème dû à M. Laguerre.

Humbert. — Sur une généralisation de la théorie des fractions continues. (191-196).

Soit

$$\Delta(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

et soit $G(x)$ un polynôme de degré $n-1$; $K(x)$ étant une fonction définie par l'égalité

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{G(x)}{\Delta(x)},$$

posons

$$Z_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z} \qquad (i=1,\ldots,n),$$

en supposant que ces intégrales aient un sens, et considérons l'expression

$$P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots + P_n z_n,$$

où $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes entiers en x, de degré m et tels que la fonction précédente, développée suivant les puissances descendantes de x, commence par un terme en $\frac{1}{x^{(m+1n)}}$; le polynôme P_i a toutes ses racines réelles et comprises entre x_{i-1} et x_i, en supposant les quantités x_i réelles et rangées par ordre de grandeur.

Laguerre. — Sur la Géométrie de direction. (196-208).

Propositions de Géométrie concernant des *directions* et des *cycles*, droites ou cercles parcourus dans un sens déterminé.

Kantor (S.). — Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions. (208-218).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

Tome XCI; 1880 (suite).

N° 14; 4 octobre.

Tempel. — Observations de la comète Faye, faites à l'Observatoire de Florence-Arcetri. (573).

Crafts (J.). — Sur quelques questions thermométriques. (574).

N° 15; 11 octobre.

West. — Sur les équations algébriques. (598).

Bigourdan. — Éphémérides de la planète *b* 1880. (609).

Bigourdan. — Observations de la comète *d* 1880, découverte le 29 septembre par M. Hartwig à Strasbourg, faites à l'Observatoire de Paris. (610).

Pujet. — Sur la fonction résolvante de l'équation $x^m + px + q = 0$. (611).

De l'équation

$$x^m - kxy - y = 0$$

on déduit

$$(mx^{m-1} - ky)\,dx - (kx + 1)\,dy = 0,$$

et, en posant

$$mx^{m-1} - ky = z,$$

on obtient par élimination

$$x = \frac{my}{z + (1-m)ky},$$

$$m^m y^{m-1} = (z + ky)[z + (1-m)ky]^{m-1}.$$

Dans cette dernière équation, le coefficient de z est nul; elle fournit ainsi une relation de la forme

$$z^2\varphi(z) = m^m y^{m-1} - (1-m)^{m-1} k^m y^m.$$

(¹) Voir *Bulletin*, IV_2, 231.

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{m\,dt}{(m-1-t)(1+t)\sqrt{\psi(t)}} = \frac{k^{\frac{m}{2}}\,dy}{\sqrt{m^m y - k^m(1-m)^{m-1}y^2}},$$

en introduisant la variable $t = \frac{z}{ky}$ et en posant

$$\varphi(z) = k^{m-2}y^{m-2}\psi(t),$$

où $\psi(t)$ désigne une fonction entière de la variable t, à coefficients numériques et du degré $m-2$. Les conséquences sont évidentes.

Dillner (*G.*). — Sur une classe très étendue d'équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un produit algébrique irrationnel. (616).

Généralisation intéressante de résultats indiqués par M. Brioschi dans sa Communication du 9 août.

Lipschitz. — Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions. (619).

Les règles du calcul des imaginaires et du calcul des quaternions découlent de ce fait algébrique que le produit de deux sommes de deux carrés ou de quatre carrés s'exprime également par une somme de deux ou de quatre carrés. La méthode donnée par M. Hermite et par M. Cayley pour transformer la somme de n carrés en elle-même conduit M. Lipschitz à la découverte des règles d'un nouveau genre de calcul algébrique, où le calcul usuel des quantités imaginaires et le calcul des quaternions sont contenus comme les deux premiers cas. Cette généralisation est distincte de l'extension donnée par Hamilton du calcul des quaternions. M. Lipschitz se réserve de comparer ses recherches à celles de M. Frobenius, publiées dans le Tome 84 du *Journal de Borchardt*.

David. — Sur la partition des nombres. (621).

Cros (*C.*). — Sur les actions mécaniques de la lumière; considérations théoriques pouvant servir à interpréter les expériences réalisées par M. G. Bell. (622).

N° 16; 18 octobre.

Mouchez. — Longitude de la côte du Brésil. (635).

Breguet (*A.*). — Sur les expériences photophoniques du professeur Graham Bell et de M. Sumner Tainter. (652).

Thollon (*L.*). — Études spectroscopiques faites sur le Soleil, à l'Observatoire de Paris. (656).

Lipschitz. — Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions. (660).

West (*E.*). — Sur les équations algébriques. (664).

N° 17; 26 octobre.

Appell. — Sur les équations différentielles linéaires. (684).

Analogies entre ces équations et les équations algébriques. Les quantités analogues aux fonctions symétriques des racines sont des fonctions algébriques entières des éléments d'un système fondamental d'intégrales et de leurs dérivées, qui se reproduisent à un facteur constant près quand on remplace ces éléments par les éléments d'un autre système fondamental. On peut constituer une théorie de la transformation des équations différentielles linéaires analogue à celle de la transformation des équations algébriques. Enfin l'étude des équations différentielles linéaires entre les intégrales desquelles il existe une relation algébrique à coefficients constants permet, dans le cas du second ordre, de ramener l'intégration à des quadratures abéliennes.

Dillner (*G.*). — Sur la classe des équations différentielles linéaires de divers ordres, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un produit algébrique qui ne contient d'autre irrationnalité que la racine carrée d'un polynôme entier ou rationnel. (687).

Draper. — Photographie de la nébuleuse d'Orion.

N° 18; 2 novembre.

Callandreau (*O.*). — Éléments de l'orbite de la nouvelle planète (217), découverte par M. Coggia. (717).

West (*E.*). — Sur la résolution des équations algébriques; examen de la méthode de Lagrange. (718).

Dillner. — Sur les équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'une fonction rationnelle de la variable indépendante et d'un produit algébrique irrationnel. (721).

Picard (*E.*). — Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique. (723).

Soient u, v deux fonctions uniformes d'une variable z liées par la relation algébrique de degré m

$$F(u, v) = 0. \tag{1}$$

Si la courbe représentée par cette équation est unicursale, on voit aisément que u, v peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$u = \varphi_1[R(z)],$$
$$v = \varphi_1[R(z)],$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions rationnelles et $R(z)$ une fonction uniforme de z.

Dans le cas général, on supposera que l'équation (1) ait un terme en v^m et que le rapport $\frac{v}{u}$ ait m valeurs finies et distinctes pour $u = \infty$. Considérant alors une intégrale abélienne de première espèce, relative à l'équation (1),

$$\int \frac{f(u, v)}{F'_v(u, v)} du,$$

on reconnaît d'abord, par l'examen de ce qui se passe dans le voisinage soit d'un pôle de la fonction u, soit d'une valeur z_0 qui fait acquérir à u une valeur critique relativement à l'équation (1), que l'expression

$$\frac{f(u, v) \frac{du}{dv}}{F_v(u, v)}$$

est une fonction entière $G(z)$; on en conclut

$$\int_{u_0}^{u} \frac{f(u, v)\, du}{F_v(u, v)} = G^1(z),$$

$G_1(z)$ étant aussi une fonction entière. Or une telle relation entre les fonctions uniformes u et G_1 est impossible si l'espèce p de la courbe (1) est supérieure à 1. Si l'on a $p = 1$, on aura

$$u = F[G_1(z)], \quad v = F_1[G_1(z)],$$

F et F_1 étant des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes, et $G_1(z)$ une fonction entière.

Graham Bell. — Sur l'application du photophone à l'étude des bruits qui ont lieu à la surface solaire. (726).

N° 19; 8 novembre.

West (*E.*). — Sur les équations algébriques; examen des propositions d'Abel. (759).

N° 20; 15 novembre.

Brioschi. — Sur quelques équations différentielles linéaires. (807).

Si l'on considère l'équation linéaire du troisième ordre

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^3y}{du^3} = [(p+2)\lambda^2 \operatorname{sn}^2 u - \alpha]\dfrac{dy}{du} \\ \qquad + [(4-\rho)\lambda k^2 \operatorname{sn}^2 u + (4-\rho)k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \beta]y, \end{cases}$$

où les constantes ρ, λ, α, β, ω sont liées par les équations

$$(2)\quad \begin{cases} 3\lambda^2 - (\rho-1)\Omega + \alpha - (\rho+2)\dfrac{1+k^2}{3} = 0, \\ 2\lambda^2 - (\rho+2)\lambda\Omega - \rho\Omega_1 - \beta - (\rho-4)\dfrac{1+k^2}{3} = 0, \end{cases}$$

en supposant

$$\Omega = k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3}, \quad \Omega_1 = k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega,$$

on aura, en faisant successivement $\rho = 4$, $\rho = 1$, deux équations différentielles du troisième ordre, dont l'une a été étudiée par M. Picard, l'autre par M. Hermite (séance du 5 avril). Une intégrale particulière de cette équation différentielle linéaire du troisième ordre est égale au produit de deux intégrales particulières de deux équations de Lamé dont pour l'une $n = 0$, pour l'autre $n = 1$, et les valeurs des constantes λ, ω de ces équations sont données par les relations (2).

Lecornu. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. (809).

Le travail de M. Lecornu, dont cette Note contient les résultats principaux, a été analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

N° 21; 22 novembre.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1880. (833).

Poincaré. — Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. (844).

L'auteur a, dans un Mémoire précédent (séance du 14 juin), étudié les questions relatives à la réduction et à l'équivalence des formes cubiques ternaires : parmi ces formes, celles qui sont décomposables en un facteur linéaire et un facteur quadratique conduisent à étudier la réduction d'un système composé d'une forme linéaire et d'une forme quadratique.

Il peut arriver que cette réduction se ramène à celle d'une forme définie, que l'on obtienne un nombre fini de systèmes réduits, ou enfin que la réduction se ramène à celle d'une forme quadratique indéfinie : c'est le cas le plus intéressant, le seul où il y ait des substitutions semblables.

M. Poincaré s'occupe en particulier des transformations binaires, à coefficients entiers, qui reproduisent un système composé d'une forme linéaire et d'une forme quadratique.

Gaillot (A.). — Sur les Tables du mouvement de Saturne de Le Verrier. (847).

Laguerre. — Sur une propriété des polynômes X_n de Legendre. (849).

Étant donné un polynôme entier $F(x)$, ordonné comme il suit,

$$F(x) = AX_m + BX_p + CX_q + \ldots,$$

A, B, ... étant des constantes et les entiers m, p, q, ... allant en croissant, le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$, qui sont égales ou supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$A, B, C, \ldots.$$

Angot (A.). — Tables nouvelles pour calculer les hauteurs au moyen des observations barométriques.

N° 22; 29 novembre.

Floquet (G.). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.

Si les coefficients d'une équation différentielle linéaire sont simplement périodiques, les éléments d'un système fondamental d'intégrales se partagent en groupes, tels que

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= e^{rx}\varphi_{11}(x),\\
F_2(x) &= e^{rx}[\varphi_{21}(x) + x\varphi_{22}(x)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F_\lambda(x) &= e^{rx}[\varphi_{\lambda 1}(x) + x\varphi_{\lambda 2}(x) + \ldots + x^{\lambda-1}\varphi_{\lambda\lambda}(x)],
\end{aligned}$$

où les φ désignent des fonctions de la période ω des coefficients.

Si l'expression

$$f(x) = e^{\rho x}[\psi_0(x) + x\psi_1(x) + \ldots + x^\nu \psi_\nu(x)]$$

est une intégrale de l'équation différentielle, les ψ désignant des fonctions de période ω, il en sera de même des ν premières dérivées de cette intégrale, prises en considérant $e^{\rho x}$ et les $\psi(x)$ comme des constantes.

N° 23; 6 décembre.

Tisserand (*F.*). — Sur le développement d'une fonction quelconque du rayon vecteur dans le mouvement elliptique. (897).

En désignant par a, e, ζ, r le demi-grand axe, l'excentricité, l'anomalie moyenne et le rayon vecteur dans l'orbite elliptique d'une planète, on a

$$\frac{r}{a} = A_0 + A_1 \cos\zeta + \ldots + A_n \cos n\zeta + \ldots,$$

où les coefficients A sont des fonctions de e qui s'expriment simplement à l'aide des transcendantes de Bessel; M. Tisserand montre que, dans le développement correspondant,

$$f(r) = B_0 + B_1 \cos\zeta + \ldots + B_n \cos n\zeta,$$

le coefficient B_n est donné par la formule

$$\frac{1}{2} B_n = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^{n+2p}}{p!\,(p+n)!}\, u(u-n)^{n+p-1}(u+n)^{p-1}(u+n+2p);$$

quand on aura effectué le développement de l'expression

$$u(u-n)^{n+p-1}(u+n)^{p-1}(u+n+2p)$$

suivant les puissances entières et positives de u, on devra y remplacer u^i par $a^i \frac{d^i f(a)}{da^i}$, en désignant par $\frac{d^i f(a)}{da^i}$ la valeur à laquelle se réduit $\frac{d^i f(r)}{dr^i}$ quand on y fait $r = a$.

Bigourdan. — Observations de la comète d 1880 (Hartwig), faites à l'Observatoire de Paris. (917).

Schulhof et *Bossert.* — Sur la comète Hartwig (d 1880) et sur la comète Swift (e 1880). (918).

Laussedat. — Sur la méthode employée par d'Aubuisson, en 1810, pour la mesure des bases géodésiques. (922).

Angot (*A.*). — Sur le calcul des hauteurs au moyen des observations barométriques. (924).

André (*Ch.*). — Sur la distribution des températures dans les couches inférieures de l'atmosphère. (927).

Mercadier (*E.*). — Sur la radiophonie. (929).

N° 24; 13 décembre.

Gyldén. — Sur l'orbite que parcourt un point matériel attiré par un sphéroïde. (957).

Dans le cas qui intéresse l'Astronomie, la force d'attraction est exprimée, avec une approximation suffisante, par la formule

$$-\frac{r^2}{\mu}-\frac{3\mu^2}{r^4},$$

où

$$\mu^2=\frac{1}{2}(2C-A-B);$$

en représentant par A, B, C les moments d'inertie du sphéroïde, M. Gyldén examine le cas où l'orbite est située dans le plan de l'équateur et où elle est fermée.

Schulhof et *Bossert.* — Comète Swift (e 1880). (965).

Darboux (*G.*). — Sur le contact des coniques et des surfaces. (969).

Par chaque point d'une cyclide passent dix cercles; ce nombre de dix séries de sections circulaires est un maximum et n'est atteint que pour les cyclides; pour le démontrer, M. Darboux a étudié le contact d'une conique et d'une surface et examiné particulièrement le cas où cette conique est un cercle.

Si, dans une surface (S), on considère toutes les sections planes passant par une même droite tangente en un point simple O, le lieu des coniques osculatrices de ces sections à leur point de contact commun avec la tangente est une surface du second degré ayant un contact du second ordre avec la surface (S).

Étant donnée une surface quelconque (Q) à neuf paramètres, on peut en général disposer de ces paramètres de telle manière que la surface soit osculatrice en O à la surface (S), et de telle manière que les trois tangentes au point triple de la courbe de section des deux surfaces en O soient confondues suivant une tangente quelconque (T) donnée à l'avance. Dans le cas où la surface (Q) est du second degré, la tangente (T) ne peut pas être prise arbitrairement; elle ne peut avoir que trois positions, et alors il y a une infinité de surfaces du second degré correspondantes à chacune de ces directions. La théorie du contact d'une surface du second degré avec une surface quelconque conduit donc à un système de lignes analogues aux lignes de courbure et définies par une équation différentielle du premier ordre et du troisième degré en $\frac{dy}{dx}$. Trois surfaces particulières du second degré peuvent être considérées comme ayant le contact le plus intime possible avec la surface proposée.

Les plans qui coupent la surface (S) suivant des sections planes surosculées en O par une conique enveloppent un cône de neuvième classe admettant le plan tangent en O pour plan tangent sextuple.

En dehors des surfaces du second ordre, il n'y a que la surface de Steiner et ses variétés et la surface réglée du troisième ordre qui admettent une infinité de coniques passant par chaque point de la surface.

Il y a en général vingt-sept coniques qui coupent la surface (S) en sept points confondus au point O.

Les plans qui coupent la surface (S) suivant des sections surosculées en O par un cercle enveloppent un cône de cinquième classe admettant le plan tangent pour plan tangent quadruple.

Le lieu des pôles des inversions qui transforment la surface (S) en une autre (S′) pouvant avoir au point O′, inverse de O, un contact du troisième ordre avec une surface du second ordre est une courbe du sixième ordre qui est l'inverse, par rapport à O, d'une cubique gauche.

Par chaque point simple de la surface (S), il passe en général dix cercles coupant la surface en cinq points confondus. En d'autres termes, il y a dix sections dont les coniques osculatrices sont des cercles.

S'il y a plus de dix cercles, le point est nécessairement un ombilic.

Une surface ne peut admettre plus de dix cercles passant en chaque point sans se réduire à une sphère.

Les seules surfaces qui admettent dix séries de sections circulaires sont les cyclides.

Appell. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires. (972).

Considérons une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(x,y)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + \varphi_n(x,y)\, z = 0,$$

dans laquelle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions rationnelles de x et y, y étant la fonction algébrique de x définie par l'équation

$$F(x,y) = 0,$$

représentant une courbe d'ordre m, de genre p et contenant un terme en y^m. Les coefficients φ possèdent deux sortes de points singuliers : 1° les points ξ_k, η_k de la courbe $F = 0$, où certaines des fonctions φ deviennent infinies; 2° les points critiques de la fonction algébrique y de x, que l'on suppose distincts des points ξ_k, η_k. Supposant aussi que ces derniers points et le point ∞ soient des pôles ou des points ordinaires de la fonction intégrale, M. Appell montre qu'il existe une fonction intégrale $\psi(x,y)$ qui se reproduit, multipliée par un facteur constant, toutes les fois que le point (x,y) décrit un cycle simple. Le nombre de ces multiplicateurs distincts est $2p$.

Soient $u^i(x,y)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ les p intégrales abéliennes normales de première espèce; considérons les cycles qui donnent les $2p$ périodes normales, à savoir, pour l'intégrale $u^{(i)}$, les périodes

$$\begin{array}{llllll}
\omega_1^{(i)} = 0, & \omega_3^{(i)} = 0, & \ldots, & \omega_i^{(2i-1)} = 2\pi\sqrt{-1}, & \ldots, & \omega_{2p-1}^{(i)} = 0,\\
\omega_2^{(i)} = 2\alpha_{i1}, & \omega_4^{(i)} = 2\alpha_{i2}, & \ldots, & \omega_{2i}^{(i)} = 2\alpha_{ii}, & \ldots, & \omega_{2p}^{(i)} = 2\alpha_{ip};
\end{array}$$

à ces cycles répondront, pour la fonction intégrale $\psi(x,y)$, $2p$ multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p}$, le facteur μ_k correspondant au cycle qui donne $\omega_k^{(i)}$. Soit $\Theta(x)$ la fonction Θ de p variables formée avec les nombres α_{ik}, et considérons la fonction

$$\mathrm{T}(x,y)=\frac{\Theta[u^{(i)}(x,y)-g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y)]}e^{\lambda_1 u^{(1)}(x,y)+\lambda_2 u^{(2)}(x,y)+\ldots+\lambda_p u^{(p)}(x,y)},$$

où λ_i et g_i sont des constantes. Si le point (x,y) décrit un cycle donnant pour les intégrales abéliennes une période à indice impair $2i-1$, la fonction $\mathrm{T}(x,y)$ se reproduit, multipliée par $e^{2\lambda_i\pi\sqrt{-1}}$; on détermine les p constantes λ_i de façon que cette intégrale soit égale à

$$\frac{1}{\mu_{1i-1}}\quad (i=1,2,\ldots,p);$$

on détermine de même les constantes g_i de façon que

$$e^{2(\lambda_1\alpha_{1i}+\lambda_2\alpha_{2i}+\ldots+\lambda_p\alpha_{pi})+g_i}$$

soit égale à

$$\frac{1}{\mu_{2i}}\quad (i=1,2,\ldots,p).$$

Dès lors, la fonction $\psi(x,y)$ peut se mettre sous la forme

$$\psi(x,y)=\frac{\mathrm{R}(x,y)}{\mathrm{T}(x,y)},$$

$\mathrm{R}(x,y)$ étant une fonction rationnelle de x,y.

Collet (J.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Les diverses méthodes pour l'intégration de ces équations se ramènent à l'intégration d'une équation de la forme

$$(1)\qquad dz-p_1dx_1-p_2dx_2-\ldots-p_ndx_n=0,$$

où les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont fournies par n équations distinctes

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad \ldots,\quad f_n=0,$$

dont les premiers membres sont astreints à satisfaire à $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions de la forme

$$0=(f_h,f_k)=\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{\partial f_h}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f_k}{\partial z}\right)-\frac{\partial f_k}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f_h}{\partial z}\right)\right].$$

Lorsque la fonction z n'entre pas dans ces équations, le premier membre de l'équation (1) est une différentielle exacte; lorsqu'elle entre, *il existe toujours un facteur d'intégration.*

Mittag-Leffler. — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (978).

Soient U, V d'une part, u, v de l'autre, des intégrales linéairement indépendantes des équations

$$z''+\mathrm{P}z'+\mathrm{Q}z=0,$$
$$y''+py'+qy=0.$$

Soit $\varphi(x, \xi)$ une fonction rationnelle de ξ, dont les coefficients soient des fonctions uniformes de x; si l'on suppose

$$\frac{V'}{V} = \varphi\left(x, \frac{v'}{v}\right), \quad \frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}\right),$$

on peut obtenir P et Q sous forme de fonctions symétriques par rapport à $\frac{v'}{v}$ et $\frac{u'}{u}$, et par suite sous forme de fonctions rationnelles de $\frac{v'}{v} + \frac{u'}{u}$ et de $\frac{v'}{v}\frac{u'}{u}$ ou de $\frac{F'(x)}{F(x)}$ et de $\frac{1}{2}\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{1}{2}p\frac{F'(x)}{F(x)} + q$, en posant $uv = F(x)$; les coefficients, dans ces expressions rationnelles, sont des fonctions uniformes de x. Si maintenant l'on suppose que, dans $\varphi(x, \xi)$, les coefficients des diverses puissances de ξ soient des fonctions doublement périodiques de x, et que p et q soient aussi des fonctions doublement périodiques, telles que le quotient $\frac{F'(x)}{F(x)}$ soit lui-même doublement périodique, il en sera de même des coefficients P, Q de l'équation $z'' + Pz' + Qz = 0$, et des deux expressions de $\frac{V'}{V}$ et $\frac{U'}{U}$ on conclut un système d'intégrales qui, en général, ne sont pas uniformes. En supposant $\varphi(x, \xi) = \omega\xi$, on retombe au cas traité par M. Hermite.

N° 25; 20 décembre.

Discours prononcés aux funérailles de M. Chasles par MM. Bertrand, Bouquet, Laussedat, Dumas et Rolland.

N° 26; 27 décembre.

Hermite. — Sur la série de Fourier et autres représentations analytiques des fonctions d'une variable réelle. (1018).

M. Hermite, après quelques mots sur les travaux de M. Liouville, de Sturm, de M. Lipschitz, de M. P. du Bois-Reymond, fait l'éloge du Livre de M. Ulysse Dini, *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale.*

Cornu (A.). — Sur la vitesse de propagation de la lumière. (1019).

Cruls. — Détermination de la durée de la rotation de la planète Jupiter. (1049).

Schulhof et *Bossert.* — Sur la comète Hartwig (*d* 1880). (1051).

Tacchini. — Observations solaires, faites à l'Observatoire Royal du Collège Romain, pendant le troisième trimestre de 1880. (1053).

Tacchini. — Observations de la comète Swift (e 1880), faites à l'Observatoire Royal du Collège Romain. (1054).

Moutard. — Sur le contact des coniques et des surfaces. (1055).

Réclamation de priorité au sujet de ceux des théorèmes de M. Darboux, communiqués dans la séance du 13 décembre, qui concernent les coniques *quelconques* osculatrices à une surface en un point donné. M. Moutard indique aussi la méthode géométrique dont il s'est servi pour étudier cette question; il emploie, pour étudier les éléments différentiels d'une surface algébrique (S) d'ordre m, en un point A, une surface dérivée (Δ), à savoir : le lieu du point qu'on obtient en portant sur chaque transversale issue du point A le rayon vecteur dont l'inverse est égal à la moyenne arithmétique des inverses des rayons vecteurs limités à tous les points d'intersection restants, sauf un seul, de la transversale et de la surface (S).

Cette surface (Δ) est d'ordre $2m-3$; elle renferme comme droites multiples d'ordre $m-3$ les deux osculatrices de (S) en A; le complément de son intersection avec le plan tangent est une cubique (Γ) située sur la polaire du troisième ordre de A par rapport à (S); l'orientation des plans tangents à (Δ) aux divers points de (Γ), la direction des droites osculatrices à (Δ) en ces mêmes points, la position des droites qui surosculent (Δ) en un point de (Γ), ne dépendent respectivement que des polaires du quatrième, du cinquième, du sixième ordre de A par rapport à (S).

Toute conique (C) ayant avec une surface algébrique (S) d'ordre m un contact du second ordre au point A est associée à une droite (D) située dans son plan, de telle manière que, sur toute transversale menée dans ce plan par le point A, la somme de l'inverse du rayon vecteur limité à (C) et de ($m-2$) fois l'inverse de celui qui est limité à (D) est égale à la somme des inverses des rayons vecteurs limités à (S). Le contact de (C) et de (S) monte au troisième ordre quand la droite (D) rencontre en un point I la courbe (Γ) et, en général, à l'ordre $n+3$ lorsque (D) a en I un contact de l'ordre n avec (Δ).

Picard (E.). — Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, et sur une classe d'équations différentielles linéaires. (1058).

Considérant les équations différentielles de la forme

$$F\left(u, \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0, \tag{1}$$

F étant un polynôme, l'auteur cherche dans quel cas elles admettent des intégrales uniformes. Il résulte tout d'abord d'une Communication précédemment analysée que le nombre p relatif à la relation algébrique (1) est égal à 0 ou à 1 et que l'on devra avoir

$$u = \varphi(R), \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \varphi_2(R),$$

φ et φ_1 désignant dans le premier cas des fonctions rationnelles, dans le second des fonctions doublement périodiques à mêmes périodes, et R désignant dans le premier cas une fonction uniforme, dans le second une fonction entière; on en déduit

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \frac{2\int\varphi_1(R)\,\varphi'(R)\,dR}{[\varphi'(R)]^2}.$$

Si $p = 0$, cette équation ne pourra admettre d'intégrale uniforme que si l'expression $\int\varphi_1(R)\,\varphi'(R)\,dR$ est rationnelle ; on est ramené alors à chercher si l'on peut déterminer la constante d'intégration de façon que le quotient $\frac{\int\varphi_1\varphi'\,dR}{\varphi'^2}$ se réduise à un polynôme de degré au plus égal à 4.

Si $p = 1$, il faut que le même quotient se réduise à une constante ; on aura alors $\varphi'(R) = A^2\varphi''(R)$, A étant une constante, et $R(z)$ aura la forme linéaire $Az + B$. Toutes les intégrales de l'équation (1) ne sont pas d'ailleurs uniformes dans ce cas.

ZEITSCHRIFT für Mathematik und Physik (1).

Tome XXIV ; 1879.

Beez. — Sur la mesure, d'après Riemann, de la courbure des multiplicités d'ordre supérieur. (1-17, 65-82).

Le travail de M. Beez se rapporte à la seconde Partie de la *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quæstioni ab illustrissima Academia Parisiensi propositæ,* publiée dans les Œuvres complètes de Riemann (p. 370). Cette seconde Partie, d'un caractère purement analytique, est intitulée *De transformatione expressionis* $\Sigma_{u}{}' b_{u}\, ds_{\iota} ds_{\iota}'$ *in formam datam* $\Sigma_{u}{}' a_{u}{}' dx^{\iota} dx^{\nu}$. C'est là qu'on peut trouver la base de la théorie de la mesure de la courbure attribuée à Riemann et comme la conclusion de son *Habilitationsschrift* « *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* » Toutefois l'interprétation géométrique donnée par Riemann des beaux résultats analytiques obtenus par lui paraît à M. Beez entièrement accessoire et sujette à revision ; c'est cette revision qu'il entreprend, et il arrive à la conclusion suivante : *Il est impossible d'étendre la théorie ordinaire de la courbure aux surfaces d'un espace plan de plus de trois dimensions.*

Hochheim (Ad.). — Sur les surfaces polaires des surfaces réglées du troisième ordre. (18-31).

Équations des surfaces polaires du second et du premier ordre, surfaces diamétrales, surface de Hesse, points paraboliques, tangentes d'inflexion, etc.

Matthiessen (L.). — Formes générales, de Clebsch et Aronhold, pour les racines des équations du second, du troisième et du quatrième degré. (32-39).

Chwolson (O.). — Sur le problème de l'induction magnétique de deux sphères. (40-53).

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 151.

Kantor (*S.*). — Recherches géométriques. (54-57).

Niemöller. — Sur une application des fonctions sphériques. (57-60).

« Étant donnée la fonction

$$\varphi(y) = \frac{c_0}{y} + \frac{c_1}{y^2} + \frac{c_2}{y^3} + \dots,$$

trouver la fonction $f(x)$ telle que l'on ait

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{y-x} = \varphi(y). \text{ »}$$

Schmidt (*A.*). — Sur la surface de l'onde dans un milieu isotrope non homogène. (60-62).

Schoenflies (*A.*). — Remarque sur le Mémoire *Ueber ein specielles Hyperboloid....* (62-63).

Voir *Zeitschrift*, XXIII, 269, et *Bulletin*, II_2, 154.

Rodenberg (*C.*). — Sur un problème de maximum. (63-66).

« Diviser un nombre donné en parties égales dont le produit soit maximum. »

Thomae (*J.*). — Exemple d'une fonction discontinue une infinité de fois. (64.).

Schlegel (*V.*). — Sur les nouvelles méthodes géométriques et leur liaison avec la *Science de l'étendue* de Grassmann. (82-95).

1. Le *Punktcalcul* de Gauss-Siebeck. — 2. Les coordonnées barycentriques de Möbius, le rapport anharmonique de Chasles, les coordonnées trilinéaires de Schendel. — 3. La Géométrie non euclidienne. — 4. Sur la représentation des imaginaires de Björling. — 5. Sur les quaternions de Hamilton.

Günther (*S.*). — Sur la représentation explicite des déterminants réguliers de coefficients binomiaux. (96-103).

M. Günther désigne ainsi un déterminant d'ordre p dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est composée des éléments

$$\binom{m_i}{n_1}, \quad \binom{m_i}{n_2}, \quad \dots, \quad \binom{m_i}{n_p},$$

où m et n sont des entiers quelconques positifs et où l'on suppose que les nombres n vont en croissant avec leur indice.

Hagen (*J.*). — Sur la théorie des trois figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide homogène tournant librement. (104-115).

L'auteur suit une méthode donnée par M. A. Giesen, dans le *Zeitschrift* (t. XXI,

p. 1), pour traiter les problèmes d'Hydrodynamique relatifs à des ellipsoïdes de petites excentricités et qui consiste à négliger les puissances des excentricités supérieures à 2.

De cette façon, il parvient simplement, lorsque la vitesse de rotation est très petite, aux trois figures ellipsoïdales connues pour l'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation, ainsi qu'aux figures limites.

Röllner (*F.*). — Génération d'une surface du second ordre au moyen de deux faisceaux de sphères projectifs. (116-119).

Schur (*F.*). — Démonstration synthétique de l'identité d'une *Tripelcurve* avec la courbe engendrée par un faisceau de coniques et un faisceau projectif de droites. (119-123).

Schlegel (*V.*). — Généralisation d'un paradoxe géométrique. (123-128).

Étant donné un carré, on le décompose, par une parallèle à l'un des côtés, en deux rectangles dont les surfaces soient entre elles comme les entiers a, b ($a < b$); prenons pour unité la $(a+b)^{\text{ième}}$ partie du côté. On décompose le petit rectangle en deux triangles rectangles et le grand en deux trapèzes égaux dont les bases soient a, b : le rectangle dont les côtés sont b et $a+2b$ ne diffère de la somme des quatre figures ainsi formées, si les nombres sont convenablement choisis, que par un petit parallélogramme allongé. L'auteur se propose de déterminer les nombres a, b de façon que l'aire de ce parallélogramme soit égale à 1.

Geisenheimer (*L.*). — Recherches sur le mouvement d'un système mobile qui reste semblable à lui-même. (128-158).

Le résultat principal de ces recherches est l'établissement d'une formule et d'une construction pour le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe plane mobile dans son plan, qui, dans le cas où la similitude se réduit à l'égalité, reviennent à la formule et à la construction de Savary.

Weiler. — L'involution sur une courbe gauche du troisième ordre. (159-167).

Étant donnée une telle courbe, un faisceau de plans en involution passant par une sécante détermine sur elle une involution. Soient a, a' les tangentes en deux points correspondants; on considère la congruence linéaire dont les droites a, a' sont les directrices; l'ensemble de toutes ces congruences constitue un complexe du troisième ordre qu'étudie M. Weiler.

Zech (*P.*). — Passage d'un faisceau étroit de rayons par un prisme (168-179).

Enneper (*A.*). — Sur les lignes de courbure d'une surface algébrique. (180-187).

Cette surface a été définie par M. Laguerre (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 145-156; *Bulletin*, 2e série, t. I, IIe Partie, p. 329), et M. Laguerre en a déterminé géométriquement les lignes de courbure. M. Enneper établit qu'elle peut être regardée comme l'enveloppe de la surface du second ordre

$$\frac{x^2}{s+a}+\frac{y^2}{s+b}+z^2\frac{s+\alpha+\beta-c}{(s+\alpha)(s+\beta)}-1=0,$$

où s est un paramètre variable; il montre en outre comment l'équation différentielle du second degré des lignes de courbure se décompose aisément en deux équations du premier degré qui s'intègrent sans difficulté.

Pilgrim (*L.*). — Sur le nombre de parties dans lesquelles on peut décomposer une figure de k dimensions au moyen de n figures de $k-1$ dimensions. (188-192).

Résultats généraux analogues à ces propositions particulières : un plan est décomposé par six droites en seize parties, dont dix sont finies; un espace est décomposé par dix plans en cent trente parties, dont quatre-vingt-quatre sont finies, etc.

Wittwer (*C.*). — Sur la dépendance entre la chaleur spécifique des corps et leur température. (183-205).

Rachmaninoff. — Le principe du plus petit travail des forces perdues comme principe général de la Mécanique. (206-220).

Il s'agit du principe de Gauss (*Princip des kleinsten Zwanges*), lequel peut être regardé comme un principe du plus petit travail des forces perdues. M. Rachmaninoff l'énonce sous la forme suivante : « Dans le mouvement d'un système de points matériels, le travail que produiraient les forces perdues par le mouvement libre du même système est un minimum; l'accroissement infiniment petit de ce travail est positif pour tout déplacement qui, combiné avec le déplacement réel, produirait un déplacement possible. »

L'auteur montre en outre la connexion de ce principe avec les principes généraux de la Mécanique.

Thieme (*H.*). — Sur la définition des figures géométriques par la construction de leur système polaire. (221-238, 276-284).

Les recherches de M. Cremona et de M. Frahm ont montré qu'un réseau de courbes planes d'ordre $n>2$ ou de surfaces d'ordre $n \geqq 2$ ne pouvait pas, en général, être regardé comme le réseau des premières courbes ou surfaces polaires pour une courbe ou une surface d'ordre $n+1$; il y a donc lieu de chercher à construire les figures générales (à 1, 2, 3 dimensions) qui constituent les systèmes des premières polaires des figures de même dimension et d'ordre immédiatement supérieur. S'occupant spécialement du cas des surfaces, M. Thieme montre comment la solution de ce problème peut conduire à la définition purement géométrique d'une surface d'ordre $n+1$, en partant de la surface d'ordre n; il établit ainsi, indépendamment de toute considération algébrique, qu'une surface d'ordre $n+1$ est déterminée en général par $\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}-1$ points et qu'elle est rencontrée par une droite, au plus en $n+1$ points.

Giesen (*A.*). — Oscillations d'une masse fluide homogène sous l'influence de la tension superficielle. (230-238).

Graetz (*L.*). — Quelques théorèmes sur les mouvements de tournoiement dans les liquides visqueux. (239-244).

L'auteur montre que, si dans un liquide visqueux incompressible on a

$$\Delta\pi = 0, \quad \Delta\chi = 0, \quad \Delta\rho = 0,$$

π, χ, ρ désignant les composantes de la vitesse de rotation au point (x, y, z) et le symbole Δ désignant l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

les propositions de M. Helmholtz sur le mouvement de tournoiement (*Wirbelbewegung*) dans un liquide parfait subsistent pour un liquide visqueux.

Günther (*S.*). — Une relation entre les puissances et les déterminants. (245-256).

Démonstration d'une proposition communiquée à M. Günther par M. Brocard.

Le déterminant du septième ordre

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

est égal à ρ^3; le déterminant Δ_{2m+1}, d'une structure analogue, est égal à $(m+2)^m$.

Weiler (*A.*). — Démonstration simple du théorème de Desargues. (248-250).

Küttner (*W.*). — Sur la théorie des nombres de Bernoulli. (250-252).

Démonstration de la relation

$$B_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{i=0}^{i=2n-2} (-1)^{i+1} \frac{(2n-1-i)!}{2n+1-i} S_{i.2n-i}\right],$$

où les S sont déterminés par la relation

$$1 + 2S_{k,2} + 3S_{k,3} + \ldots + pS_{k,p} = S_{k+1,p} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

avec $S_{0,p} = 1$.

Heymann (W.). — Remarques sur l'équation différentielle

$$x\varphi(y') + y\psi(y') + \chi(y') = 0.$$

(252-255).

L'auteur transforme cette équation en une équation différentielle linéaire en substituant les coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles et examine divers cas d'intégrabilité.

Holzmüller. — Démonstration géométrique élémentaire d'un théorème de Mécanique. (255-256).

Enneper (A.). — Coordonnées isométriques sur la surface de la sphère. (256).

Si l'on pose

$$x = \operatorname{sn} u \operatorname{dn} v, \quad y = \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v, \quad z = \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v,$$

on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u - k'^2 \operatorname{sn}^2 v,$$

qui montrent bien que les coordonnées u, v constituent sur la sphère un système isométrique; si maintenant u, v sont des fonctions quelconques de p, q, on reconnaît aisément que, pour que ces dernières coordonnées soient isométriques, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \pm\frac{\partial v}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \mp\frac{\partial v}{\partial p},$$

en sorte que u, v doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = 0.$$

Mehmke (R.). — Géométrie du cercle dans le plan. (257-269).

Un réseau de cercles est l'ensemble des cercles orthogonaux à un cercle donné, dit *cercle polaire du réseau*, lequel est lui-même le réseau polaire de ce cercle; un faisceau de cercles est l'ensemble des cercles orthogonaux à deux cercles donnés; les réseaux polaires de tous les cercles d'un faisceau ont en commun un faisceau de cercles, dit *faisceau polaire du premier*. Un faisceau est dit normal à un réseau quand il en contient le cercle polaire. Il n'y a qu'un seul faisceau qui contienne un cercle donné et soit normal à un réseau donné, lorsque le cercle et le réseau ne sont pas polaires. Le cercle d'intersection de ce faisceau et du réseau est la projection normale du cercle donné sur le réseau donné. La projection normale d'un cercle sur un faisceau est le cercle du faisceau tel que le faisceau qui le joint au cercle donné rencontre le faisceau polaire du faisceau donné; l'angle de deux réseaux est l'angle de leurs cercles polaires; l'angle d'un cercle et d'un réseau est l'angle du cercle et de sa projection normale sur le réseau; de même pour l'angle d'un cercle et d'un faisceau, etc.... Ces diverses définitions laissent apercevoir la possibilité d'une Géométrie dont le cercle est l'élément et dont M. Mehmke développe diverses propositions, en faisant ressortir l'analogie des résultats qu'il obtient avec la Géométrie non euclidienne.

Niemöller (*F.*). — Déformation d'une plaque plane circulaire infiniment mince sous l'influence de la chaleur, quand la température des différents points de la plaque est une fonction continue de leur distance au centre de la plaque. (270-275).

Hagen (*J.*). — Sur l'application du pendule à la représentation graphique des courbes de Lissajous. (285-303).

Matthiessen (*L.*). — Équations différentielles de la dioptrique des lentilles à disposition continue; application à la dioptrique du cristallin. (304-315).

Frenzel (*C.*). — Représentation des fonctions analytiques uniformes par des produits infinis ou des séries de fractions simples. (316-343).

L'auteur, en suivant la voie ouverte par Cauchy pour la décomposition d'une fonction uniforme en facteurs, s'efforce de parvenir à la démonstration de la proposition donnée par M. Weierstrass dans son Mémoire sur les fonctions uniformes relativement à leur décomposition en facteurs *primaires;* il donne ensuite des applications aux fonctions circulaires et elliptiques; malheureusement, si l'analyse de M. Frenzel est simple, on est obligé de reconnaître qu'elle manque de rigueur. La critique de son travail a d'ailleurs été faite dans le Volume suivant du *Zeitschrift* par M. Herz, qui a mis en évidence les points défectueux.

Schwering (*K.*). — Nouveau problème élémentaire touchant la condition qu'une certaine suite d'opérations soit limitée. (343).

Geisenheimer (*L.*). — Construction de figures en affinité au moyen de systèmes qui se meuvent en restant semblables à eux-mêmes. (344-380).

« Deux systèmes sont en affinité quand ils sont homographiques et que les éléments à l'infini se correspondent. »

Le mouvement d'un système mobile toujours semblable à lui-même est connu quand on connaît à chaque instant la position de deux de ses points. Un tel mouvement sera donc connu quand on connaîtra deux trajectoires et la façon dont se correspondent sur ces trajectoires les points qui à chaque instant peuvent être regardés comme les positions de deux points du système mobile. M. Burmester a montré que, lorsque les points ainsi correspondants formaient deux suites en affinité, il en est de même de deux suites décrites par deux points quelconques du système. Cette proposition et ses conséquences sont étudiées en détail par M. Geisenheimer, qui en déduit divers résultats intéressants relatifs à la courbure de deux courbes en affinité.

Hauck (*G.*). — Sur la concordance ou la discordance de la collinéation dans l'espace. (381-390).

L'auteur revient sur une proposition qu'il a établie dans le *Zeitschrift* (t. XXI, p. 407) : « Dans deux espaces collinéaires, deux trièdres correspondants offrent toujours ou la même disposition ou des dispositions inverses. » La collinéation, suivant les cas, est dite concordante ou discordante; son caractère est déterminé par le signe du déterminant de la substitution qui exprime analytiquement la collinéation.

Börsch (*A.*). — Sur un système d'équations lié au système d'équations d'une substitution orthogonale. (391-399).

Recherche du maximum du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} \\ 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

où les $n(n+1)$ variables x_{ij} sont liées par les $n+1$ relations

$$\sum_{i=1}^{j=n} x_{ij}^2 = 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Böklen (*O.*). — Sur la surface de l'onde dans les cristaux biaxes. (400-405).

Schwering (*K.*). — Nouvelle représentation géométrique des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde de révolution (405-407).

Horst (*Ed.*). — Sur la division d'un angle en un nombre quelconque de parties égales. (407-408).

Tome XXV; 1880.

Graetz (*L.*). — Sur les mouvements de tournoiement dans les fluides compressibles. (1-10).

L'auteur étudie ces mouvements dans les fluides compressibles, où il n'y a pas de frottement, en supposant que les composantes de la vitesse d'une molécule quelconque et les variations de la densité soient très faibles; les mouvements de tournoiement, en chaque point, sont alors indépendants du temps. M. Graetz montre que les composantes de la vitesse u, v, w en un point quelconque (x, y, z) sont complètement déterminées si l'on se donne les composantes ξ, η, ζ de la vitesse angulaire de rotation en tous les points : u, v, w, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ à l'époque $t = 0$ pour tous les points $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$, $\frac{\partial w}{\partial n}$ pour tous les éléments de la surface limite.

Küttner (W.). — Sur la Statistique mathématique. (11-24).

Schwering (K.). — Sur une déformation particulière des sections coniques. (25-40).

Si l'on coupe un cône du second degré par un plan et qu'on développe le cône sur un plan, la transformée de la conique sera une certaine courbe dont on a aisément l'équation, d'où cette question : « La déformation peut-elle être telle que la transformée de la conique soit algébrique ? » M. Schwering détermine effectivement les courbes algébriques qui doivent être les transformées si ce genre de déformation est possible, puis arrive à ce résultat singulier, que l'identification est impossible pour des valeurs réelles.

Enneper (A.). — Sur un problème de la théorie des maxima et minima. (41-43).

Thomae (L.). — Convergence des séries Θ. (43-44).

Démonstration géométrique pour $p = 2$.

Soit la série $\Sigma\Sigma e^{-f}$, où $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs $x = x_1 + m$, $y = y_1 + n$, et m, n prenant toutes les valeurs entières. Ces formules correspondent à une décomposition du plan en carrés dont la surface est 1. Considérons l'ellipse

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = N^2.$$

Désignons, pour $N = 1$, sa surface, et son périmètre par F et L ; on reconnaît sans difficulté que le nombre de sommets du réseau de carrés qui tombe entre les deux ellipses qui correspondent aux valeurs N et $N + 1$ est inférieur à $F(2N + 1) + LN$; les termes correspondants de la série ont donc une somme moindre que

$$[(2N + 1)F + NL]e^{-N^2}.$$

Or la série dont cette expression est le terme général converge visiblement.

Niemöller (F.). — Sur les oscillations d'une corde dont la tension est une fonction continue du temps. (44-48).

Schlömilch (O.). — Sur la généralisation du théorème de Taylor. (48-53).

Il s'agit de la formule

$$\varphi(\zeta + h) = \varphi(\zeta) + \frac{h}{1}\frac{\Delta\varphi(\zeta)}{\Delta\zeta} + \frac{h(h-\delta)}{1.2}\frac{\Delta^2\varphi(\zeta)}{\Delta\zeta^2} + \dots$$
$$+ \frac{h(h-\delta)(h-2\delta)\dots[h-(n-1)\delta]}{1.2\dots n}\frac{\Delta^n\varphi(\zeta)}{\Delta\zeta^n},$$

ou

$$\frac{\Delta^m \varphi(\zeta)}{\Delta \zeta^m} = \frac{1}{\delta^n}(m)_0 \varphi(\zeta + m\delta) - (m)_1 \varphi[\zeta + (m-1)\delta] + \ldots$$

Supposant la fonction φ synectique à l'intérieur d'un contour comprenant les points $\zeta + h$, ζ, $\zeta + \delta$, ..., $\zeta + n\delta$, M. Schlömilch donne la forme du reste,

$$R_n = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{h(h-\delta)(h-2\delta)\ldots(h-n\delta)}{(z-\zeta)(z-\zeta-\delta)\ldots(z-\zeta-n\delta)}\,\frac{\varphi(z)\,dz}{z-(\zeta+h)},$$

et en déduit diverses conditions sous lesquelles la série est convergente.

Waltenhofen (*A. v.*). — Sur une mesure directe du travail d'induction et sur une détermination qui s'en déduit pour l'équivalent mécanique de la chaleur. (53-54).

Kantor (*S.*). — Recherches géométriques (54-59).

Börsch (*A.*). — Ellipse d'aire minimum inscrite à un triangle donné; ellipsoïde de volume minimum inscrit à un tétraèdre. (59-64).

Niemöller (*F.*). — Formules pour le calcul numérique de l'intégrale générale de l'équation différentielle de Bessel. (65-71).

L'auteur donne pour l'intégrale $J_{+\varepsilon}$ de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 J}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dJ}{d\lambda} + J\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\right) = 0$$

la formule

$$J_{+\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[A \sin\left(2\lambda + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + B\cos\left(2\lambda + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right],$$

où α a été mis à la place de $\frac{1}{2} - \varepsilon$, et où

$$A = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{4!\,(\alpha+1)_4}{2!\,2^4\lambda^{\frac{5}{2}}} + \frac{8!\,(\alpha+3)_8}{4!\,2^8.\lambda^{\frac{9}{2}}} - \ldots,$$

$$B = \frac{2!\,(\alpha)_2}{1!\,2^2.\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{6!\,(\alpha+2)_6}{3!\,2^6.\lambda^{\frac{7}{2}}} - \frac{10!\,(\alpha+4)_{10}}{5!\,2^{10}.\lambda^{\frac{11}{2}}} + \ldots,$$

les quantités $(\alpha)_2$, $(\alpha+1)_4$, ... désignant des coefficients binomiaux. Ces formules conviennent pour le calcul numérique lorsque λ est grand, pour des valeurs de ε inférieures à $\frac{1}{2}$. L'intégrale $O_0\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$ est donnée par la formule

$$O_0 = -\frac{\sin\left(2\lambda + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(CA_0 + \frac{\pi}{2}\right)B_0$$
$$-\frac{\cos\left(2\lambda + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}A_0 - CB_0\right),$$

où A_0 et B_0 sont ce que deviennent A et B pour $\alpha = \frac{1}{2}$, et où $C = 0,5772156\ldots$.
Enfin M. Niemöller montre comment le calcul des intégrales pour $\varepsilon > \frac{1}{2}$ se ramène au calcul des intégrales précédentes.

Matthiessen (*L.*). — Sur les figures ellipsoïdales d'équilibre des satellites de la Terre et de Jupiter. (72-86).

Schumann (*A.*). — Sur les aires de surface et les arcs de courbe décrits par une droite dans le mouvement d'un système solide. (87-94).

Wiener (*C.*). — Sur la dépendance entre certains éléments d'une courbe gauche et les éléments correspondants de sa projection. (95-97).

Heger. — Sur la construction d'une surface du second ordre qui passe par neuf points. (98-100).

Heger. — Construction d'une courbe du troisième ordre au moyen de ses points conjugués. (100-103).

Schlömilch (*O.*). — Quelques remarques sur la valeur inverse de la fonction Γ. (103-106).

La définition qui sert de base à la théorie donnée par Gauss des fonctions Γ, combinée avec la formule

$$n^\rho = e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\rho}\, e^{-(c+\delta)\rho},$$

où δ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, donne

$$\Gamma(1+\rho) = e^{-c\rho}\,\frac{e^{\frac{1}{1}\rho}}{1+\frac{1}{1}\rho}\,\frac{e^{\frac{1}{2}\rho}}{1+\frac{1}{2}\rho}\,\frac{e^{\frac{1}{3}\rho}}{1+\frac{1}{3}\rho}\cdots;$$

on en déduit aisément le résultat obtenu par M. Weierstrass, à savoir la possibilité du développement

$$\frac{1}{\Gamma(1+\rho)} = K_0 + K_1\rho + K_2\rho^2 + \ldots.$$

M. Schlömilch donne une forme intéressante des coefficients K, à savoir

$$K_n = \frac{(-1)^n e}{2\pi.1.2\ldots n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{1+iz}\,[\log(1+iz)]^n\,dz.$$

Ce résultat se déduit de la formule due à Cauchy,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{icz}\,dz}{(a+iz)^{\mu}} = \begin{cases} 0 & \text{si } c<0, \\ \dfrac{2\pi}{\Gamma(\mu)} c^{\mu-1} e^{-ac} & \text{si } c>0, \end{cases}$$

$\mu - 1$ et la partie réelle de a étant des quantités positives. On en déduit

$$\frac{1}{\Gamma(1+\rho)} = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(1+iz)^{1+\rho}}\, dz.$$

Schröder (*E.*). — Détermination de la valeur, pour n infini, de l'intégrale $\int_0^1 (u)_n\, du$. (106-117).

Suivant les habitudes du *Zeitschrift*, le symbole $(u)_n$ désigne le coefficient binomial

$$(u)_n = \frac{u!}{n!\,(u-n)!}.$$

M. Schröder parvient à la formule approchée, pour n très grand,

$$(u)_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(\log n)^2}.$$

Schlömilch (*O.*). — Remarque sur la Communication précédente. (117-119).

M. Schlömilch donne le résultat suivant,

$$\int_0^1 (u)_{m-1}\, du = \frac{(-1)^m}{m+1}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{3S_2}{a^4} - \frac{8S_3}{a^5} + \frac{5S_4}{2a^6} + \cdots\right)$$

où

$$S_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \quad a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}.$$

Consentius (*R.-O.*). — Le cercle cubique. (119-121).

Consentius (*R.-O.*). — Sur la détermination de la position oblique de deux faisceaux de rayons projectifs dans le plan. (122-124).

Herz (*N.*). — Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes. (125-128).

Krey (*H.*). — Sur la résolution, par M. Hermite, de l'équation du cinquième degré. (129-146).

Exposition détaillée de la méthode de M. Hermite et des propositions d'Algèbre qu'elle suppose.

Niemöller (*F.*). — Déformation, sous l'action du magnétisme terrestre, d'un fil conducteur élastique traversé par un courant (147-155).

Mertens (*F.*). — Deux problèmes de contact. (148-170).

Solution analytique de ces problèmes : « Étant donnée une surface du second ordre F et trois plans a, b, c, trouver un plan qui coupe F suivant une conique tangente aux sections déterminées par les trois plans a, b, c. Déterminer trois plans $u_x = 0$, $v_x = 0$, $w_x = 0$ tels que chacune des sections qu'ils déterminent dans la surface F soit tangente aux deux autres et aussi à deux des sections déterminées par les trois plans donnés $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$. »

Lehmann (*E.*). — Sur l'action de deux sphères en repos, ou animées d'un mouvement de rotation, en admettant la loi de Weber. (171-195, 244-262).

Schröder (*E.*). — Sur les propriétés des coefficients binomiaux relativement à la résolution de l'équation trinôme. (196-207).

Communication relative à un travail de M. von Mangoldt sur le développement en série de la racine de l'équation

$$w - y(1+w)^{\rho} = 0,$$

qui s'annule pour $y = 0$.

Böklen (*O.*). — Sur la surface de l'onde dans les cristaux biaxes. (207-213).

Geisenheimer (*L.*). — Relation entre les rayons de courbure de deux courbes collinéaires. (214-215).

Le rapport entre les rayons de courbure en deux points correspondants de deux courbes projectives est égal au cube du rapport des segments des tangentes prolongées jusqu'à l'axe de collinéation, multiplié par le rapport anharmonique de la collinéation, constant pour tous les points des deux courbes.

Graefe (*F.*). — Quelques notes sur l'hexagramme de Pascal. (215-216).

Helm (*G.*). — Essais sur l'exposition géométrique de la Mécanique. (217-233).

Schwering (*K.*). — Sur une classe de courbes dont les arcs s'expriment par des intégrales elliptiques ou hyperelliptiques de première espèce. (234-243).

M. Kiepert (*Journal de Borchardt*, t. 79, p. 304) a fait connaître une suite de courbes dont les arcs s'expriment au moyen d'intégrales elliptiques de première espèce. M. Schwering, reprenant par une méthode personnelle les exemples traités par M. Kiepert, donne des résultats plus généraux.

Vietor (*A.*). — Le couple de cercles polaires d'une cycloïde. (263-271).

L'auteur montre comment toute courbe engendrée par un point invariablement lié à un cercle qui roule sur un autre cercle est susceptible d'un double mode de génération.

Pfannstiel (*A.*). — Sur une méthode pour déterminer la mesure absolue de la composante horizontale du magnétisme terrestre par la simple observation d'oscillations. (271-279).

Kröber. — Sur les centres de similitude des sphères d'un faisceau de sphères tangentes à trois sphères données. (279-280).

Goebel (*J.-B.*). — Sur quelques propriétés du cylindroïde. (281-299).

Geisenheimer (*L.*). — Relation entre les rayons de courbure de deux courbes réciproques, collinéaires ou inverses. (300-315).

L'un des principaux théorèmes démontrés dans ce travail a été donné plus haut; en voici un autre du même genre :

Le produit des rayons de courbure en deux points correspondants de deux courbes en involution réciproque est inversement proportionnel au cube du produit des distances des tangentes au centre de l'involution.

Graetz (*L.*). — Sur le mouvement d'un fluide dans un tube. (316-334, 375-404).

Schlömilch (*O.*). — Sur une transformation de la fonction Γ. (335-342).

Communication relative à la fonction

$$\mathrm{P}(x) = \left(1+\frac{x}{1}\right)^{\frac{1}{1}}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots$$

et à son logarithme; l'auteur donne diverses formules pour le calcul de ce logarithme.

Braun (*W.*). — Formule de correction pour le décrément logarithmique. (342-345).

Böklen (*O.*). — Sur la surface de l'onde dans les cristaux biaxes. (346-351).

Schlömilch (*O.*). — Sur le quotient de deux fonctions Γ. (351-352).

L'auteur établit la formule

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p)} = \sqrt{p}\,e^{-\frac{1}{4p}}\left[1+\frac{\alpha_1}{p+\frac{1}{2}}\frac{\alpha_2}{\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)}+\ldots\right],$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1}{8},\quad \alpha_2 = \frac{9}{128},\quad \alpha_3 = \frac{193}{3072},\quad \ldots.$$

Wittwer (*W.-C.*). — Fondements de la Chimie mathématique. (353-374).

Stier (*K.*). — Sur les figures ellipsoïdales d'équilibre et la vitesse de rotation d'une masse homogène fluide d'énergie donnée. (405-409).

Schönemann (*P.*). — Le *Kreuzpendel* et le *Pendelkreuz*, appareils pour la représentation graphique des courbes d'oscillation. (410-414).

Schur (*F.*). — Sur les tangentes communes à deux surfaces du second degré ayant un quadrilatère gauche commun. (414-415).

Schlömilch (*O.*). — Note sur certaines fractions décimales périodiques. (416).

Soient T un diviseur de 10^{k+1} et

$$N = \frac{10^k+1}{T};$$

les k chiffres du nombre entier $T-1$ sont les k premiers chiffres de la période de la fraction décimale équivalente à $\frac{1}{N}$, les k derniers étant leurs compléments à 9. Exemple : $T=7$, $N=143$, $T-1=6$, $\frac{1}{143}=0,006993\ldots$.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON [1].

Tome XL; novembre 1879 à juin 1880.

Pearson (*J.*). — Note sur la mise en place d'une lunette équatoriale. (1-2).

(1) Voir *Bulletin*, III$_2$, 203.

L'auteur suppose les cercles d'ascension droite et de déclinaison rigoureusement placés sur l'instrument; on le tourne alors sur lui-même jusqu'à ce que la visée sur une étoile connue donne sa déclinaison exacte et l'angle horaire qui convient à l'heure de l'observation.

Herschel (Major *J.*). — Note sur la différence de l'intensité de la pesanteur à Revel et à Saint-Pétersbourg et sur les observations de longueur du pendule faites en d'autres stations par Grischow. (2-5).

Neison (*E.*). — Note sur le demi-diamètre de la Lune. (5-7).

Suivant M. Neison, le demi-diamètre de la Lune, mesuré dans un instrument méridien de A pouces anglais d'ouverture, est égal à

$$15'33'',37 + 4'',10(1 + 0'',70\,\text{A}).$$

Dans une lunette de 13 pouces, comme celle du professeur Pritchard, à Oxford, le demi-diamètre doit alors être de

$$15'33'',78,$$

et, en y ajoutant 0'',30 pour l'irradiation photographique, on arrive à

$$15'34'',08.$$

nombre identique à celui qu'a déduit M. Pritchard de la mesure des photographies faites sous sa direction.

Wilding (*R.*). — Comparaison du coefficient adopté par Hansen pour la latitude de la Lune avec le coefficient employé par Plana et par quelques autres astronomes. (8-10).

Les coefficients de Hansen s'accordent d'une manière très remarquable avec ceux de Plana, de Delaunay, de Damoiseau et de Pontécoulant.

Adams (*J.-C.*). — Note sur l'ellipticité de Mars et son effet sur le mouvement de ses satellites. (10-13).

M. Adams a calculé quel doit être le mouvement des nœuds et l'inclinaison des orbites des satellites de Mars dans l'hypothèse de différentes ellipticités de la planète :

Satellite I.

Mouvement annuel du nœud dû à l'action solaire, 0°,06.
En supposant l'ellipticité de

$$\frac{1}{118}, \quad \frac{1}{176}, \quad \frac{1}{228},$$

le mouvement du nœud dû à cette ellipticité sera

$$33°, \quad 18°,2, \quad 11°,3,$$

correspondant à des inclinaisons du plan fixe sur l'équateur égales à

$$17'',\quad 31'',\quad 50''.$$

SATELLITE II.

Mouvement annuel du nœud dû à l'action solaire, 0°,24.
En supposant l'ellipticité de

$$\frac{1}{118},\quad \frac{1}{176},\quad \frac{1}{228},$$

le mouvement du nœud dû à cette ellipticité sera

$$13°,4,\quad 7°,3,\quad 4°,5,$$

correspondant à des inclinaisons du plan fixe sur l'équateur égales à

$$27',\quad 50',\quad 1°19'.$$

L'inclinaison des satellites de Mars sur le plan de l'équateur de la planète restera donc toujours très faible.

Harkness. — Sur la constitution physique de Mars. (13).

Les dessins qui ont servi à M. Harkness pour la construction de la Carte de Mars, dont les *Monthly Notices* donnent un fac-simile, ont été obtenus, en 1877, avec l'équatorial de 26 pouces de Washington. La Carte ressemble à celle publiée par M. Kaiser dans le Tome III des *Leiden Observations*.

Draper (*J.-C.*). — Note sur une photographie du spectre solaire montrant les lignes noires de l'oxygène. (14-17).

Calver (*G.*). — Note sur le travail d'un miroir en verre argenté de 37 pouces de diamètre, destiné à M. Common. (17-20).

La première Partie du travail a été faite à l'aide d'une machine analogue à celles de lord Rosse ou de Lassell; les corrections ont été obtenues à la main.

Bowden (*A.*). — Description d'un micromètre enregistreur. (21-23).

L'enregistrement est obtenu en poussant des chevilles placées dans des ouvertures qui correspondent aux divisions du tambour ordinaire des micromètres.

Lindsay (lord). — Observations du spectre de la comète *d* de 1879 (comète Palisa). (23).

Le spectre obtenu par MM. R. Copeland et J.-G. Lohse se composait des trois bandes ordinaires, ayant pour longueurs d'onde :

	mmm,
Bande I	551,3
Bande II	511,7
Bande III	465,5

Copeland (*R.*) et *Lohse* (*J.-G.*). — Observations de la comète *d* de 1879 (comète de Palisa), faites à Dun-Echt du 26 août au 20 octobre 1879. (24-25).

Stone (*E.-J.*). — Note sur la probabilité d'une liaison passée entre quatre étoiles éloignées du ciel austral. (26-30).

Les quatre étoiles étudiées par M. Stone

	Mouvement propre en Æ.	Mouvement propre en δ.
	s	″
ζ du Toucan	+ 0,280	— 1,13
e Éridan	+ 0,266	— 0,75
ζ_1 du Réticule	+ 0,194	— 0,65
ζ_2 du Réticule	+ 0,190	— 0,65

sont remarquables par la grandeur inusitée de leurs mouvements propres. En comparant leur position relative telle qu'elle résulte des observations faites depuis Lacaille, l'auteur démontre :

1° Que les étoiles considérées ont un mouvement propre plus grand que celui de la moyenne des étoiles ;

2° Que ces étoiles ont un mouvement propre commun de plus de 1″ ;

3° Que ces quatre étoiles ont entre elles un mouvement relatif beaucoup plus faible que leur mouvement commun.

Ces faits paraissent à M. Stone prouver que ces astres, quoique très éloignés, ont été en relation physique à leur origine.

Ellery (*R.-J.-L.*). — Observation de la conjonction de Mars et de Saturne, faite à Melbourne le 30 juin 1879. (30-32).

Winnecke (*A.*). — Observation de l'éclipse solaire du 18 juillet 1879, faite à l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (33-35).

Schuster (*A.*). — Recherches sur la polarisation de la couronne solaire. (35-57).

Le Dr Schuster examine successivement les problèmes suivants :

1° Quantité de lumière renvoyée dans une direction donnée par une particule de matière située au voisinage d'une sphère lumineuse.

2° Cas d'une sphère lumineuse surmontée d'une atmosphère de particules dispersantes.

L'intensité de la polarisation radiale augmente avec la distance au Soleil si les particules dispersantes sont distribuées suivant la raison inverse d'une puissance quelconque de leur distance au Soleil.

3° Quantité de lumière polarisée dispersée dans les diverses directions par une atmosphère de particules enveloppant un point lumineux.

4° Quantité de lumière polarisée envoyée dans les diverses directions par une atmosphère de particules en partie lumineuses par elles-mêmes.

5° Cas de la couronne solaire.

Il a été fait un trop petit nombre de déterminations de l'intensité de la polarisation de la couronne pour que les résultats numériques de M. le Dr Schuster puissent être utilement comparés à la réalité; mais, les lois auxquelles il arrive étant très différentes suivant le mode de distribution de la matière circumsolaire, la question de la polarisation de la couronne devra être étudiée avec soin.

Stone (*E.-J.*). — Comparaison entre les ascensions droites et les distances polaires des étoiles du *Nautical Almanac* et celles du Catalogue général du Cap de Bonne-Espérance pour 1880. (57-70).

Les corrections en ascension droite sont très faibles.

Les corrections en déclinaison sont plus considérables et offrent une marche systématique, suivant l'ascension droite des étoiles ou suivant les saisons dans lesquelles elles sont observées. Les Tables de réfraction de Bessel ne corrigent donc pas suffisamment les observations de l'influence de la température de l'air, ou plutôt de l'influence de l'état hygrométrique de l'air. La correction passe de $-0'',24$ pour les étoiles de 0^h à 6^h d'ascension droite, observées pendant la saison sèche, à $+0'',39$ pour les étoiles comprises entre 12^h et 18^h d'ascension droite, observées au méridien pendant la saison humide.

Marth (*A.*). — Éphéméride pour les satellites d'Uranus en 1880. (70-71).

Tacchini (*P.*) et *Millosevich*. — Observations de la comète de Palisa et de la comète de Hartwig, faites à l'équatorial du Collège Romain en septembre et octobre 1880. (72-74).

Neison (*E.*). — Sur la correction d'équation personnelle exigée par les observations de la Lune, faites au cercle des passages de l'Observatoire de Greenwich. (75-80).

La grandeur des corrections a brusquement changé en 1870 par l'adjonction d'observateurs nouveaux aux observateurs anciens.

Newcomb (*S.*). — Note sur la correction de la longitude moyenne de la Lune dans les Tables de Hansen. (81-82).

Lynn (*W.-T.*). — Sur un changement récent dans l'erreur moyenne de longitude de la Lune, d'après les Tables de Hansen. (82-85).

Downing (*A.-M.-W.*). — Note sur les distances polaires du *Seven Year Catalogue* de Greenwich pour 1860. (85-86).

Noble (capitaine *W.*). — Note sur deux dessins de Jupiter, faits dans les nuits du 4 et du 18 octobre 1879. (86-87).

Copeland (*R.*) et *Lohse* (*J.-G.*). — Note sur le spectre de la tache rouge de Jupiter. (87-88).

D'après les observations faites à Dun-Echt, la tache rouge produit dans le spectre une bande sombre qui s'étend du rouge à F, mais laisse voir les lignes du spectre de la planète.

Hall (*M.*). — La nébuleuse des Pléiades. (89).

Remarques sur les descriptions de cette nébuleuse par Bessel, Schonfeld, Tempel et Schiaparelli.

Webb (*T.-W.*). — Découverte d'une nébuleuse gazeuse dans le Cygne. (90-91).

La nébulosité a 4″ de diamètre; sa position est identique à celle de l'étoile 4004 de la zone $+41°$ d'Argelander.

Knott (*G.*). — Note sur la nébuleuse gazeuse du Cygne. (91).

Son spectre est formé d'une seule ligne lumineuse très brillante.

Lindsay (lord) et *Lohse* (*J.-G.*). — Note sur les nébuleuses du Cygne. (91-92).

Le spectre est formé de trois lignes ayant pour longueurs d'onde

500,1, 495,7, 486,5.

Winnecke. — Note sur la nébuleuse du Cygne. (92-93).

La nébuleuse est elliptique avec un grand axe de 5″,7.

Common (*A.-A.*). — Note sur Mimas et Hypérion. (93-95).

Les deux satellites de Saturne ont été observés en octobre et novembre 1879, avec un télescope de 36 pouces anglais d'ouverture.

Common (*A.-A.*). — Observations des satellites de Mars en septembre, octobre et novembre 1879. (95-99).

Burnham (*S.-W.*). — Observations de nouvelles étoiles doubles, faites à l'Observatoire de Dearborn (Chicago). (99-192).

Copeland (*R.*) et *Lohse* (*J.-G.*). — Observations du satellite extérieur de Mars, faites à Dun-Echt en novembre 1879. (102-103).

Lohse (*J.-G.*) et *Knott* (*G.*). — Observations de l'étoile rouge découverte dans le Petit Chien par M. Baxendell. (103-104).

La position est, pour 1879,0,

Æ	$7^h 34^m 45^s,67$
δ	$+8° 39' 39'',6$

Bosanquet (*R.-H.-M.*) et *Sayce* (*A.-H.*). — L'Astronomie babylonienne. (105-123).

Le Mémoire de ces deux savants est consacré à l'étude de divers fragments de zodiaque et de planisphères publiés par le *British Museum* (*Western Asiatic Inscriptions*); malgré son grand intérêt, il ne saurait être analysé ici.

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les averses météoriques. (124-131).

Les averses météoriques nouvelles sur lesquelles M. Denning voudrait attirer l'attention des observateurs sont les suivantes :

	α	δ.
I. Juillet 30-août 1	35°	+ 53°
II. Juillet 27-30	341	— 13
III. Août 21-25	291	+ 60
IV. Octobre 14-20	31	+ 9
V. Août 8-11	44	+ 25

Corder (*H.*). — Averses météoriques observées de 1870 à 1879. (131-133).

Corder (*H.*). — Liste des points radiants des météores observés de 1876 à 1879 à Writtle (Essex). (134-138).

Perry (le Révérend *S.-J.*). — Les météores de novembre. (139-140).

Les observations d'étoiles filantes faites en novembre à Stonyhurst ont donné les résultats suivants :

	Météores.
Novembre 13	67
» 14	144
» 15	98

Ellery (*R.-L.-J.*). — Occultation de 64 du Verseau, observée à l'Observatoire de Melbourne le 14 septembre 1879. (140-142).

D'après M. Ellery, qui observait avec un équatorial de 8 pouces, les phénomènes ont été les suivants : le premier contact de l'étoile et du disque de la planète s'est produit à $10^h 5^m 19^s$ (temps moyen de Melbourne); l'étoile est restée visible dans cette même position pendant environ deux minutes; peu à peu elle s'est projetée sur le disque de la planète et semblait vue comme à travers un brouillard; enfin, à $10^h 7^m 43^s,8$, elle disparaissait complètement, après s'être éteinte en deux secondes.

Des phénomènes semblables ont été observés au grand télescope par M. Turner.

Perry (*S.-J.*). — Occultations d'étoiles observées à Stonyhurst en octobre et novembre 1879. (143).

Perry (*S.-J.*). — Observations des satellites de Jupiter, faites en 1879 à Stonyhurst. (144-148).

Airy (*G.-B.*). — Occultations d'étoiles par la Lune et phénomènes des satellites de Jupiter, observés à Greenwich en 1879. (149-152).

Pratt (*H.*). — Sur la période de rotation de Jupiter. (153-157).

L'auteur, en discutant ses observations de 1879 par une méthode analogue à celle qui a été employée en 1835 par M. Airy (*Mémoires de la Société Astronomique de Londres,* t. IX), trouve que la tache rouge donne une rotation de $9^h55^m33^s,91$. Ce nombre est presque identique à celui que Schroeter avait déterminé en 1786, et un peu plus petit que celui publié par M. J.-F.-J. Schmidt en 1866.

Backhouse (*T.-W.*). — Observations du passage de la tache rouge de Jupiter par le méridien central de la planète pendant les mois d'août à décembre 1879. (157).

Airy (*G.-B.*). — Surface moyenne des taches solaires en 1878 et 1879, d'après les photographies faites à l'Observatoire de Greenwich. (158-159).

De la comparaison de ces résultats avec ceux des années précédentes, il résult que le minimum des taches solaires et des facules s'est produit à la fin de 1878 ou dans les premiers mois de 1879.

	Surfaces moyennes		
Annees	des ombres	des taches entières	des facules
1878	5	25	84
1879	10	44	163

Marth (*A.*). — Note sur les observations et la mesure de l'éclat de Mars, qui peuvent être faites en février ou mars 1880. (159-161).

L'éclat de Mars a été comparé, en 1801, par Olbers, à celui de α du Taureau et de α d'Orion; le célèbre astronome de Brème a trouvé un éclat intermédiaire. Ce sont ces mêmes observations que M. Marth voudrait voir reprendre.

Airy (*G.-B.*). — Observations du satellite extérieur de Mars, faites à Greenwich le 12 novembre 1879. (161-162).

Downing (*A.-M.-W.*). — Note sur le Catalogue étalon d'ascensions droites de Greenwich. (162-165).

Les différences entre les positions des étoiles telles qu'elles sont données dans l'Introduction du *Greenwich Nine-Year Catalogue* et dans les Catalogues de Newcomb (*Washington Observations for* 1870), de Gyldén (*Monthly Notices for* 1875) et d'Auwers (*Publication der Astronomischen Gesellschaft*, n° 14), peuvent être réduites à des quantités inférieures à $0^s,02$, si l'on corrige le Catalogue de Newcomb de la quantité constante — $0^s,009$, celui de Gyldén de — $0^s,016$ et celui d'Auwers de — $0^s,026$.

Les différences entre ces divers Catalogues tiennent donc à une différence dans la position adoptée pour les équinoxes.

Dunkin (*E.*). — Sur l'influence de l'erreur personnelle sur les erreurs des Tables lunaires. (165-167).

Ce sont des remarques sur le travail de M. Neison sur le même sujet et une défense de l'ancien travail de l'auteur.

Pritchard (*C.*). — Note sur la mesure des photographies lunaires, en réponse aux observations critiques de M. Neison. (167-169).

Réponse aux critiques de M. Neison, publiées à la page 5 du présent Volume des *Monthly Notices*. Le procédé de mesure est celui de Bessel, avec quelques légères modifications.

Burton (*C.-E.*). — Changement dans l'éclat relatif des satellites de Jupiter. (169).

Todd (*C.*). — Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, faites, en 1878, à l'Observatoire d'Adelaïde. (170-176).

RAPPORT ANNUEL DU CONSEIL DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE. (177-268).

Nous relevons dans ce Rapport les données suivantes :

Le nombre des membres de la Société est de 635, sensiblement le même que celui de l'année précédente. Les recettes de la Société, cotisations ou rentes, ont été de 67 951^{fr}.

Le Tome XLI des Mémoires de la Société, contenant les observations faites pendant les éclipses, est en distribution.

Parmi les membres perdus par la Société et auxquels une Notice nécrologique est consacrée, nous citerons :

Key (*Henry-Cooper*) (1819-1879).

Maclear (*Thomas*) (1794-1879). — Après avoir été médecin et avoir construit chez lui un petit observatoire, il fut, en 1833, nommé directeur de l'Observatoire du Cap de Bonne-Espérance; il a occupé ce poste jusqu'en 1870. Maclear a vérifié le méridien de Lacaille (1840-1847), déterminé la parallaxe de α du Centaure, observé un grand nombre de comètes et poursuivi sans relâche une série d'observations méridiennes qui sont la base du Catalogue du Cap, que M. Stone s'occupe aujourd'hui de publier.

Lamont (*Jean de*) (1805-1879). — Entré à l'Observatoire de Munich en 1828, avec le titre d'assistant, il devint directeur de l'établissement en 1835, et il y est mort en août 1879. Lamont laisse un très grand nombre de Mémoires spéciaux et 34000 observations d'étoiles rassemblées dans dix Catalogues.

Dans la série des Rapports sur les travaux des Observatoires anglais ou étrangers, je relève les renseignements qui suivent :

Greenwich. — Les observations méridiennes ont été régulièrement poursuivies. M. Lynn a discuté les observations de la Lune faites à l'altazimut de 1864 à 1878. Le grand équatorial a été modifié, dans le but de le rendre plus propre aux travaux de Spectroscopie.

Observatoire de Radcliffe (*Oxford*). — Les instruments ont été réparés sous la direction de M. Stone.

Observatoire de l'Université d'Oxford. — M. Pritchard a continué les observations de l'amas des Pléiades et commencé l'étude de l'amas 39 de Messier dans la constellation du Cygne.

Observatoire de Dunsink. — Les recherches sur la parallaxe de 61 du Cygne, de 1618 Groombridge et de l'étoile 249 de Schjellerup ont été continuées.

Observatoire de M. Common, à Faling. — Un télescope de 36 pouces anglais de diamètre a été monté.

Observatoire de M. Huggins, à Upper-Tulse-Hill. — On a obtenu des photographies des spectres de Sirius, Véga, Rigel, α du Cygne, α de la Vierge, α de la Grande Ourse, α de l'Aigle, Arcturus, β Pégase, Betelgeuse, la Chèvre, α d'Hercule et α Pégase.

Observatoire du comte de Rosse, à Birr-Castle. — Le Catalogue des nébuleuses observées de 1848 à 1878 avec les télescopes de 3 et de 6 pieds a été publié en partie.

Observatoire du Cap. — Le Catalogue de 12400 étoiles comprises entre 30° de déclinaison sud et le pôle austral est prêt pour l'impression. M. D. Gill a été nommé directeur de l'Observatoire en mai 1879.

Parmi les Notices relatives aux progrès de l'Astronomie, je signalerai :

1° Une Analyse des recherches de M. G.-H. Darwin sur l'histoire du système solaire;

2° Une Note sur l'*Uranometria Argentina*, du Dr Gould; cet Ouvrage a été spécialement analysé dans le *Bulletin*.

Gasparis (*A. de*). — Sur la variation du demi-grand axe des orbites planétaires. (269-270).

Hall (*A.*). — Observations des satellites de Mars, faites en 1879 à l'Observatoire de Washington. (271-283).

	h m s
La révolution de Phobos est de...........	7.39.13,94
La révolution de Deimos est de...........	30.17.54,38

Holden (*E.-S.*). — Observations de Mimas et occultation de Rhéa, observées, en 1879, avec l'équatorial de 26 pouces de Washington. (283-285).

Gledhill (*J.*). — Observations des satellites de Saturne, faites, en 1879, à l'Observatoire de M. E. Crossley, à Halifax. (285-286).

Gledhill (*J.*). — Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, faites, en 1879, à l'Observatoire de M. E. Crossley, à Halifax. (287-292).

Pritchard (*C.*) et *Plummer* (*W.*). — Observations du satellite extérieur de Mars, faites, en novembre 1879, à l'Observatoire de l'Université d'Oxford. (292).

Wolf (*C.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (293).

La nébuleuse n'est pas variable; les différences d'aspect tiennent à l'état du ciel et à l'étendue du champ de la lunette employée.

Vogel (*H.-C.*). — Note sur le spectre de l'étoile rouge, découverte dans le Cygne par M. Baxendell. (294).

Le bleu et le violet sont très faibles; quelques lignes noires existent dans le rouge.

Gwynne (lieutenant *B.*). — Observations de la grande comète australe, 1880, I, faites à Montevideo, du 1er au 8 février 1880. (295).

Morris (*S.-S.-O.*). — Observations de la grande comète australe, 1880, I, faites à Montevideo, du 1er au 7 février. (295-297).

Ellery (*R.-L.-J.*). — Note sur la grande comète australe, 1880, I, d'après son aspect à Melbourne le 1er et le 5 février. (297).

Todd (*C.*). — Observations de la grande comète australe, faites à l'Observatoire d'Adelaïde. (298-299).

Eddie (*L.-A.*). — Observations de la grande comète australe, faites à Graham's Town. (299-300).

Gill (*D.*). — Observations de la grande comète australe, 1880, I, faites à l'Observatoire du Cap. (301-301).

Quelques observations de positions ont pu être faites sur la montagne de la Table, avec un altazimut portatif, entre le 10 et le 15 février 1880.

Neison (*E.*). — Recherches sur la détermination de l'équation personnelle des observateurs de la Lune. (302-307).

Lynn (*W.-T.*). — Note supplémentaire sur les changements survenus dans les erreurs des Tables lunaires de Hansen. (307-308).

Tebbutt (*J.*). — Détermination de la longitude de l'Observatoire de Windsor (N. S. W.) par les culminations lunaires. (308-310).

La longitude de Windsor est $10^h 3^m 21^s,8$ à l'Est de Greenwich.

Airy (*G.-B.*). — Latitude héliographique moyenne des taches solaires de 1874 à 1879, d'après les photographies faites à Greenwich. (311).

	Taches de l'hémisphère nord.		Taches de l'hémisphère sud.	
	Surface moy.	Latitude moy.	Surface moy	Latitude moy.
1874	245	9° 3′	326	—12° 9′
1875	125	11.12	127	— 9.50
1876	43	12.31	84	—10.55
1877	32	9.10	60	— 9.41
1878	21	7.13	3	— 7.40
1879	11	23.54	34	—22.39

Christie (*W.-H.-M.*). — Note sur les erreurs systématiques des distances polaires déterminées à Greenwich. (312-315).

Buckney (*T.*). — Description d'une nouvelle horloge marchant dans une atmosphère à pression constante (315-318).

Sadler (*H.*). — Notes sur le Catalogue de 10300 étoiles doubles ou multiples qui forme le Volume XL des *Mémoires de la Société astronomique*. (318-328).

Copeland (*R.*). — Notes sur le phénomène connu sous le nom de *bandes d'ombre* qui s'observe pendant les éclipses totales. (329-331).

Le phénomène de bandes obscures mobiles, analogues à celles des éclipses totales, a été observé à Dun-Echt à l'instant où le Soleil se couchait derrière une colline voisine. Les bandes sont plus ou moins nettes suivant le calme de l'atmosphère.

Green (*N.-E.*). — Sur quelques changements survenus dans les taches de Mars depuis l'opposition de 1877. (331-332).

La mer de Dawes, invisible en 1877, s'est montrée de nouveau en 1879.

Stone (*E.-J.*). — Sur la valeur de la réfraction moyenne. (333-349).

Une discussion complète des observations de circumpolaires faites à Greenwich montre que les réfractions de Bessel doivent être légèrement diminuées.

Konkoly (*N. de*). — Liste de 400 points radiants déduits des observations d'étoiles filantes, faites en Hongrie de 1871 à 1878. (349-363).

Barker (*D.-W.*). — Étoiles filantes observées en 1879 pendant un voyage de Londres à Melbourne et retour. (364-367).

Airy (*G.-B.*). — Note sur la valeur théorique de l'accélération du moyen mouvement de la Lune en longitude, telle qu'elle résulte d'un changement de l'excentricité de l'orbite terrestre. (368-376).

Common (*A.-A.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (376-377).

La nébuleuse se composerait de trois parties distinctes.

Brewin (*T.-D.*). — Mesure de la rotation de Jupiter. (377).

La période de rotation, déduite d'observations faites du 7 août 1879 au 4 février 1880, est de $9^h 55^m 34^s,1$.

Ellery (*R.-L.-J.*). — Observations de la grande comète de l'hémisphère sud, 1880, I, faites à l'Observatoire de Melbourne. (377-378).

Les observations s'étendent du 9 au 17 février.

Russel (*H.-C.*). — Observations de la queue de la grande comète australe, faites à l'Observatoire de Sydney. (379).

Marth et *Lindsay* (lord). — Sur l'éclat relatif de Mars et des étoiles voisines, d'après les observations photométriques faites à Dun-Echt en février et mars 1880. (380).

Airy (*G.-B.*). — Note sur les préparatifs à faire pour l'observation du passage de Vénus le 6 décembre 1882. (381-385).

Le directeur de l'Observatoire de Greenwich propose :

1° De ne pas employer les procédés photographiques ;

2° D'observer des entrées accélérées dans la colonie du Cap ;

3° D'observer des entrées retardées à Cuba et aux Barbades ;

4° D'observer des sorties accélérées à Cuba, aux Barbades et dans le centre de l'Amérique ;

5° D'obtenir enfin des sorties retardées sur la côte est d'Australie.

M. Airy pose comme règle invariable que l'altitude du Soleil, au moment de l'observation, doit être de 15° au moins.

Campbell (*J.*) et *Neison* (*E.*). — Recherches sur la détermination de la parallaxe solaire au moyen de l'inégalité parallactique du mouvement de la Lune. (386-411).

Adams (*J.-C.*). — Note sur les recherches de l'Astronome Royal (Airy), relativement à la valeur théorique de l'accélération du moyen mouvement de la Lune. (411-415).

Marth (*A.*) — Éphémérides pour l'observation physique de Jupiter, en 1880-1881. (416-419).

Marth (*A.*). — Recherches sur le mouvement de rotation de Jupiter, d'après les observations faites sur la tache rouge en 1879. (419-429).

La discussion d'un grand nombre d'observations conduit M. Marth à prendre pour durée de rotation de la planète $9^h 55^m 34^s,1$:

Downing (*A.-M.-W.*). — Note sur la possibilité d'une période de dix mois dans la latitude de la Lune. (430-433).

Draper (*H.*). — Note sur une photographie du spectre de Jupiter, qui tend à prouver que la planète a une lumière propre. (433-435).

Johnson (*S.-J.*). — Liste des éclipses solaires centrales visibles dans la Grande-Bretagne, de 1263 à 2200. (436-437).

Tebbutt (*J.*). — Sur la variabilité de 2472 B. A. C. (437).

Copeland (*R.*). — Observations de la comète de Schäberle, 1880, *b*, faites à Dun-Echt en avril et mai 1880. (438).

Hind (*J.-R.*). — Éléments paraboliques de la comète de Schäberle. (439).

Tebbutt (*J.*). — Deuxième Note sur la longitude de Windsor (N. S.W.). (440).

Campbell (*J.*) et *Neison* (*E.*). — Recherches sur la détermination de la parallaxe solaire au moyen de l'inégalité parallactique du mouvement de la Lune (second Mémoire). (441-469).

La valeur de la parallaxe solaire est comprise entre 8″,848 et 8″,778, suivant que l'on admet ou que l'on n'admet pas une inégalité de quarante-six ans dans le mouvement de la Lune.

Adams (*J.-C.*). — Recherches sur l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, ayant pour cause le changement séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre, recherches faites en tenant compte des termes de l'ordre de m^4, mais en négligeant l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite de la Lune. (472-482).

Adams (*J.-C.*). — Note sur la constante de la parallaxe lunaire. (482-488).

Marth (*A.*). — Éphéméride pour la position des satellites de Neptune en 1880 et 1881. (488-490).

Marth (*A.*). — Addition aux éphémérides pour l'observation physique de Jupiter en 1880-1881. (490-497).

Burnham (*S.-W.*). — Examen des mesures d'étoiles doubles du Catalogue de Bedford (Catalogue de l'amiral Smyth). (497-532).

Les observations de M. Burnham constituent une révision complète des mesures faites par l'amiral Smyth sur les étoiles doubles, avec compagnons distincts, qui avaient été observées avant la publication du *Cycle of celestial objects*. M. Burnham corrige d'assez nombreuses erreurs du *Bedford Catalogue*.

Knobel (*E.-B.*). — Remarques sur le Mémoire précédent de M. Burnham. (532-537).

L'auteur ajoute de nouvelles corrections à celles de M. Burnham.

Franks (*W.-S.*). — Notes sur 2472 B. A. C., dont la variabilité a été signalée par M. Tebbutt. (537).

Safford (*T.-H.*). — Éléments paraboliques de la comète Schäberle, 1880, *b*. (538).

Bigourdan (*M.-G.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Schäberle, 1880, *b*. (538-559).

Wagner (*M.-A.*). — Note sur l'étoile n° 894 du premier *Seven years Catalogue* de l'Observatoire de Greenwich. (560-561).

Johnson (*S.-J.*). — Coïncidence des taches solaires et des aurores boréales dans l'ancien temps. (561-563).

M. Johnson trouve une coïncidence entre les apparitions de quelques grandes aurores boréales, signalées dans le *Chronicon Scotorum* et l'*Anglo-saxon Chronicle*, entre les années 670 et 1131, et les dates de maxima des taches solaires, telles qu'elles résultent des travaux de M. R. Wolf.

Lohse (*J.-G.*). — Note sur les indices de réfraction et le pouvoir dispersif de différents verres d'optique. (563-564).

Bosanquet (*R.-H.-M.*) et *Sayce* (*A.-H.*). — L'Astronomie babylonienne (troisième Mémoire). (565-578).

Airy (*G.-B.*). — Addition à un Mémoire intitulé « Recherches sur la valeur théorique de l'accélération du moyen mouvement de la Lune en longitude, produit par le changement de l'excentricité de l'orbite de la Terre ». (578-599).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur la méthode des moindres carrés. (600-614).

Sang (*E.*). — Note sur le calcul de la forme des objectifs astronomiques. (614-619).

Tempel (*W.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (622-623).

M. Tempel donne une description et un dessin de la nébuleuse voisine de Mérope.

Gill (*D.*). — Observations de la comète I de 1880 (grande comète australe), faites au Cap de Bonne-Espérance. (623-627).

Wiedemann (*E.*). — Note sur une méthode propre à déterminer la pression sur la surface solaire. (627-628).

M. Wiedemann propose de déduire cette pression du diamètre des anneaux de Newton, produits par l'une des lignes brillantes d'une protubérance solaire.

G. R.

THE OBSERVATORY, A MONTHLY REVIEW OF ASTRONOMY, edited by W.-H.-M. Christie. — Londres, in-8° ([1]).

Tome III; avril 1879-décembre 1880.

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 9 avril 1879. (1-10).

Discussion entre lord Lindsay et M. Common sur les avantages comparés des lunettes et des télescopes et sur la manière de monter et d'argenter les miroirs.

([1]) Voir *Bulletin*, III_1, 78.

* *Schmidt* (*J.-F.-J.*). — Carte de la Lune. (10-17). [J. Birmingham].

Birt (*R.-W.*). — Note sur un glissement de terrain dans Platon. (17-20).

Il s'agit d'un glissement de terrain visible à l'extrémité est du cratère de Platon et dont l'apparence aurait quelque peu changé depuis qu'il a été décrit pour la première fois en 1866, par M. T.-W. Webb.

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de mai. (21-22).

Chambers (*G.-F.*). — Lettre relative à la diffamation de l'amiral Smyth par M. Sadler (23-24).

L'auteur critique énergiquement M. Sadler et la conduite du Bureau de la Société Astronomique; il pense que les Membres de la Société doivent intervenir.

D'Abbadie (*A.*). — Note sur les observations d'étoiles doubles faites à Poulkova. (24-25).

Tebbutt (*J.*). — Remarques sur la conjonction de Mars et de Saturne qui sera observée le 30 juin 1879. (26).

Plummer (*J.-I.*). — Lettre sur les conditions de visibilité de Mercure projeté sur la couronne solaire. (27-28).

Le professeur Langley a observé le phénomène par le ciel très pur des montagnes; il a été vu à Orwell Park par un léger brouillard.

* *Lœwy* (*M.*) et *Stephan* (*E.*). — Détermination des différences de longitude de Paris, Marseille et Alger. (28).

* *Smyth* (*Piazzi*). — Sur l'illumination des tubes de Geissler dans le sens de leur longueur. (29).

Schulze. — Éphéméride de la comète périodique de Brorsen en juin 1879. (30).

MEMORANDA astronomiques pour juin 1879. (31-32).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 9 mai 1879. (33-46).

Le Conseil de la Société Astronomique propose une motion de blâme contre M. Sadler pour ses attaques injustes et diffamatoires à la mémoire de l'amiral Smyth; cette motion est adoptée après une vive discussion à laquelle prennent part MM. Chambers, Airy, Ranyard et Pritchard.

La séance continue par les lectures reproduites dans les *Monthly Notices*.

Draper (J.-C.). — Sur les lignes noires de l'oxygène, observées dans la partie du spectre solaire moins réfrangible que G. (46-50).

Les conclusions de M. Draper sont les suivantes :

1° La région du spectre solaire comprise entre 4317 et 4319 de longueur d'onde, et considérée comme lignes brillantes de l'oxygène, n'est pas aussi brillante que les autres régions lumineuses immédiatement voisines.

2° Le spectre solaire montre quelques faibles lignes noires dans la région entre 4317 et 4319 de longueur d'onde.

3° L'oxygène est la substance qui peut produire des lignes noires dans cette région; on doit, par conséquent, attribuer leur présence à l'action de cet élément.

Sawyer (E.-F.). — Observations de *Mira Ceti* faites à Cambridge (U. S.) pendant son maximum de 1878. (50-52).

L'accroissement de lumière a été très rapide; l'étoile a passé de la 5ᵉ à la 3ᵉ grandeur en huit jours.

Corder (H.). — Phénomènes météorologiques observés de janvier à mai 1879. (52-53).

Gledhill (J.). — Étoiles doubles à observer en juin. (53-54).

Denning (W.-F.). — Notes sur les météores de juin. (55-56).

Young (C.-A.). — Spectre de la comète de Brorsen. (56-57).

Le spectre se compose des trois bandes du carbone ayant pour longueurs d'onde 468, 517 et 558.

Airy (G.-B.). — Lettre sur la méthode des moindres carrés. (57-59).

L'Astronome Royal prend la défense de la méthode des moindres carrés contre Le Verrier, qui l'avait attaquée devant l'Académie des Sciences de Paris. La Lettre est datée du 5 février 1875.

Heaven (C.). — Lettre relative à la diffamation de l'amiral Smyth, par M. Sadler. (59-60).

* *Niesten.* — Recherches sur la couleur des étoiles doubles. (60-61).

* *Observatoire de Washington.* — Observations de 1875. (61-62).

* *Observatoire de Greenwich.* — Observations de 1876. (62-63).

MEMORANDA astronomiques pour juillet 1879. (63-64).

Réunion de la Société Astronomique de Londres, le 13 juin 1879. (65-79).

Importante discussion entre M. Draper et MM. Ranyard, Christie, Gladstone, Huggins et Capron relativement aux photographies du savant physicien américain et à la découverte de la présence de l'oxygène dans le Soleil. Tous les orateurs ont rendu justice aux soins apportés par M. Draper à ses recherches, mais plusieurs d'entre eux, M. Huggins par exemple, ne se sont pas déclarés convaincus.

Darwin (*G.-H.*). — Notes sur la théorie des marées et les évolutions des satellites des planètes. (79-84).

Johnson (*S.-J.*). — Note sur l'occultation d'Antarès le 28 juillet 1879. (84-86).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en juillet. (86-88).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de juillet. (88-90).

Common (*A.-A.*). — La première comète périodique de Tempel. (90-91).

Ranyard (*A.-C.*). — Qu'est la chromosphère? (92-93).

L'usage a donné le nom de *chromosphère* à la partie de l'atmosphère incandescente du Soleil que l'on peut voir au spectroscope en l'absence d'une éclipse totale.

* *Dunkin* (*E.*). — Notices nécrologiques des astronomes. (94-95).

* *Observatoire royal de Greenwich.* — Rapport annuel sur la période de mai 1878 à mai 1879. (95-98).

* *Schmidt* (*J.-F.-J.*). — Les taches solaires et les protubérances. (98-100).

Memoranda astronomiques pour août 1879. (101-102).

Sawyer (*E.-F.*). — Les météores du 12 au 26 avril 1879. (103-105).

Le point radiant de ces météores, dont la période paraît être de vingt-sept ans, et qui sont en relation avec la comète I de 1861, est la Lyre.

Konkoly (*N. de*). — Observations spectroscopiques de la comète de Brorsen, faites en 1879 à Ó-Gyalla. (105-107).

Le spectre se compose de trois bandes voisines de celles de la flamme bleue du bec de Bunsen.

Arcimis (*A.-T.*). — Conjonction de Mars et de Saturne, observée à Cadix le 30 juin 1879. (107-108).

* *Pritchard.* — *The University....* Observatoire de l'Université d'Oxford. Rapport du professeur Savilien au Comité des visiteurs; année 1878-1879. (108-112).

LE MAGNÉTISME terrestre et les taches solaires. (112-114).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en août. (114-116).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores d'août. (116-117).

Maunder (*E.-W.*). — Les lignes brillantes de l'oxygène dans le spectre solaire. (118-120).

Les observations de M. Draper ne paraissent pas prouver que les espaces lumineux qu'il identifie avec les lignes de l'oxygène soient réellement des lignes brillantes.

Dreyer (*J.-L.-E.*). — Note sur le point radiant de la comète I de 1870. (120).

Le point radiant de la Comète est 27°,9 + 48°,4, probablement identique avec le point radiant 32° — 53° signalé par M. Denning.

* *D'Abbadie.* — Instruments à employer en voyage (*Bulletin de la Société de Géographie.* Paris, 1879). (121).

* *Barker* (*G.-F.*). — *Spectroscopic....* Observations spectroscopiques, faites pendant l'éclipse de Soleil de 1879 (*Amer. Journal,* févr. et avril 1879). (122).

Tacchini (*P.*). — L'Observatoire du mont Etna. (123).

Les constructions à élever à la *Casa Inglese*, à une altitude de 3000^m, commenceront en 1879. L'Observatoire sera pourvu d'un équatorial de 0^m,35 d'ouverture. Le ciel de l'Etna est très favorable aux recherches de Spectroscopie.

Küstner. — Éléments paraboliques de la comète de Swift. (124).

MEMORANDA astronomiques pour septembre 1879. (125-126).

Denning (*W.-F.*). — Dates des chutes de bolides. (127-132).

La chute des bolides se répartit très inégalement entre les divers mois de l'année, ainsi que le montre le Tableau suivant, dressé par M. Greg :

Nombre de bolides dans les divers mois.

Janvier.......	239	Mai..........	163	Septembre....	273
Février.......	174	Juin..........	172	Octobre.......	292
Mars..........	186	Juillet........	287	Novembre....	551
Avril.........	234	Août........	775	Décembre.....	289

Dans chaque mois, les principales dates de chute sont :

Janvier.....	2	Juillet......	25-30
Février.....	7	Août.......	7-13
Mars.......		Septembre..	1-7
Avril.......	11-12, 19-20	Octobre....	
Mai........		Novembre..	11-15, 19, 27.
Juin		Décembre..	11-12, 21

Sawyer (*E.-F.*). — Nombre moyen des étoiles filantes observées aux différentes époques de l'année. (133-135).

Ledger (*E.*). — Catalogue des observations ou observations supposées du passage de la planète intra-mercurielle ou d'autres corps devant le Soleil. (135-138).

La liste de M. Ledger comprend vingt-quatre observations de cette espèce, faites de 1761 à 1865; elle est donc plus complète que celles de R. Wolf (1859), Carrington (1860) et Le Verrier (1867).

Draper (*J.-W.*). — Sur une nouvelle forme de spectromètre et sur la distribution de la lumière dans le spectre. (138-142).

La méthode de mesure employée par M. Draper consiste à faire disparaître la lumière de la région considérée du spectre à l'aide d'une lumière d'intensité constante, dont la distance à la dernière face du prisme est variable. Les résultats trouvés sont les suivants :

1° Dans le spectre prismatique, l'intensité de la lumière augmente d'une manière continue du violet extrême au rouge. Ce résultat est dû au mode particulier de dispersion d'un prisme.

2° Dans le spectre d'un réseau, l'intensité est constante dans toute la portion visible du spectre.

Une partie de ces résultats est incontestablement due à l'action de l'œil.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en septembre. (142-144).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de septembre. (144-147).

Kirkwood (*D.*). — Note sur le satellite intérieur de Mars. (147-148).

Arcimis (*A.*), *Capron* (*J.-R.*), *Grover* (*C.*) et *Penrose* (*F.-C.*). — Notes sur l'occultation d'Antarès le 28 juin 1879. (148-150).

Capron (*J.-Rand*). — Changements survenus dans une tache solaire du 28 juin au 5 juillet 1879. (150-151).

Hunt (*G.*). — Note sur le diamètre du disque apparent d'une étoile. (151-153).

M. Hunt croit pouvoir déduire, de la formule qui donne le diamètre du premier anneau obscur de diffraction d'une étoile, que le disque des étoiles de toutes les grandeurs doit être le même. L'éditeur fait observer que c'est une erreur.

* *Peckham* (*S.-F.*). — *Fall of a....* Chute d'un bolide le 10 mai 1879, dans l'État d'Iowa (*American Journal*, 1879, july). (153-154).

* *Winnecke*. — Rapport sur les travaux de l'Observatoire de Strasbourg en 1878 (*Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellsch.*, 1878). (154).

Notice nécrologique sur Thomas Maclear. (154-155).

Notice nécrologique sur Lamont. (155).

Memoranda astronomiques pour octobre 1879. (155-156).

Konkoly (*N. de*). — Observations spectroscopiques d'étoiles filantes. (157-158).

Les spectres sont continus avec quelques lignes brillantes.

Kirkwood (*D.*). — Notes sur les bolides observés aux États-Unis du 1er avril 1879 au 31 mars 1880. (158-166).

Common (*A.-A.*). — Description de son télescope de 3 pieds d'ouverture. (167-169).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en octobre. (169-170).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores d'octobre. (170-172).

Pujaron (*C.*). — Observation de l'éclipse de Soleil du 18 juillet 1879, faite à l'Observatoire de Cadix. (174).

Pritchett (*C.-W.*). — Observations de la tache rouge de Jupiter, faites en 1879 à l'Observatoire de Glasgow (Missouri). (174-178).

Russel (*H.-C.*). — Notes explicatives sur une sorte d'ombre vue sur la Lune le 21 octobre 1878. (178-180).

* *Versammlung.....* — Réunion de la Société Astronomique à Berlin, du 5 au 8 septembre 1879 [M. L. H]. (180-181).

* *Valdo (Léonard).* — *The Fort-Worth....* Rapport sur l'expédition envoyée à Fort-Worth pour l'observation de l'éclipse solaire du 29 juillet 1878. (182-184).

Observatoire de Poulkova. — M. Struve a commandé à Alvan Clark un objectif de 30 pouces anglais de diamètre; le prix est fixé à 160000^{fr}. (185).

Chandler (S.-C.). — Éléments et éphéméride de la comète *d* de 1879 (comète Palisa). (185).

Marth (A.). — Éphéméride des satellites de Mars et de Saturne pour 1879. (185-187).

MEMORANDA astronomiques pour novembre 1879. (187-188).

Downing (A.-M.-W.). — Note sur la détermination de la parallaxe horizontale du Soleil d'après les déclinaisons de Mars, observées à Leide et à Melbourne pendant l'opposition de 1877. (189-190).

La combinaison de ces observations donne

$$\pi = 8'',960 \pm 0'',051.$$

Les observations analogues faites en 1862 ont donné à M. Winnecke 8",96 et à M. Stone 8",94.

Ledger (E.). — Les éclipses des satellites de Mars. (191-193).

Les éclipses du satellite intérieur durent environ cinquante-trois minutes; celle du satellite extérieur quatre-vingt-quatre minutes.

Konkoly (N. de). — Observations spectroscopiques de la comète *d* de 1879 (comète de Palisa). (193-195).

Farquhar (H.). — L'éclat et la distribution des étoiles (I^{re} Partie). (195-200).

Gledhill (J.). — Étoiles doubles à observer en novembre. (200-201).

Denning (W.-F.). — Notes sur les météores de novembre. (201-204).

Denning (W.-F.). — Le point radiant de la comète I de 1870. (205).

Gledhill (*J.*).— Aspect de Jupiter en septembre 1879. (205).

La tache rouge est toujours visible.

Dennett (*F.*). — Observations de la tache rouge de Jupiter en août, septembre et octobre 1879. (206-207).

* *Green*. — *Observations*.... Observations de Mars, faites à Madère en 1877 (*Memoirs of the R. Astronomical Society*, vol. XLIV). (208-209).

* *Yarnall*. — *Washington Catalogue*.... Catalogue d'étoiles de Washington. 2^e^ édition (1 vol. in-4°; Washington, 1879). (209-210).

* *Hall* (*A.*). — *Motion of*.... Mouvement des satellites de Saturne (*Astronomische Nachrichten*, n° 2263). (210-212).

* *Astronomical Society*. — *Memoirs of*.... Mémoires de la Société Astronomique de Londres, vol. XLIV (1 vol. in-4°; Londres, 1879). (213-215).

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites de Mars et de Saturne en novembre 1879. (216-217).

MEMORANDA astronomiques pour décembre 1879. (217-218).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 14 novembre 1879. (219-234).

Tisserand (*F.*). — Note sur le mouvement d'Hypérion. (235-236).

Brett (*J.*). — La grosse tache de Jupiter. (236-238).

C'est une description de la tache rouge de Jupiter et une dissertation sur sa nature probable.

Corder (*H.*).— Notes sur des taches blanches qui se sont montrées sur les bandes de Jupiter du 24 octobre au 11 novembre 1879. (238-239).

Ces taches ont un mouvement propre, rapide par rapport à la tache rouge.

Farquhar (*H.*). — L'éclat et la distribution des étoiles (II^e^ Partie). (240-245).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en décembre. (245-246).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de décembre. (246-249).

Backhouse (*T.-W.*). — La tache rouge de Jupiter. (250-251).

Ledger (*E.*). — Note sur les passages d'une planète intra-mercurielle. (251-252).

Haase (*Zeitschrift für Astronomie*) donne des passages plus nombreux que ceux qu'a indiqués M. Ledger à la page 135 du présent Volume de l'*Observatory;* l'auteur pense que les observations se rapportent à des taches solaires.

* *Gould.* — *Uranometria Argentina....* Uranométrie Argentine (1 vol. in-4°; Buenos-Ayres, 1879). (252-254).

* *Vaughan.* — *On the origine....* Leçon sur l'origine des astéroïdes (*Popular Science Monthly*, 1879). (254-256).

* *Nautical Almanac for* 1883. (256-257).

Le *Nautical* pour 1883 renferme des positions de la Lune, calculées d'après les corrections faites par M. Newcomb aux Tables de Hansen.

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites de Mars et de Saturne pour décembre 1879. (257-258).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 12 décembre 1879. (259-270).

Young (*C.-A.*). — Observations des satellites de Mars, faites à Princeton (U. S.) en octobre et novembre 1879. (270-271).

Young (*C.-A.*). — Note sur la ligne *b* du spectre solaire. (271-272).

b_3 et b_4 sont des lignes doubles.

Ledger (*E.*). — Utilisation de l'action des marées. (272-274).

Kirkwood (*D.*). — Les étoiles filantes du 13-14 novembre. (274-275).

Les Léonides ont été très nombreux en 1879; ils avaient aussi été nombreux en 1846. Il paraît donc que l'anneau météorique de novembre renfermerait d'autres amas, à période de trente-trois ans, que celui que la Terre a rencontré en 1833 et 1866.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en janvier. (275-276).

Denning (W.-F.). — Notes sur les météores de janvier. (276-278).

Plummer (J.-I.). — Apparence des comètes de 1879. (278-279).

Le noyau de la comète de Palisa est devenu faible et diffus à l'époque du passage de l'astre au périhélie. Ce cas est analogue à celui de la comète d'Encke en 1871-72.

Gledhill (J.). — Jupiter en 1869 et 1879. L'ellipse et la tache rouge. (279-282).

Une tache elliptique, très voisine de la bande équatoriale sud, a été observée à Halifax (Observatoire de M. Crossley) de novembre 1869 à février 1870; est-elle identique à la tache rouge actuelle? La Note de M. Gledhill est accompagnée d'un dessin de Jupiter en 1870.

Holden (A.-P.). — La grande tache de Jupiter. (282-283).

La tache actuelle paraît en relation avec celle de 1869.

Johnson (S.). — Tache de Jupiter en 1792. (283).

Schröter a, en 1792, observé une tache obscure ronde sur l'hémisphère sud de Jupiter.

Pritchard (C.). — Note sur le diamètre photographique de la Lune. (283-285).

* *Burnham.* — *The Lick....* L'Observatoire Lick, sur le mont Hamilton (1 broch. in-4°; Chicago, 1879). (286).

* *Houzeau et Lancaster.* — Bibliographie générale de l'Astronomie (vol. in-8; Bruxelles, 1879...). (287).

MEMORANDA astronomiques pour janvier 1880. (287-290).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 9 janvier 1880. (291-303).

Discussion entre MM. Huggins, Ranyard et R. Capron sur les spectres photographiques des étoiles.

Clark (J.-Ed.). — Notes sur le bolide détonant observé dans le Yorkshire le 24 février 1880 (Ire Partie). (303-309).

* *Crossley (E.), Gledhill (J.) et Wilson (M.).* — *A Handbook....* Catalogue d'étoiles doubles à l'usage des amateurs (1 vol.; Londres, 1879) [E. Dunkin]. (309-312).

* *Capron (J.-Rand).* — *Auroræ; their characters....* Les au-

rores; leurs caractères et leurs spectres (1 vol.; Londres, 1879). [H. Pratt]. (312-314).

Common (*A.*). — Photographies de Jupiter. (314).

La Note très courte de M. Common est accompagnée de la reproduction photographique de vues de Jupiter, obtenues le 3 et le 8 septembre 1879 avec son miroir de 36 pouces. La première donne une impression nette de la tache rouge.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en février. (314-315).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de février. (316).

Tebbutt (*J.*). — Occultations d'étoiles brillantes observées à Windsor (N. S. W.) de 1875 à 1879. (317).

Pritchett (*C.-W.*). — Mouvement de la tache rouge de Jupiter. (317-318).

La tache paraît à l'auteur avoir un mouvement en longitude et un mouvement en latitude.

Dennett (*F.-C.*). — Notes sur quelques taches observées sur Jupiter en 1878 et 1879. (318-320).

Neison (*E.*). — Sur le demi-diamètre de la Lune. (321-323).

Brett (*J.*). — Remarques sur les discussions trop vives des dernières réunions de la Société Astronomique. (323-325).

* *Perrier et Ibañez*. — Jonction géodésique de l'Espagne et de l'Algérie (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris,* t. LXXXIV). (326-327).

* *Todd* (*D.-P.*). — *Solar parallax*.... La parallaxe solaire déterminée par la vitesse de la lumière (*American Journal,* 1879, january). (327-328).

Memoranda astronomiques pour février 1880. (329-330).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 13 février 1880. (331-337).

Clark (*J.-Ed.*). — Note sur le bolide détonant observé dans le Yorkshire le 24 février 1880 (IIe Partie). (337-343).

Herschel (*A.-S.*). — Note sur les bolides des 23-24 septembre 1876 et 1879. (343-347).

Sawyer (*E.-F.*). — Les étoiles filantes de décembre qui ont leur point radiant dans les Gémeaux. (347-347).

Oliver (*S.-P.*) — Un monument à élever à Halley. (348-350).

* *Giberne* (Miss *A.*). — *Sun, Moon*.... Le Soleil, la Lune et les étoiles; Astronomie pour les enfants (1 vol.; Londres, 1880) [E. Dunkin]. (351-352).

Gledhill (*J.*). — L'étoile double $\Sigma 547$ est une étoile variable à longue période. (352-353).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en mars. (353-354).

Denning (*W.-F.*). — Notes météoriques pour mars. (354-355).

Kirkwood (*D.*). — Les étoiles filantes du 13-14 novembre 1879. (355-356).

Denning (*W.-F.*). — Neuf étoiles peuvent être observées dans le trapèze d'Orion avec un miroir de 12 pouces. (356-358).

* *Pickering*. — *Report for*.... Rapport sur les travaux de l'Observatoire d'Harvard College en 1879. (359-360).

Memoranda astronomiques pour mars 1880. (361-362).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 12 mars 1880. (363-373).

Pratt (*H.*). — Remarques sur la prétendue formation d'un nouveau cratère dans la région nord d'Hyginus, signalée par M. Klein. (373-377).

Des observations nombreuses faites en 1878 et 1879 ont montré à M. Pratt qu'aucun nouveau cratère n'existait dans cette région et qu'on ne pouvait y trouver qu'une très légère dépression, de forme complexe et très difficile à bien voir.

Gledhill (*J.*). — Appel aux amateurs qui possèdent des lunettes de large ouverture. (377-382).

M. Gledhill propose aux astronomes amateurs d'observer une série d'étoiles doubles difficiles à séparer; la plupart sont prises dans les Catalogues de Struve ou de Burnham.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en avril. (382-383).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes d'avril. (383-384).

Janisch (*Hudson-R.*). — Notes sur la grande comète de l'hémisphère austral. (385).

Penrose (*F.-C.*). — Courbure dans la trajectoire d'un bolide. (386-387).

Swift (*L.*). — Note sur la rédaction des dépêches astronomiques. (387).

* *Pickering*. — *Annals of*.... Annales de l'Observatoire d'Harvard College. Tome XI [1 vol. in-4°; Cambridge (U. S.), 1879]. (387-390).

Hind et *Finlay*. — Orbite de la grande comète australe. (390).

Les orbites calculées par M. Hind ou par M. Finlay offrent une grande ressemblance avec l'orbite de la grande comète de 1843.

Davidson (*G.*). — Notes sur l'éclipse solaire du 11 janvier 1880. (391).

Les observateurs ont en vain cherché Vulcain.

* *Adams*. — *Cambridge Observations*.... Observations faites à Cambridge de 1861 à 1865. T. XXI (1 vol. in-4°; Cambridge, 1879). (392).

Memoranda astronomiques pour le mois d'avril 1880. (393-394).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 9 avril 1880. (395-408).

Discussion entre M. Chambers et le Président sur l'opportunité de soumettre le Règlement intérieur de la Société à une revision générale. Le conseil a ajourné la proposition; mais M. Chambers se propose de la reproduire.

Burnham (*S.-W.*). — Notes sur quelques étoiles doubles. (408-409).

Kirkwood (*D.*). — La *Cosmogonie* de Laplace. (409-412).

Après un examen de la *Cosmogonie* de Laplace, M. Kirkwood arrive aux conclusions suivantes :

1° L'hypothèse de Laplace n'explique pas l'immense intervalle qui existe entre les orbites des planètes.

2° Dans cette hypothèse, la période nécessaire à la formation d'une planète au moyen d'un anneau de matière cosmique est plus longue que l'âge probable du système solaire.

3° La théorie de Laplace n'explique pas la formation des satellites.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en mai. (412-413).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de mai. (413-415).

Terby (*F.*). — Remarques sur les taches de Mars et annonce d'un nouveau Mémoire. (416).

Trouvelot (*L.*). — Notes sur les taches brillantes de Vénus. (417-418).

M. Trouvelot annonce une discussion des observations qu'il a faites sur Vénus depuis 1875.

Cance (*J.-L.-M.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (418).

Airy (*G.-B.*). — L'accélération séculaire de la Lune. (419-420).

* *Cornu.* — Limite ultra-violette du spectre solaire (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris, t. LXXXVII et LXXXIX). (420-421).

* *Draper* (*H.*). — *Photographies of....* Photographies du spectre des étoiles (*American Journal,* 1879, december). (421-422).

Gould (*B.-A.*). — Observations de la grande comète de l'hémisphère austral. (422-423).

NOTICE nécrologique sur RAGOONATHA CHARY. (423-424).

Ragoonatha Chary était depuis trente-six ans attaché, en qualité d'assistant, à l'Observatoire de Madras; il laisse un très grand nombre d'observations méridiennes. C'était un observateur habile et un calculateur très exercé.

Holetschek (*J.*) et *Zelbr* (*K.*). — Éléments et éphéméride de la comète I de 1880. (424-425).

MEMORANDA astronomiques pour mai 1880. (425-426).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 14 mai 1880. (427-439).

Forbes (*G.*). — Les comètes et les planètes ultra-neptuniennes. (439-446).

Si l'on range les comètes pour lesquelles des orbites elliptiques ont été calculées d'après l'ordre de leurs distances aphélies, on forme le Tableau suivant :

Tableau des distances aphélies des comètes elliptiques.

Comètes.	Distances aphelies.	Comètes.	Distances aphelies	Comètes	Distances aphelies.
Encke.........	4,1	1852, IV.....	32,0	1811, II..	181,4
Pons..........	4,8	1812.........	33,4	1807.....	285,2
1844, I........	5,0	1815........	34,0	1858, VI.	303,8
1743, I.	5,3	1846, IV.....	34,5	1769.....	322,8
1766, II.......	5,5	1847, V......	35,0	1840, II..	359,3
1819, III.......	5,5	Halley.......	35,4	1827, III.	377,4
Brorsen.......	5,6	1862, III....	48,6	1846, I...	388,2
Lexell.........	5,7	1683.........	65,5	1811, I...	420,7
1846, III.......	5,7	1857, IV.....	74,9	1825, IV.	533,6
D'Arrest.......	5,7	1845, III.....	78,9	1822, IV.	617,0
Faye..........	6,0	1840, IV.....	96,7	1680.....	620,0
Biela..........	6,2	1843, I......	100,0	1851, III.	624,0
1783, I........	7,8	1846, VII....	108,2	1763.....	754,3
1846, VI.......	9,4	1861, I......	110,3	1849, III.	823,6
1858, I........	11,0	1793, II......	111,0	1830, I...	2971,3
1866, I........	16,8	1861, II......	111,2	1780, I...	3209,9
1863, V........	27,6	1855, II......	124,2	1844, II..	4275,6

Les comètes paraissent ainsi former quatre groupes : pour le premier, la distance aphélie est peu supérieure au rayon de l'orbite de Jupiter; pour le deuxième, les distances sont aussi peu supérieures au rayon de l'orbite de Neptune. M. Forbes pense que les distances aphélies des deux autres groupes doivent aussi être peu supérieures aux rayons de deux planètes ultra-neptuniennes encore inconnues. C'est l'action de ces planètes qui aurait jeté les comètes considérées dans notre système solaire. Ce phénomène n'a d'ailleurs pu se produire qu'à une époque où la comète et la planète inconnue se sont trouvées voisines, et le point du maximum de perturbation a dû devenir l'aphélie de la comète. Les positions des périhélies des comètes des troisième et quatrième groupes sont donc voisines des positions occupées, aux dates des aphélies, par les planètes troublantes; il devient alors possible de déterminer approximativement l'orbite de ces corps.

Pour la première planète ultra-neptunienne, la longitude du nœud ascendant est de 250° et l'inclinaison de 53°. L'astre serait aujourd'hui par $11^h 40^m$ d'ascension droite et 87° de distance polaire.

Les comètes du quatrième groupe conduisent à des résultats moins précis.

Le Mémoire de M. G. Forbes sera inséré dans le prochain Volume des *Mémoires de la Société Royale d'Édimbourg.*

Gledhill (J.). — Étoiles doubles à observer en juin. (447-448).

Denning (W.-F.) — Notes sur les étoiles filantes de juillet. (448-449).

Ledger (E.). — La tache rouge de Jupiter. (449-450).

Il y aurait un rapport intime entre la tache rouge actuelle et celle observée par lord Rosse en 1873.

Burnham (*S.-W.*). — Découverte d'un compagnon à 6 du Cocher. (451).

Wolf (*C.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (451-452).

Liste de trente-six étoiles nouvelles des Pléiades.

Knott (*G.*). — Note sur une étoile de grandeur 13,5 située au voisinage d'Alcyone. (452-453).

Baxendell (*J.*). — Liste de nouvelles étoiles variables. (453-454).

Bredikhine (*Th.*). — Classification des queues des comètes. (454-455).

* *Airy* (*G.-B.*). — *Theory of....* Théorie des erreurs d'observations. 3e édition (1 vol. in-8°; Londres, 1880). (455-456).

NOTICE nécrologique sur C.-A.-F. Peters. (456).

Martin (*H.*). — Éléments et éphéméride de la comète *b* de 1880 (comète Schäberle). (457).

MEMORANDA astronomiques pour juin 1880. (457-458).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 1er juillet 1880. (459-470).

Discussion entre MM. Pritchard, Neison, de la Rue et Christie sur la valeur des photographies lunaires faites à l'Observatoire de l'Université d'Oxford, au point de vue des mesures propres à déterminer la grandeur de la libration.

Young (*C.-A.*). — Mesures du diamètre équatorial et du diamètre polaire de Mars, faites à l'Observatoire de Princeton (U.-S.). (471-474).

L'aplatissement de Mars $= \frac{1}{234}$. Les mesures ont été faites avec un micromètre à fils.

* *Boss.* — *Declination of....* Déclinaison des étoiles fixes (1 vol. in-4°; Washington, 1880) [A.-M. Downing]. (474-479).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en juillet. (479-480).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de juillet.

Terby (*F.*) — Remarques sur les taches de Vénus et de Mars. (482-484).

M. Terby signale les principaux dessins où figurent les jonctions entre la mer de Tycho et la mer de Delambre.

Cance (*J.-L.-M.*). — La nébuleuse des Pléiades. (484).

* *Airy* (*G.-B.*). — *Report*.... Rapport sur les travaux effectués à Greenwich en 1879-1880. (485-488).

Todd (*D.-P.*). — Observation du passage de Mercure, faite à Washington le 6 mai 1878. (488).

MEMORANDA astronomiques pour le mois de juillet. (489-490).

Smyth (*Piazzi*). — La spectroscopie pratique en 1880. (491-500).

Langley (*S.-P.*). — La Physique solaire (I^{re} Partie). (501-506).

M. Langley fait l'historique des travaux effectués depuis 1862 par les spectroscopistes et par MM. Abney et Draper au moyen des photographies.

Dennet (*F.-C.*). — Le cratère lunaire Peirce A. (506-508).

Ce cratère est le plus nord et le plus petit de trois cratères situés dans la partie ouest de la mer des Crises; M. Dennet décrit ses variations d'apparence avec les âges de la Lune.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en août. (508-511).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes d'août. (511-513).

Abney (*W.-J.-W.*). — Remarques sur une photographie du spectre de Jupiter, par M. Draper. (513-514).

L'intensité particulière de la photographie du spectre du centre du disque tient à ce que la lumière solaire réfléchie par cette région a subi une absorption moindre que celle réfléchie par les bords, et non pas à une lumière propre émise par Jupiter.

Tebbutt (*J.*). — Observations d'étoiles doubles de l'hémisphère austral. (514-515).

* *Pickering*. — *Annals of*.... Annales de l'Observatoire d'Harvard College. Tome XI [1 vol. in-4°; Cambridge (U. S.)]. (515-518).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations sur les variations d'éclat de Frigga (77). (518-519).

Les variations d'éclat ne peuvent être expliquées par une rotation de la planète.

* *Dreyer* (*J.-L.-E.*). — *Progress of*.... Les progrès de l'Astronomie en 1879 (*Proceedings Roy. Dublin Soc.*, 1880). (519).

Lohse. — Éphémérides pour l'observation de la tache rouge de Jupiter. (520).

Memoranda astronomiques pour le mois d'août 1880. (521-522).

Smyth (*Piazzi*). — La Spectroscopie pratique en 1880 (IIe Partie). 523-529).

Langley (*S.-P.*). — La Physique solaire. IIe Partie. (529-534).

M. Langley analyse les travaux de M. Abney et de M. Cornu sur le spectre solaire, dont l'étendue a été triplée par ces physiciens.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en septembre. (535-536).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de septembre. (536-539).

Kirk (*E.-B.*). — L'étoile double δ du Cygne. (539).

Pratt (*H.*). — Carte du groupe de ε de la Lyre. (540).

Tebbutt (*J.*). — Éléments de la comète I de 1880. (540-541).

Hickley (*J.-G.*). — Observation de la protubérance solaire du 31 juillet 1880. (541-542).

Le spectre de la protubérance était caractérisé par une ligne brillante comprise entre B et C.

Kirk (*F.-B.*). — Spectre de l'aurore boréale. (542-543).

Le spectre de l'aurore du 12 août 1880 était formé de :
1° Une bande très brillante dans le jaune, plus réfrangible que D;
2° Une bande faible et large, voisine de *b* et diffuse du côté du violet;
3° Une bande très distincte vers F;
4° Une ligne très fine vers G.

Airy (*G.-B.*). — Observations des Perséides, faites en août à Greenwich. (543-544).

La proportion des Perséides sur les étoiles filantes sporadiques a augmenté en 1879.

* *Oppolzer* (*Th. von*). — Le milieu planétaire résistant et les grandes comètes de 1843 et de 1880 (*Astronomische Nachrichten,* nos 2314 et 2319). (543-547).

* *Robinson.* — *Armagh....* Catalogue d'étoiles d'Armagh (1 vol. in-4°; Dublin, 1880). [J.-L.-E. Dreyer]. (548).

* *Houzeau.* — Uranométrie générale (*Annales de l'Observatoire de Bruxelles,* 2e série, t. I). [J.-L.-E. Dreyer]. (548).

* *Newcomb* (*S.*). — *The recurrence....* Le cycle des éclipses solaires (*Papers for the use of the American Nautical Almanac,* t. I). (548-550).

* *Airy* (*G.-B.*).— *Greenwich spectroscopic....* Résultat des observations spectroscopiques faites à Greenwich en 1878 et 1879 (1 vol. in-4°; Londres, 1880). (550-551).

Bigourdan. — Éléments et éphéméride de la comète II de 1880. (552).

MEMORANDA astronomiques pour septembre 1880. (553-554).

Smyth (*Piazzi*). — La Spectroscopie pratique en 1880. (IIIe Partie.) (555-564).

Airy (*G.-B.*). — Sur le voisinage actuel de Jupiter et de la Terre et sur le retour d'un semblable phénomène. (564-565).

Une opposition presque semblable se produira dans douze ans.

Russell (*H.-C.*). — L'éclipse totale de Lune du 22-23 juin 1880. (565-568).

Burnham (*S.-W.*). — L'étoile multiple OΣ 496. (568-569).

Les composantes n'ont pas changé de position depuis les observations de Struve en 1851.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en octobre. (569-570).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes d'octobre. (570-573).

Baldwinn (*H.-L.*). — La visibilité de Vénus pendant le jour. (573-574).

Vénus a été vue, à l'œil nu, le 25 juillet à $10^h 20^m$ du matin, alors que sa distance au Soleil n'était que de $3°38'$.

Common (*A.-A.*). — Observations de la comète de Faye. (575-576).

La comète a été trouvée le 2 août avec le télescope de 3 pieds.

Richards (*W.-J.-B.*) et *Cooper* (*W.-E.*). — L'aurore boréale du 12 août 1880. (576-577).

Konkoly (*N. de*). — Les étoiles filantes d'août. (577).

Un très beau bolide, plus brillant que Jupiter, observé le 9 août, a donné un spectre continu sur lequel se détachaient les lignes brillantes du sodium et du lithium.

Knott (*G.*). — La couleur de α de la Lyre. (578-579).

Gledhill (*J.*). — Notes sur l'observation de la couleur des étoiles et sur la couleur de δ du Cygne (579-580).

Hunt (*G.*). — Le compagnon de Sirius signalé par Smyth. (580-581).

Il s'agit d'une petite étoile de 13ᵉ grandeur, éloignée de Sirius de $1061''$, et dont l'angle de position est $48°$ environ.

Plummer (*J.-I.*). — Les météorites et le Soleil. (581-582).

Burnham (*S.-W.*). — Découverte d'un compagnon à 5 de Persée. (582).

La distance est de $5'',60$ et l'angle de position de $273°,6$; le compagnon est faible.

Burnham (*S.-W.*). — L'étoile double 85 de Pégase. (582-583).

Le mouvement orbital est rapide et le mouvement propre considérable.

* *Sande Bakhuyzen* (*E.-F. van de*). — *Bepaling van*... Détermination de l'obliquité de l'écliptique (1 vol. in-8°; Leyde, 1879). [J.-L.-E. Dreyer]. (583).

* *Ball*. — *Speculations on*.... Hypothèses sur l'origine des météorites (*Proc. of the R. Irish Academy*, 2ᵉ série, t. III). [J.-L.-E. Dreyer]. (583-584).

Memoranda astronomiques pour octobre 1880. (584-586).

Huggins (*M.-L.*). — Notice sur la vie et les travaux de W. Lassell. (587-590).

Kirkwood (*D.*). — La grande comète australe de 1880. (590-592).

Dissertation sur l'identité possible de la comète de 1843 avec la grande comète de 1880.

Konkoly (*N. de*). — Observations spectroscopiques de la comète d'Hartwig (comète *d* de 1880). (592-594).

Le spectre est composé d'un spectre continu traversé par quatre bandes brillantes ayant pour longueurs d'onde 5610, 5492, 5163 et 4856. Ces lignes sont voisines de celles de C^2H^2.

Hall (*A.*) — Les progrès de l'Astronomie (I^re^ Partie). (594-601).

Analyse des progrès apportés à la Mécanique céleste par Lagrange, Laplace, Gauss et Bessel. Observations de W. et O. Struve sur les étoiles filantes.

Gledhill (*J.*). — L'étoile *h* n° 78, voisine du trapèze d'Orion, est-elle variable? (601-603).

Cette étoile, de grandeur 12,5, est difficile à voir; mais les observations de Bond et de Struve ne prouvent point sa variabilité.

Gledhill (*J.*). — Trois objets d'épreuve pour les télescopes de grande ouverture. (604-605).

Ces objets sont η des Poissons, étoile double dont les composantes sont à 1″,02 de distance, 85 Pégase et β du Scorpion, étoiles triples dont les composantes voisines sont à 0″,7.

Hunt (*G.*). — Mesures de certaines paires d'étoiles doubles au point de vue de la mesure des équations personnelles. (605-607).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en novembre. (607-608).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de novembre. (608-609).

Backhouse (*T.-W.*). — Échelle étalon du spectre. (609-610).

L'échelle devrait être, non pas les longueurs d'onde, mais le nombre de vibrations en une seconde.

Baxendell (*J.*). — Remarques sur la mesure de la couleur des étoiles. (610-611).

Lynn (*W.-T.*). — La division de l'anneau de Saturne. (611-612).

Vogel (*H.-C.*). — L'aberration chromatique des objectifs. (612-613).

* *Konkoly* (*N. de*). — Annales de l'Observatoire de O'Gyalla. (613).

Burnham (*S.-W.*). — *Report of....* Rapport de la Commission de l'Observatoire de James Lick sur les observations faites sur le mont Hamilton (1 br. in-4°; Chicago, 1880). (613).

Tebbutt (*J.*). — Visite à l'ancien Observatoire de Paramatta. (614-616).

* *Hartwig* (*E.*). — *Untersuchungen....* Recherches sur les diamètres de Vénus et de Mars, d'après les observations faites à l'héliomètre (1 br. in-4°; Leipzig, 1879). [J.-L.-E. Dreyer]. (616-618).

* *Burnham* (*S.-W.*). — *Double stars....* Observations d'étoiles doubles, faites avec l'équatorial de $18^{p},5$ de Chicago en 1877-1878 (*Memoirs of the R. Astronomical Society,* t. XLIV). [J.-L.-E. Dreyer]. (618-620).

La comète de Hartwig (IV de 1880). (620-621).

Le spectre de la comète est formé de trois bandes de l'hydrogène carboné. Suivant M. Winnecke, la comète est identique à celle de 1506.

Observatoire de Halsted, à Princeton College (New-Jersey). (622).

Le professeur Young a acquis pour lui un objectif de 23 pouces par Clark.

Bigourdan (*G.*). — Éphéméride de la comète de Schäberle (*b* de 1880). (623)

Meyer (*M.-W.*). — Éléments et éphéméride de la comète d'Hartwig (*d* de 1880). (623).

Memoranda astronomiques pour le mois de novembre 1880. (623-626).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 12 novembre 1880. (627-637).

Pratt (*H.*) et *Gledhill* (*J.*). — Le groupe de Σ de la Lyre. (637-640).

La Note contient une Carte très détaillée de ce groupe d'étoiles.

Hall (*A.*).— Les progrès de l'Astronomie. (IIe Partie). (640-645).

Young (*C.-A.*). — Le spectre de la comète de Hartwig. (645-647).

Le spectre de la comète est formé des trois bandes ordinaires, très voisines de celles de l'hydrogène carboné.

Pratt (*H.*).— L'étoile variable *h* n° 78 du Trapèze d'Orion. (647-648).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en décembre. (648-649).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles doubles de décembre. (649-651).

Dennet (*F.-C.*). — L'hémisphère nord de Jupiter. (652-654).

Un grand nombre de taches sont visibles sur la planète.

Denning (*W.-F.*). — Les taches de Jupiter en novembre 1880. (654-655).

Dans la bande équatoriale nord, il y a une tache blanche à mouvement propre rapide qui marche vers la tache rouge.

Peters (*C.-H.-F.*). — La planète intra-mercurielle. (656).

* *Auwers*. — *Fundamental Catalogue*.... Catalogue fondamental d'étoiles pour l'observation des zones de l'hémisphère nord (1 vol. in-4°; Leipzig, 1880). [J.-L.-E. Dreyer]. (657-658).

* *Houzeau* (*J.-C.*). — Répertoire des constantes de l'Astronomie (1 vol. in-4°; Bruxelles, 1879). [J.-L.-E. Dreyer]. (659).

L'Observatoire de Cork. — Description abrégée du nouvel Observatoire du Collège Royal de Cork. (659).

* *Ball*. — *Dunsink observations*.... Observations faites à l'Observatoire de Dunsink en 1871-1872 (IIIe Partie) (1 vol. in-4°; Dublin, 1879). [J.-L.-E. Dreyer].

* *Oppolzer* (*Th. v.*). — *Lehrbuch*.... Traité du calcul des orbites (IIIe Partie) (1 vol. in-8°; Leipzig, 1879). [J.-L.-E. Dreyer]. (660).

* *Pritchard*. — *Annual Report*.... Rapport annuel sur les travaux de l'Observatoire d'Oxford (1 br. in-8°; Oxford, 1880).

Zelbr (*K.*) et *Hepperger* (*J.*). — Éléments de la comète *e* de 1880 (comète de Swift). (662-663).

La comète est identique avec la comète III de 1869; la période est donc de onze ans environ.

Winnecke. — La comète *d* de 1880 (comète de Hartwig). (663).

La comète est identique avec celles de 1382, 1444, 1506 et 1569; sa période serait ainsi de soixante-deux ans un tiers.

Memoranda astronomiques pour le mois de décembre 1880. (663-666). G. R.

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. Udgivet af Sophus Lie, Worm Müller og G.-O. Sars. Kristiania (1).

Tome III; 1879.

Sexe (*S.-A.*). — Comment on évite les quantités imaginaires. (145-166).

L'auteur remplace l'opération impossible de l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative $-k^2$ par l'opération, toujours possible, de la décomposition de la quantité $\pm k^2$ en deux facteurs, $+k$ et $\pm k$, de même valeur numérique. Il parvient par ce moyen à établir, sans le secours des imaginaires, plusieurs propositions que l'on démontre d'habitude à l'aide de ces symboles.

Lie (*S.*). — Théorie des groupes de transformations. V. (232-261; all.).

Dans un travail précédent, l'auteur a déterminé, par des calculs assez compliqués, tous les groupes de transformations de contact d'un plan. Dans le présent Mémoire, cette détermination est effectuée d'une manière beaucoup plus simple. On trouve qu'il n'existe que trois groupes de transformations de contact qui ne peuvent, par aucun choix possible de coordonnées, être ramenés à des groupes de transformations de points.

(1) Voir *Bulletin*, III_2, 185.

Lie (*S*.). — Détermination de toutes les surfaces intégrales algébriques de l'équation différentielle $s = o$ inscrites dans une développable algébrique. (334-344; all.).

Les surfaces intégrales de l'équation $s = o$ ont des équations de la forme

$$z = F(x) + \Phi(y). \tag{1}$$

Pour qu'une telle surface contienne une courbe donnée (x, y, z), et qu'elle ait le long de cette courbe des plans tangents donnés, dont les coefficients de direction soient X, Y, Z, elle deva être représentée par l'équation

$$z = -\int \frac{X}{Z}\,dx - \int \frac{Y}{Z}\,dy, \tag{2}$$

x et y étant considérées, après l'intégration, comme variables indépendantes. Si x, y, z, X, Y, Z sont des fonctions *algébriques* données d'une variable auxiliaire, la surface (2) sera généralement *transcendante;* ce qui veut dire que la surface (1) qui touche une développable donnée suivant une courbe algébrique choisie arbitrairement est en général transcendante. Dans le présent travail, l'auteur fait voir qu'il est toujours possible d'inscrire dans une développable algébrique quelconque ∞^{∞} surfaces algébriques (1), et en même temps que toutes ces surfaces sont déterminées par une construction remarquable. Des théorèmes semblables ont lieu toutes les fois qu'il s'agit, en général, d'une équation quelconque aux dérivées partielles du second ordre, dont les surfaces intégrales sont représentées par des équations de la forme

$$x = At + A_1\tau, \quad y = Bt + B_1\tau, \quad z = Ct + C_1\tau.$$

Cette classe comprend entre autres l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima.

Lie (*S*.). — Sur la théorie des surfaces de courbure constante. (I, 345-354; II, 355-366; all.).

Pour déterminer les sections principales et les lignes de courbure d'une surface quelconque de courbure constante, l'auteur présente d'abord les considérations suivantes :

Soit proposé d'intégrer les trois équations aux différentielles ordinaires du premier ordre

$$X_1\,dy - Y_1\,dx = o, \quad X_2\,dy - Y_2\,dx = o, \quad X_3\,dy - Y_3\,dx = o, \tag{1}$$

dont les intégrales, inconnues d'ailleurs, peuvent se mettre sous la forme

$$u, \; v, \; f(u) + \varphi(v).$$

Alors nos équations admettront des multiplicateurs eulériens M_1, M_2, M_3, satisfaisant à une relation de la forme

$$M_1(X_1\,dy - Y_1\,dx) + M_2(X_2\,dy - Y_2\,dx) + M_3(X_3\,dy - Y_3\,dx) = o.$$

De là résulte que l'on a

$$\frac{M_1X_1 + M_2X_2}{X_3} = \frac{M_1Y_1 + M_2Y_2}{Y_3} = -M_3, \tag{2}$$

ou

$$M_2 = \frac{Y_1X_3 - Y_3X_1}{Y_3X_2 - Y_2X_3} M_1 = \varphi(x, y) M_1, \tag{3}$$

φ désignant une fonction connue de x et de y. Portons cette valeur dans l'équation

$$X_2 \frac{d \log M_2}{dx} + Y_2 \frac{d \log M_2}{dy} = -\frac{dX_2}{dx} - \frac{dY_2}{dy},$$

ce qui conduit à la relation

$$X_2 \frac{d \log M_1}{dx} + Y_2 \frac{d \log M_1}{dy} = -\frac{dX_2}{dx} - \frac{dY_2}{dy} - X_2 \frac{d \log \varphi}{dx} - Y_2 \frac{d \log \varphi}{dy},$$

à laquelle nous joindrons l'équation connue

$$X_1 \frac{d \log M_1}{dx} + Y_1 \frac{d \log M_1}{dy} = -\frac{dX_1}{dx} - \frac{dY_1}{dy}.$$

Nous obtenons ainsi d'abord M_1 par une quadrature, puis M_2 et M_3 au moyen de (2) et de (3). L'intégration de l'équation (1) n'exige donc que deux quadratures consécutives.

Mais on sait maintenant que les équations finies des sections principales et des lignes de courbure d'une surface quelconque de courbure constante peuvent se ramener à la forme

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad u \pm v = \text{const.}$$

Par suite, la détermination de ces courbes n'exige que deux quadratures successives, dont l'une peut même être évitée.

Sur les surfaces de courbure *moyenne* constante, les lignes de courbure sont des courbes isothermes. En conséquence, sur ces surfaces, les lignes de courbure, ainsi que les lignes géodésiques dont la longueur est égale à zéro, sont déterminées par une quadrature. Cette intégration se rattache d'ailleurs de la manière la plus étroite avec celle que nous avons effectuée tout à l'heure. En effet, par un déplacement convenable, une surface de courbure moyenne constante se change en une surface de courbure constante, et en même temps les lignes de courbure deviennent des lignes de courbure; les lignes géodésiques de longueur nulle deviennent des sections principales.

Cette théorie, développée dans la première Note, nous paraît être nouvelle, tandis que les théorèmes de la seconde Note ont été déjà donnés par Dini [1].

Lie (*S.*). — Nouvelles recherches sur les surfaces minima. (477-506; all.).

Si l'on applique à une surface minimum un mouvement ou une transformation de similitude quelconque, la surface transformée est encore une surface minimum. L'équation aux dérivées partielles des surfaces minima est, par conséquent, transformée en elle-même par les tranformations appelées tout à l'heure *transformations* ∞^7 *fois linéaires*. Les seules équations aux dérivées partielles du second ordre qui admettent toutes ces transformations sont évidemment celles

[1] *Annali di Matem.*, 2e série, t. IV, p. 174-206.

dont les surfaces intégrales sont caractérisées par cette propriété que leurs rayons de courbure sont dans un rapport constant.

Si l'on demande toutes les surfaces minima qui, par un nombre ∞^3 ou plus grand encore de transformations linéaires, sont transformées de nouveau en des surfaces minima, on trouve, comme l'auteur l'a déjà indiqué en 1870, la seule surface minimum découverte pour la première fois par Scherk,

$$e^{2y}\cos(\rho x - rz) + \cos(\rho x + rz) = 0,$$

avec ses dégénérescences, parmi lesquelles se trouve l'hélicoïde à génératrice rectiligne.

On est conduit à cette surface minimum en cherchant toutes les surfaces minima engendrées par le mouvement de translation d'une courbe dont la longueur d'arc est différente de zéro. La surface de Scherk peut être engendrée d'une infinité de manières par le mouvement de translation d'une courbe, et, en particulier, de *six* manières différentes par le mouvement de translation d'une courbe plane.

Lie (*S.*). — Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation. (507-512; all.).

Voir *Bulletin*, IV_2, p. 300-304.

Tome V; 1880.

Lie (*S.*). — Sur la théorie des surfaces de courbure constante. III. (282-306; all.).

Combinons les quatre équations

$$(1)\qquad \begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = a^2, \\ p\,(x-x_1) + q\,(y-y_1) - (z-z_1) = 0, \\ p_1(x-x_1) + q_1(y-y_1) - (z-z_1) = 0, \\ pp_1 + qq_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

avec les équations

$$(2)\qquad z = f(x,y),\quad p = \frac{\partial f}{\partial x},\quad q = \frac{\partial f}{\partial y};$$

concevons qu'entre ces équations on ait éliminé x, y, z, p, q et que l'on se propose de déterminer, au moyen des deux équations résultantes, les quantités p_1 et q_1 en fonction de x_1, y_1, z_1, de telle manière que l'équation

$$(3)\qquad dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0$$

soit intégrable. On trouve que, pour cela, il faut et il suffit que $z = f$ satisfasse à l'équation aux dérivées partielles

$$(4)\qquad s^2 - rt = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$$

et que, par suite, la surface $z = f$ ait une courbure constante. Les surfaces, en nombre simplement infini,

$$z_1 = f_1(x_1, y_1, a),$$

obtenues par l'intégration de (3), ont alors aussi une courbure constante. D'après Bianchi, l'intégration de (3) peut toujours s'effectuer par une quadrature, lorsque les lignes géodésiques de la surface de courbure constante proposée $z = f$ ont été déterminées, et, suivant une remarque de l'auteur, on peut ensuite obtenir également par une quadrature les lignes géodésiques des surfaces $z_1 = f_1(x_1, y_1, a)$. En conséquence, la transformation (1) peut être appliquée de nouveau aux surfaces $z_1 = f_1(x_1, y_1, a)$, ce qui donne ∞^2 surfaces de courbure constante $z_2 = f_2(x_2, y_2, a, b)$, et ainsi de suite.

Ici se pose l'intéressante question de savoir combien de surfaces de courbure constante *différentes* pourront, de cette manière, être déduites d'une *seule* surface de cette espèce $z = f$ en répétant *à l'infini* la transformation (1).

Par des calculs assez longs, on démontre que l'ensemble des surfaces dérivées ne satisfait jamais à aucune équation aux dérivées partielles du premier, du deuxième, du troisième ou du quatrième ordre, autre que l'équation (4).

Geelmuyden (*H.*). — Le mouvement conique du pendule. (307-327).

L'auteur développe la théorie du pendule conique, et indique pour les formules trouvées un mode convenable de calcul numérique.

Lie (*S.*). — Sur la théorie des surfaces de courbure constante. IV. (328-358; all.).

Ce Mémoire donne la solution du difficile problème posé dans le travail précédent. L'auteur démontre que l'ensemble des surfaces déterminées par des quadratures successives ne satisfait à aucune autre équation aux dérivées partielles que l'équation obtenue

$$(1) \qquad s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^4}{a^2}.$$

L'ensemble des surfaces dérivées F forme donc ce qu'Ampère et ses successeurs, par exemple Imschenetsky, ont appelé une *intégrale générale* de l'équation (1). Il faut toutefois remarquer ici que cette définition n'est pas exacte. En effet, prenons, par exemple, toutes les surfaces de courbure constante inscrites à une même développable. L'ensemble de ces surfaces ne satisfera alors à aucune équation aux dérivées partielles autre que (1), et par suite, d'après la définition en question, elles formeront une *intégrale générale*. Mais il est évident qu'il existe des surfaces de courbure constante qui ne sont ni des surfaces inscrites dans la développable considérée ni des intégrales singulières de (1).

Ce Mémoire montre donc comment, étant donnée une surface de courbure constante dont les lignes géodésiques sont connues, on peut en déduire, *par des quadratures successives*, un nombre ∞^∞ d'autres surfaces de même nature. Sur toutes ces surfaces on saura déterminer non seulement les lignes de courbure et les sections principales, mais encore les lignes géodésiques.

En combinant ces résultats avec les théories connues, on reconnaît, entre autres conséquences, que, par des quadratures successives, on peut déterminer ∞^∞ surfaces de courbure moyenne constante, et, pareillement, ∞^∞ surfaces dont les rayons de courbure ont une différence constante.

Lie (*S.*). — Sur la théorie des surfaces de courbure constante. V. (358-381).

Pour chercher si l'équation

$$(1) \qquad s^2 - rt = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$$

peut s'intégrer par la belle méthode d'intégration de M. Darboux, il faut se demander s'il existe des équations aux dérivées partielles qui aient ∞^∞ surfaces intégrales communes avec l'équation (1). Depuis longtemps on connaît deux équations de cette nature : d'abord l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

et en second lieu l'équation du second ordre considérée par Monge et par J.-A. Serret, et dont les surfaces intégrales sont des surfaces réglées, contenant le cercle de la sphère. L'auteur démontre, par des calculs assez compliqués, qu'il n'existe pas d'autre équation aux dérivées partielles ayant ∞^∞ surfaces intégrales communes avec (1).

Ainsi l'équation (1) ne peut s'intégrer par la méthode de M. Darboux, d'où il résulte dès lors que l'intégrale de l'équation (1) n'appartient pas à la première classe d'Ampère.

S. L.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome XCII; 1881.

N° 1; 3 janvier.

Faye. — Recherches de M. Fournier sur la baisse du baromètre dans les cyclones. (22).

Baillaud. — Sur les observations des satellites de Jupiter faites à l'Observatoire de Toulouse. (25).

Rouget (*C.*). — Sur un procédé d'observation astronomique à l'usage des voyageurs, les dispensant de la mesure des angles pour la détermination de la latitude et du temps sidéral. (27).

Darboux (*G.*). — Détermination des lignes de courbure de toutes les surfaces de quatrième classe, corrélatives des cyclides qui ont le cercle de l'infini pour ligne double. (29).

---

(1) Voir *Bulletin*, IV_2, 13.

Il résulte facilement de propositions établies par l'auteur dans son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* qu'on peut effectuer cette détermination. Il montre ici comment on y arrive par le calcul : l'équation tangentielle d'une telle surface étant mise sous la forme

$$(p+\delta)^2 = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'u + 2b'v + 2c'w,$$

où l'on suppose

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

et où

$$ux + vy + wz + p = 0$$

est l'équation générale d'un plan, l'équation finie des lignes de courbure peut s'écrire

$$\sum \frac{au^2 + 2a'u}{a' + \lambda} = \sum \frac{(a'v - b'u)^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)},$$

λ étant une constante arbitraire; rattachant ensuite ces résultats à ceux qu'a obtenus M. Laguerre (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 145), M. Darboux énonce le théorème suivant :

« La surface de quatrième classe corrélative de la surface à conique double et ayant le cercle de l'infini comme ligne double peut être considérée de quatre manières différentes comme une anticaustique par réfraction relative à des rayons parallèles tombant sur une surface du second degré. Les surfaces du second degré correspondant aux quatre modes de génération sont homofocales; elles passent par les quatre coniques doubles de la surface de quatrième classe, et, dans chaque classe de génération, les rayons lumineux sont normaux au plan de la conique double correspondante.

La surface de quatrième classe qui vient d'être définie peut être considérée de quatre manières différentes comme l'enveloppe des sphères ayant leur centre sur une surface du second degré et coupant un plan fixe sous un angle constant.

Baille. — Mesure de la force électromotrice des piles. (32).

Gouy. — Sur la vitesse de la lumière, réponse à M. Cornu. (34).

Crova. — Étude sur les spectromètres. (36).

Dunand. — Sur un procédé pour faire reproduire la parole aux condensateurs électriques et en particulier au condensateur chantant. (37).

N° 2; 10 janvier.

Cornu (A.). — Sur les conditions relatives à l'expression théorique de la vitesse de la lumière. (52).

Appell. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante. (61).

Complément à la Note du 13 décembre 1880; les conclusions de cette Note s'étendent, sous certaines conditions, aux cas où les coefficients de l'équation différentielle deviennent infinis pour les points critiques de la fonction algébrique.

Rouget (*C.*). — Sur un procédé d'observation astronomique à l'usage des voyageurs, les dispensant de la mesure des angles pour la détermination de la longitude. (69).

Laguerre. — Sur la transformation par directions réciproques. (71).

Une surface S étant donnée partage l'espace en deux régions, et l'on peut fixer arbitrairement celle de ces régions que l'on regarde comme extérieure à la surface; M. Laguerre désigne sous le nom de *semi-surface* une surface ainsi définie. Pour que deux surfaces soient tangentes en un point, il ne suffit pas qu'elles aient même plan tangent, il faut encore que les régions extérieures se correspondent. A un plan, à une sphère, correspondent deux demi-plans opposés, deux demi-sphères opposées; mais si l'on a affaire à une surface algébrique quelconque pour laquelle on a fixé arbitrairement la région extérieure, la semi-surface ainsi obtenue ne forme généralement un être géométrique que si on lui adjoint la semi-surface opposée; elle doit être considérée comme une semi-surface composée de deux feuillets superposés et opposés entre eux, qui formeraient les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère de rayon infiniment petit dont le centre décrit la surface. Une quadrique, par exemple, doit être regardée comme une semi-quadrique de quatrième classe. Ceci posé, la transformation par directions réciproques est certainement définie par les conditions suivantes :

Deux semi-plans réciproques se coupent sur un plan fixe dit *fondamental;* deux couples de semi-plans réciproques forment un système de quatre semi-plans tangents à un semi-cône de révolution. La transformation est déterminée quand on se donne le plan fondamental et deux semi-plans réciproques.

Les lignes de courbure d'une semi-surface se conservent dans cette transformation.

La transformée d'une semi-surface S est une anticaustique. Si, en effet, de chaque point M de S on abaisse une perpendiculaire MP sur le plan fondamental et qu'on prenne sur MP un point M' tel que $\frac{M'P}{MP}$ soit constant, le point M' décrit une surface S'; si, l'indice de réfraction étant convenablement choisi, les rayons perpendiculaires au plan fondamental se réfractent sur S', la réciproque de S est une des catacaustiques de S', et l'on obtiendra toutes ces catacaustiques en déplaçant le plan fondamental parallèlement à lui-même.

Ainsi, on saura déterminer les lignes de courbure des anticaustiques de S' si l'on sait les déterminer pour la semi-surface S; en particulier, on peut obtenir les lignes de courbure des anticaustiques des surfaces de second ordre.

M. Laguerre rapproche ces résultats de ceux que M. Darboux avait précédemment communiqués.

Croullebois. — Sur la grandeur et les variations des images de Purkinje. (73).

Arsonval (D'). — Thermo-régulateur pour les hautes températures. (76).

N° 3; 17 janvier.

Bigourdan. — Observations de la comète f 1880 (Pechüle), faites à l'Observatoire de Paris. (117).

Darboux (G.). — Sur le déplacement d'une figure invariable. (118).

Considérons un cylindre de révolution (c); il est clair qu'on peut le faire rouler intérieurement sur un cylindre de révolution (c') de rayon double, tout en le faisant glisser d'une quantité quelconque parallèlement aux génératrices rectilignes de (c'); si l'on assujettit un point de (c) à décrire une droite, qui rencontrera nécessairement l'axe du cylindre (c'), le mouvement du cylindre (c) sera complètement défini et tout point invariablement lié à ce cylindre décrira une conique.

Ce mouvement (en excluant le cas d'un déplacement parallèle à un plan fixe) est le seul dans lequel tous les points de la figure mobile puissent décrire des courbes planes.

Il n'existe pas dans l'espace de mouvement dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des surfaces du second degré, mais il existe un mouvement dans lequel ils décrivent tous des surfaces de Steiner. Dix points particuliers de la figure mobile décrivent des plans. Dans des cas particuliers, il peut arriver que les points d'une droite, ou même les points de deux droites décrivent des ellipsoïdes : dans ce dernier cas, il existe un tétraèdre ayant au plus deux arêtes réelles, tel que tout point, en dehors des faces, décrit une surface de Steiner; tout point sur une face en dehors des arêtes décrit une surface réglée du troisième ordre. Tout point sur une arête décrit une surface du second ordre ou un plan.

André (D.). — Intégration sous forme finie d'une nouvelle espèce d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. (121).

Soient Y une fonction de la seule variable x, soient Y_0, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, ... les valeurs pour $x = 0$ de cette fonction et de ses dérivées successives, n un entier quelconque non négatif, p un nombre non entier; soit enfin $f(n)$ un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Posant

$$F(n) = \frac{1}{p(p+1)\dots(p+n-1)}\,\frac{1}{f(n)},$$

les équations intégrées par l'auteur sont celles qui, par une suite de différentiations, conduisent, pour $x = 0$, à une équation de la forme

$$A_0 F(n) Y_n^{(n)} + A_1 F(n-1) Y_0^{(n-1)} + \dots + A_k F(n-k) Y_0^{(n-k)} = 0,$$

subsistant pour toutes les valeurs de n supérieures à un entier déterminé et les coefficients A et l'indice k étant indépendants de n.

L'intégrale se compose uniquement de fonctions algébriques rationnelles et d'expressions irrationnelles de la forme $(1 - ax)^p$.

Mathieu (*É.*). — Sur la théorie des plaques vibrantes. (123).

L'auteur confirme les résultats de M. Kirchhoff, qu'il avait autrefois critiqués.

Melon (*A.*). — Sur les combinaisons complètes : nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n. (125).

Thollon. — Minimum du pouvoir de résolution d'un prisme. (128).

Mercadier. — Sur la production de signaux intermittents à l'aide de la lumière électrique. (131).

N° 4; 24 janvier.

Tisserand (*F.*). — Sur le développement périodique d'une fonction quelconque des rayons vecteurs de deux planètes. (134).

L'auteur a donné précédemment (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCI, p. 897) le développement, suivant les cosinus des multiples de l'anomalie moyenne, d'une fonction quelconque du rayon vecteur r d'une planète : il donne maintenant l'expression explicite du développement de $f(r, r')$, r et r' étant les rayons vecteurs de deux planètes, quand on y remplace r et r' par leurs développements périodiques, tels qu'ils résultent du mouvement elliptique.

Resal. — Sur la théorie de la chaleur. (157).

Bigourdan. — Éléments et éphémérides de la comète f 1880 (Pechüle). (172).

Draper (*H.*). — Présentation d'une épreuve photographique de la nébuleuse d'Orion. (173).

Pepin. — Sur les diviseurs de certaines fonctions homogènes du troisième ordre à deux variables. (173).

Le P. Pepin donne des types de formes cubiques binaires pour lesquelles les diviseurs se distinguent des non-diviseurs par leurs formes linéaires : ces formes cubiques sont des fonctions linéaires des deux formes plus simples

$$X = x(x^2 - 9y^2), \quad Y = y(x^2 - y^2).$$

Casorati. — Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes.

Cette distinction a été faite pour la première fois par M. Hamburger (*Journal de Borchardt*, t. LXXVI), en appliquant un procédé dû à M. Jordan. M. Stickelberger vient de reprendre la même question d'une autre manière, en se fondant sur une formule due à M. Weierstrass (*Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1868), relative aux diviseurs du déterminant qui constitue le premier membre de l'équation fondamentale de M. Fuchs et des mineurs de ce déterminant; dans cette Communication et dans une Communication postérieure, M. Casorati montre comment, sans changer le procédé de M. Jordan, on peut arriver aux résultats simples et précis obtenus par M. Stickelberger.

Farkas. — Sur le développement des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce en séries entières récurrentes (181).

Lippmann. — Sur le choix de l'unité de force dans les mesures électriques absolues. (183).

N° 5; 31 janvier.

Gyldén (*H.*). — Sur un mode de représentation des fonctions. (213).

L'auteur montre comment on peut passer du développement

$$F(x) = \Sigma(a_r \cos rx + b_r \sin rx)$$

au développement

$$F(x) = \sum A_p \cos p \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} + B_p \sin p \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}.$$

Hennessy. — Sur la figure des planètes. (225).

Jordan (*C.*). — Sur la série de Fourier. (228).

La démonstration de Dirichlet repose sur les deux propositions

$$\begin{aligned} \lim_{p=0} \int_a^b F(x) \frac{\sin px}{x} &= 0 \qquad && (0 < a < b < \pi) \\ &= F(+0) \qquad && (a = 0, 0 < b < \pi). \end{aligned}$$

La première proposition subsiste pourvu que $F(x)$ soit intégrable de a à b.

La démonstration de la seconde suppose simplement qu'il existe, aux environs du point $x = 0$, un intervalle fini (de 0 à ε) dans lequel $F(x)$ soit constamment non croissante ou non décroissante.

Le théorème subsistera donc toutes les fois que $F(x)$ pourra être représenté de 0 à ε par $f(x) - \varphi(x)$, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux fonctions finies et non décroissantes.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ une série de valeurs de x comprise entre 0 et ε; $y_1, \ldots, y_n$ les valeurs correspondantes de $f(x)$; les points $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$ forment un polygone.

Considérons les différences

$$y_2 - y_1,\ y_3 - y_2,\ \ldots,\ y_n - y_{n-1},$$

et appelons *oscillation positive* du polygone la somme des termes positifs de cette série, *oscillation négative* la somme des termes négatifs, *oscillation totale* la somme des valeurs absolues des oscillations positive et négative. Deux cas peuvent se présenter :

1° Le polygone pourra être choisi de façon que ces oscillations dépassent toute limite;

2° De quelque façon que le polygone soit choisi, ses oscillations ne pourront surpasser certaines limites fixes P_ε et N_ε; dans ce cas, la fonction est à oscillation finie, et l'on verra aisément que l'on a

$$F(x) = F(o) + P_x - N_x;$$

or $F(o) + P_x$ et N_x étant des fonctions finies et non décroissantes de o à ε, la démonstration de Dirichlet s'appliquera à la fonction $F(x)$.

Laguerre. — Sur une extension de la règle des signes de Descartes. (230).

Soit $F(x)$ un polynôme entier ou une série indéfinie ordonnée suivant les puissances croissantes de x, $F(x)$ étant d'ailleurs assujetti à la condition que ses coefficients soient tous positifs : soient α, β, γ, ... des nombres positifs rangés par ordre décroissant de grandeur; le nombre des racines positives de l'équation

$$AF(\alpha x) + BF(\beta x) + CF(\gamma x) + \ldots = o$$

est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$A,\ B,\ C,\ \ldots$$

ou de la suite

$$A,\ A+B,\ A+B+C,\ \ldots.$$

Ribaucour. — Sur un système cyclique particulier. (234).

L'auteur montre comment des propositions anciennement énoncées par lui donnent immédiatement l'intégrale des lignes de courbure d'une surface anticaustique par réfraction d'une quadrique, les rayons incidents étant parallèles entre eux et conduisant au mode de transformation récemment indiqué par M. Laguerre.

Dillner (G.). — Sur la quadrature dont dépend la solution d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (235).

Casorati. — Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes. (238).

Paige (Le). — Sur l'invariant du dix-huitième ordre des formes binaires du cinquième degré. (241).

N° 6; 7 février.

Janssen (J.). — Sur les photographies des nébuleuses. (261).

Bouquet de la Grye. — Étude des actions du Soleil et de la Lune dans quelques phénomènes terrestres. (281).

Baillaud. — Observation des Perséides à l'Observatoire de Toulouse en 1880. (284).

Darboux (G.). — Sur les modes de transformation qui conservent les lignes de courbure. (286).

L'auteur montre comment un mode de transformation qui conserve les lignes de courbure indiqué par M. Ribaucour et par lui-même (*Sur une seule classe remarquable*, etc., p. 254-255) se ramène, conformément à un théorème général de M. S. Lie, à une suite de dilatations et d'inversions. On entend par dilatation le passage d'une surface à une surface parallèle.

Dillner (G.). — Sur les équations différentielles linéaires simultanées, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un même produit algébrique irrationnel. (289).

Dillner (G.). — Sur une propriété que possède le produit des k intégrales de k équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature, respectivement, de k fonctions rationnelles de la variable indépendante et d'une même irrationnalité algébrique. (290).

Matthiessen (L.). — Le problème des restes dans l'Ouvrage chinois *Swan-king*, de Sun-tsze, et dans l'Ouvrage *Ta-yen-lei-schu*, de Yih-hing. (291).

Gripon. — Sur un phénomène particulier de résonance. (294).

Croullebois. — Sur la double réfraction elliptique et les trois systèmes de franges. (297).

N° 7; 14 février.

Brioschi. — Théorèmes relatifs à l'équation de Lamé. (325).

L'auteur étudie les relations qui existent entre les éléments de deux solutions, de formes très différentes, données par M. Hermite, et indique un procédé simple pour la détermination de ces éléments.

Plantamour. — Sur les mouvements périodiques du sol. (329).

Colladon. — Sur le tremblement de terre qui a été observé en Suisse le 27 janvier 1881. (330).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (333).

M. Poincaré établit l'existence d'une classe très étendue de fonctions analytiques analogues aux fonctions elliptiques et permettant d'intégrer diverses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques : il leur donne le nom de fonctions *fuchsiennes* en l'honneur de M. Fuchs.

L'auteur appelle *cercle fondamental* le cercle de rayon égal à l'unité ayant l'origine pour centre, *groupe hyperbolique* le groupe des opérations qui consistent à changer z en $\frac{az+b}{cz+d}$ et qui n'altèrent pas le cercle fondamental, *groupe discontinu* tout groupe qui ne contient pas d'opération changeant z en une quantité infiniment voisine, *groupe fuchsien* tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique.

Une fonction *fuchsienne* est une fonction uniforme de z, qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien.

M. Poincaré a formé tous les groupes fuchsiens. Il appelle fonction *thétafuchsienne* toute fonction $\Theta(z)$ uniforme en z et telle que, pour une infinité de valeurs de a, b, c, d remplissant la condition

$$ad - bc = 1,$$

on ait

$$\Theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Theta(z)\,(cz+d)^{2m}.$$

Il existe une infinité de fonctions thétafuchsiennes.

Dans le cas où tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels de $\Theta(z)$, il existe en réalité deux fonctions qui correspondent l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du cercle, et telles que l'on ne puisse passer de l'une à l'autre par continuité.

Quet. — Sur les lois qui régissent les périodes et les coefficients d'intensité, dans l'un des principaux groupes des forces électromotrices élémentaires dues à l'induction solaire, et sur la possibilité de faire servir l'aiguille aimantée à mesurer la vitesse avec laquelle le Soleil tourne autour de son axe. (336).

N° 8; 21 février.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'astronome royal, M. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1880. (373).

Faye. — Sur la parallaxe du Soleil. (375).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (393).

Le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe fuchsien et à une même valeur du nombre entier m est une fonction fuchsienne $F(z)$; pour une infinité de valeurs de a, b, c, d, on a

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = F(z).$$

Entre deux fonctions fuchsiennes ayant même groupe et n'ayant d'autre point singulier essentiel que ceux qui sont une conséquence de leur définition, il y a une relation algébrique.

Toute fonction fuchsienne $F(z)$ permet d'intégrer une équation linéaire à coefficients algébriques de la manière suivante. Si l'on pose

$$x = F(z),\quad y_1 = \sqrt{\frac{dF}{dz}},\quad y_2 = z\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

y_1, y_2 satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction algébrique de x. M. Poincaré traite un exemple; il introduit ensuite la notion des fonctions zétafuchsiennes.

Picard (E.). — Sur une classe d'intégrales abéliennes et sur certaines équations différentielles. (398).

Étant donnée une relation algébrique de genre p,

$$f(x,y) = 0,$$

M. Picard considère une intégrale abélienne de première espèce correspondante

$$\int \frac{F(x,y)}{f'_y(x,y)}\,dy,$$

dont les périodes se réduisent à deux; il montre alors que l'équation aux différentielles totales

$$\frac{F(x_1,y_1)\,dx_1}{f'_{y_1}(x_1,y_1)} + \frac{F(x_2,y_2)\,dx_2}{f'_{y_2}(x_2,y_2)} + \ldots + \frac{F(x_p,y_p)}{f'_{y_p}(x_p,y_p)}\,dx_p = 0$$

a son intégrale générale algébrique.

Traitant ensuite plus particulièrement le cas où la relation est du premier genre, c'est-à-dire où l'on a

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x) = R(x),$$

il cherche comment doivent être choisis k, λ, μ pour que l'on puisse trouver un polynôme $f(x)$ du premier degré, de manière que l'équation

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{f(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = 0$$

ait ses intégrales algébriques, et résout complètement la question, tant dans cette Communication que dans une Communication postérieure (p. 306); là il met en évidence que, à un degré donné d'une relation algébrique devant fournir une intégrale de l'équation (1), correspondra nécessairement une relation algébrique entre k, λ, μ, relation qui constitue une espèce nouvelle d'équations modulaires.

Ardank-Abakanowicz. — Sur un intégrateur, instrument servant à l'intégration graphique (402).

Witz. — Du pouvoir refroidissant des gaz et des vapeurs. (405).

Terquem. — Sur les surfaces de révolution limitant les liquides dénués de pesanteur. (407).

Mercadier. — Sur la radiophonie. (409).

N° 9; 28 février.

Darboux (G.). — Sur une nouvelle définition de la surface des ondes. (446).

Cette surface est un cas particulier de la surface suivante.

On considère dans l'espace trois cercles quelconques (A), (B), (C) et un point quelconque O. On cherche le lieu (Σ) des points M jouissant de cette propriété : les sphères passant par les trois cercles fixes (A), (B), (C) et par un point quelconque M du lieu vont se couper en un second point P tel que l'angle MPO soit droit.

Ce lieu est une surface que l'on peut construire par points en employant seulement la règle et le compas.

Appelons *centre radical* de deux cercles le centre radical de toutes les sphères passant par les deux cercles, il existera un cercle (K) rencontrant les trois cercles (A), (B), (C) chacun en deux points, et dont le plan contient les trois centres radicaux de ces cercles pris deux à deux.

La surface (Σ) contient le cercle (K); elle contient aussi trois cercles situés sur les sphères passant par le cercle K et les cercles (A), (B), (C).

La surface (Σ), en général du cinquième ordre, se réduit au quatrième : 1° si les plans des cercles (A), (B), (C) se coupent suivant une droite; 2° si le point o est le point d'intersection des trois plans (A), (B), (C); dans ce cas, elle contient seize coniques.

M. Darboux communique en outre la proposition suivante : Si trois points d'une droite invariable décrivent trois plans rectangulaires, elle demeure constamment normale à une surface fixe dont les lignes de courbure sont algébriques. Cette surface est une variété des surfaces de quatrième classe, considérées par l'auteur dans une Communication précédente.

Franklin (J.). — Sur le développement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$ (448).

Mercadier. — Sur la radiophonie. (450).

Hurion. — Application des franges de Talbot à la détermination des indices de réfraction des liquides. (452).

N° 10; 7 mars.

Puiseux (V.). — Sur les observations de contact faites pendant le passage de Vénus du 8 décembre 1874. (481).

Janssen. — Note sur la photographie de la lumière cendrée de la Lune. (496).

Tacchini. — Observations des taches, des facules et des protubérances solaires, faites à l'Observatoire du Collège Romain pendant le dernier trimestre 1880. (502).

Trépied. — Observations de la Lune et observations des satellites de Jupiter faites à l'Observatoire d'Alger pendant les mois d'octobre, novembre et décembre 1880. (504).

Mouchez. — Remarques à propos des observations communiquées par M. Trépied sur la transformation de l'Observatoire d'Alger en un observatoire astronomique. (506).

Picard (E.). — Sur l'intégration algébrique d'une équation analogue à l'équation d'Euler. (506).

Schering. — La formule d'interpolation de M. Hermite, exprimée algébriquement. (510).

Il s'agit de ce problème :

Trouver une formule $F(x)$ uniforme, qui soit développable en séries de puissances de $x - a_\sigma$ pour $\sigma = 1, 2, 3, \ldots, t$ avec des exposants entiers croissants, et qui contienne dans chacune de ces séries les premiers termes donnés, savoir les termes

$$\sum_{\mu=-m_\sigma}^{\mu=-n_\sigma} A_{\sigma,\mu}(x-a_\sigma)^\mu \quad \text{pour} \quad \sigma = 1, 2, 3, \ldots, t,$$

où les $A_{\sigma,\mu}$ soient des valeurs données arbitrairement, où les $a_1, a_2, \ldots, a_t$ soient des valeurs données différentes entre elles, et où les m_σ, n_σ soient des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, soumis seulement à la condition que le nombre $1 + n_\sigma + m_\sigma$ dans chacune des expressions précédentes ne soit pas moindre que l'unité.

Boussinesq. — Sur une raison générale propre à justifier synthétiquement l'emploi des divers développements de fonctions arbitraires usités en Physique mathématique. (513).

Abdank-Abakanowicz. — Sur un intégrateur. (515).

Croullebois. — Sur la double réfraction circulaire et la production normale des trois systèmes de franges des rayons circulaires. (519).

Fievez. — Sur l'élargissement des raies de l'hydrogène. (521).

Trève. — Sur quelques phénomènes d'optique et de vision. (522).

N° 11; 14 mars.

SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE.

Rapport sur le grand prix des Sciences mathématiques (année 1880). Commissaires : MM. Bertrand, Bonnet, Puiseux, Bouquet, Hermite rapporteur. (551).

L'Académie avait proposé pour sujet d'un grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880 la question suivante :

Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.

Six Mémoires ont été envoyés au Concours. Quatre d'entre eux, inscrits sous les n^{os} 1, 2, 3, 5, témoignent chez leurs auteurs d'une science étendue et d'un esprit ingénieux. Nous allons en rendre compte succinctement.

Dans les travaux dont la théorie générale des équations différentielles linéaires a été récemment l'objet, on a eu principalement en vue d'obtenir l'intégrale dans les cas où elle peut s'exprimer par des fonctions uniformes de la variable. Les belles découvertes de M. Fuchs, qui ont joué le principal rôle dans ces recherches, servent également de base pour l'étude plus profonde et plus difficile entreprise par l'auteur du Mémoire n° 1, portant pour épigraphe : *C'est ici un livre de bonne foi, lecteur.* Il part de ce fait que la transformée d'une équation différentielle linéaire obtenue en substituant à la variable indépendante une fonction quelconque d'une nouvelle variable est une équation linéaire de même ordre, et qu'il en est de même si l'on multiplie l'inconnue par une seconde fonction arbitraire de cette nouvelle variable. Cela étant, l'auteur se propose de déterminer ces deux fonctions, de manière que l'équation transformée soit à coefficients constants, ou bien soit intégrable au moyen de fonctions uniformes, simplement rationnelles ou doublement périodiques. Ces questions sont, comme on voit, aussi importantes que difficiles; la solution complète et générale qui est exposée dans le Mémoire montre un talent mathématique de l'ordre le plus élevé. Rien n'est plus intéressant que de voir s'introduire dans cette recherche de Calcul intégral les notions algébriques d'invariants qui ont pris naissance dans la théorie des formes, et ces nouvelles combinaisons faire apparaître les éléments cachés dont dépend, sous ses diverses formes analytiques, l'intégration d'une équation donnée. C'est à M. Laguerre qu'est due l'idée ingénieuse et profonde des invariants et covariants des équations différentielles linéaires; il en a tiré pour les équations du troisième et du quatrième ordre plusieurs beaux théorèmes, et M. Brioschi s'est aussi occupé du même sujet; mais l'auteur du Mémoire que nous analysons en a encore mieux fait ressortir toute l'importance. Il y joint une considération qui joue également dans ses recherches un rôle essentiel : c'est celle du genre d'une équation algébrique entre deux variables, introduite en Analyse par Riemann, et qui est si souvent employée dans les travaux de notre époque. Des applications exposées avec tous les détails nécessaires offrent un grand nombre de résultats entièrement nouveaux et du plus haut intérêt. Nous nous bornons à citer comme particulièrement remarquables des équations du troisième et du quatrième ordre contenant un paramètre arbitraire, puis d'autres d'ordre impair se rattachant à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques, dont la solution, qui n'est pas une fonction uniforme, est obtenue par ces transcendantes. Nous jugeons que ce Mémoire a ajouté à la théorie des équations différentielles linéaires des méthodes générales et des résultats d'une haute importance et qu'il est digne du grand prix des Sciences mathématiques.

....

Dans le Mémoire n° 5, qui porte l'épigraphe suivante : *Non inultus premor,* l'auteur traite successivement deux questions entièrement différentes, dont il fait l'étude approfondie avec un talent dont la Commission a été extrêmement frappée. La seconde question, qui reçoit les développements les plus étendus, concerne de belles et importantes recherches de M. Fuchs, dont nous indiquerons en quelques mots l'objet. M. Fuchs s'est proposé de déterminer dans quelles conditions on définit une fonction uniforme en égalant à une indéterminée le quotient des intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Les résultats si remarquables du savant géomètre présentaient dans certains cas des lacunes que l'auteur a reconnues et signalées en complétant ainsi une théorie analytique extrêmement intéressante. Cette théorie lui a suggéré l'origine de transcendantes comprenant en particulier les fonctions elliptiques et qui permettent d'obtenir, dans des cas très généraux, la solution des équations linéaires du second ordre. C'est là une voie féconde que l'auteur n'a point parcourue en entier, mais qui témoigne d'un esprit inventif et profond. La Commission ne peut que l'engager à poursuivre ses recherches, en signalant à l'Académie le beau talent dont il a fait preuve.

....

M. Halphen est l'auteur du Mémoire n° 1, couronné par l'Académie ; M. Poincaré est l'auteur du Mémoire n° 5, auquel l'Académie accorde une mention très honorable, ainsi qu'au Mémoire n° 3.

Le prix Poncelet est décerné à M. Léauté, et le prix Lalande à M. Stone.

Le Concours, sur cette question : *Étude de l'élasticité d'un ou de plusieurs corps cristallisés au double point de vue expérimental et théorique,* est prorogé jusqu'à l'année 1882.

N° 12; 21 mars.

Tisserand. — Sur la détermination des masses de Mercure, de Vénus, de la Terre et de la parallaxe solaire. (653).

Tisserand et *Bigourdan*. — Observations de la comète Faye, faites à l'Observatoire de Paris. (660).

Darboux. — Sur la surface à seize points singuliers et les fonctions Θ à deux variables. (685).

M. Cayley a signalé les rapports que présente la théorie de la surface de M. Kummer avec celle des fonctions à quatre périodes; M. Borchardt et M. Weber ont complété les résultats de M. Cayley. Antérieurement, M. Klein avait montré que les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer en fonction rationnelle et homogène de six radicaux tels que $\sqrt{(a_k-\rho)(a_k-\rho_1)}$, ou de six fonctions Θ doubles à caractéristique impaire. M. Darboux indique comment on peut trouver effectivement ces expressions des coordonnées et relie à ce mode de représentation celui qui avait été indiqué par M. Cayley : il donne ensuite divers résultats géométriques.

Il existe trente systèmes de quadriques admettant pour enveloppe la surface de Kummer. Les surfaces de chaque système passent par huit points singuliers et sont tangentes à huit plans singuliers. A chacun d'eux correspondent quatre équations irrationnelles de la surface. A chaque système on peut associer un autre système composé de surfaces ne passant pas par les points singuliers communs aux surfaces du premier système.

Deux surfaces appartenant à des systèmes associés se coupent suivant quatre droites. Les surfaces de deux systèmes associés tangentes en un même point M de la surface lui sont inscrites suivant des courbes dont les tangentes en M sont des tangentes conjuguées.

Appliquant enfin cette proposition à la surface des ondes, M. Darboux indique une construction du plan tangent au moyen de la règle seule.

Le Paige (*C.*). — Sur le déterminant fonctionnel d'un nombre quelconque de formes binaires. (688).

Le déterminant fonctionnel de $2k+1$ formes dont le degré est supérieur à $2k$ est une fonction linéaire de ces formes, fonction dont les coefficients sont des sommes de produits de covariants linéo-linéaires de ces mêmes formes prises deux à deux.

Le déterminant fonctionnel de $2k$ formes binaires, dont le degré est supérieur à $2k-1$, est une fonction quadratique de ces formes, fonction dont les coefficients sont des sommes de produits de covariants linéo-linéaires des formes prises deux à deux et de covariants de second ordre des formes prises isolément.

Picard (*E.*). — Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels. (690).

Soit $G(z)$ une fonction uniforme et continue dans tout le plan, sauf sur un cercle de rayon R, où elle peut admettre une infinité de rayons essentiels.

Soient A_1, A_2, A_3, ... une suite de quantités telles que, en posant

$$A_n = \rho_n e^{i\alpha_n},$$

on ait

$$|\rho_n - R| \geqq |\rho_{n+1} - R|,$$
$$\lim_{n=\infty} \rho_n = R.$$

On peut former une fonction $G(z)$, de la nature indiquée, ayant les quantités $A_1, A_2, A_3, \ldots$ pour zéros.

Posant

$$B_n = R e^{i\alpha_n},$$

on pourra prendre dans le cas le plus général

$$G(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{z - A_n}{z - B_n} e^{F_n(z)},$$

où

$$F_n(z) = \frac{A_n - B_n}{z - B_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{A_n - B_n}{z - B_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{A_n - B_n}{z - B_n}\right)^{n-1}.$$

A chaque racine A_n on fait correspondre un point B_n du cercle, le mode de correspondance pourrait être autre que celui qui a été choisi.

Picard et *Appell.* — Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles. (692).

Soient les équations

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

de la forme considérée par M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XC, p. 128, 293). Les coefficients a_i et b_i sont supposés des fonctions uniformes des deux variables x et y à quatre faces de périodes conjuguées α_i et β_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Supposant qu'on ait constaté que l'intégrale générale z de ces équations soit une fonction uniforme de x et de y n'admettant pas de point singulier essentiel à distance finie, les auteurs montrent qu'on peut obtenir une fonction intégrale $\Phi(x, y)$ telle que l'on ait

$$\Phi(x + \alpha_i, y + \beta_i) = \mu_i \Phi(x, y) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Supposant ensuite que les quantités α_i, β_i soient les périodes normales d'intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à une courbe algébrique du genre 2, ils montrent que l'intégrale peut s'exprimer au moyen des fonctions Θ.

Si l'on a $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, l'expression de l'intégrale $\Phi(x, y)$ s'obtiendra au moyen de fonctions Θ d'une seule variable.

Lecornu (*L.*). — Sur les polygones générateurs d'une relation entre plusieurs variables imaginaires. (693).

Soit $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ une telle relation : il s'agit du polygone dont les sommets ont pour affixes des n variables ; l'auteur étudie spécialement les déplacements d'un tel polygone sans déformation et les déplacements avec déformation qui le laissent semblable à lui-même.

André (*D.*). — Solution d'un problème général sur les séries. (697).

Étant donnée une série convergente

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots,$$

on multiplie tous les termes par les termes de même rang d'une série récurrente proprement dite

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots;$$

on suppose que la série obtenue

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 x + u_2 v_2 x^2 + \ldots$$

soit convergente, et l'on demande d'exprimer la somme de cette dernière série en fonction de la somme de la série primitive.

Poincaré (*H.*). — Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques. (698).

M. Jordan a donné une méthode générale pour déterminer les groupes de substitutions linéaires qui ne se composent que d'un nombre fini de substitutions, mais, sans insister sur la formation des équations différentielles linéaires (à intégrales algébriques) qui leur correspondent; c'est ce point que traite M. Poincaré dans le cas du troisième ordre.

A chacun des groupes de M. Jordan correspondent une infinité d'équations linéaires du troisième ordre. Dans chacune, les coefficients sont rationnels par rapport à la variable indépendante x et à un paramètre arbitraire y. Si l'on considère les trois intégrales z'_1, z'_2, z'_3 comme fonction de x et de y, ce seront des fonctions algébriques de ces variables, et elles satisferont non seulement à l'équation proposée, mais à une infinité d'équations aux dérivées partielles à coefficients rationnels.

Langley. — Sur la distribution de l'énergie dans le spectre solaire normal. (701).

Gouy. — Sur un appareil synthétique reproduisant le phénomène de la double réfraction circulaire. (703).

Mercadier. — Sur la radiophonie produite à l'aide du sélénium. (705).

Crova. — Expériences faites dans les usines du Creusot pour la mesure optique des hautes températures. (707).

Le Roux. — Sur la force électromotrice de l'arc voltaïque. (709).

Laurent. — Sur les miroirs magiques en verre argenté. (712).

Neyreneuf. — Sur l'écoulement des gaz. (713).

N° 13; 28 mars.

Poincaré (*H.*). — Sur la représentation des nombres par les formes. (777).

L'auteur montre comment le problème de la représentation d'un nombre entier quelconque, soit pour une forme binaire d'ordre quelconque, soit pour une forme décomposable en facteurs linéaires, peut être résolu: 1° en résolvant une congruence; 2° en recherchant par la méthode de M. Hermite si deux formes décomposables en facteurs linéaires sont équivalentes.

Halphen. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires. (779).

L'auteur montre comment on peut intégrer les équations dont les premiers membres sont de la forme suivante :

$$BQ^h P^{n-h} \frac{d^n (P^n Q^{n-h} y)}{dx^n} + CQ^k P^{p-k} \frac{d^p (P^p Q^{n-k} y)}{dx^p} + \ldots,$$

où $P = ax + b$, $Q = a'x + b'$, et où $B, e, \ldots$; $h, k \ldots$, sont constants.

Charve (*L.*). — De la réduction des formes quadratiques quaternaires. (782).

L'auteur, pour une telle forme supposée positive, propose des conditions de réduction telles que la définition de la forme réduite conduise à *une* et à *une seule* des formes équivalentes à la proposée.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

Tome LXXXVIII; 1880.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur l'entrelacement d'une fonction par rapport à une autre. (1-3).

Sylvester (*J.-J.*). — Preuve instantanée, d'après la méthode de Fourier, de la réalité des racines de l'équation séculaire. (4-5).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur un déterminant symétrique qui comprend comme cas particulier la première partie de l'équation séculaire. (6-9).

Hermite (*Ch.*). — Sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchebychef. Extrait d'une Lettre à M. Borchardt. (10-15).

M. Tchebychef a découvert la proposition qu'il existe une infinité de systèmes de nombres entiers x et y tels que la fonction linéaire $x - ay - b$, où a et b sont deux constantes quelconques, soit plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2y}$. De plus, appliquant cette même conception à l'Algèbre, il considère l'expression $X - UY - V$, où U et V sont deux fonctions quelconques d'une variable x, et il détermine des polynômes entiers par rapport à cette variable X et Y, tels qu'en ordonnant suivant les puissances décroissantes le degré soit le nombre négatif le plus grand possible en valeur absolue. C'est sur cet objet que roulent les remarques de M. Hermite. Comme conséquence de sa manière d'approfondir la question, la limitation précédemment obtenue

$$x - ay - b < \frac{1}{2y}$$

se trouve remplacée par celle-ci,

$$x - ay - b < \sqrt{\frac{2}{27}}\,\frac{1}{y},$$

où le coefficient numérique $\sqrt{\frac{2}{27}}$ est sensiblement plus petit que $\frac{1}{2}$.

Netto (E.). — Démonstration de l'existence de racines d'équations algébriques. (16-21).

La démonstration repose sur ce théorème, généralisation d'un théorème de Cauchy : « Soit p^r la puissance la plus élevée du nombre premier p qui divise $n!$; cela posé, on peut établir une suite de groupes de n éléments, $1, G_1, G_2, \ldots, G_\lambda, G_{\lambda+1}, \ldots, G_r$, qui sont respectivement des ordres $1, p, p^2, \ldots, p^\lambda, p^{\lambda+1}, \ldots, p^r$, et tels que chaque groupe $G_\lambda (\lambda < r)$ soit contenu dans celui qui le suit et permutable avec ses substitutions.

Röthig (O.). — Sur les surfaces définies par le théorème de Malus. (22-34).

Suite du Mémoire, t. LXXXIV, p. 231-237 (*Bulletin*, III_2, 112).

Laguerre. — Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme. (35-48).

Le Mémoire se rattache au travail de Jacobi sur le développement suivant les puissances croissantes d'un polynôme entier (t. 53, p. 103, du *Journal*). Après des considérations préliminaires (I), l'auteur traite (II) du développement de e^{zx} suivant les puissances d'un polynôme $F(z)$ et ramène la solution au calcul de certaines fonctions qui se déterminent par voie récurrente et qui satisfont à une équation différentielle, qui s'obtient facilement. L'intégration de cette équation différentielle linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre fait l'objet du § III. Après cela, M. Laguerre développe (IV) e^{zx} suivant les puissances de $z(z-1)$, et (V) $f(t+xz)$ suivant les puissances de la même grandeur, enfin (VI) $\log(1+xz)$ de même.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur les déterminants composés. (49-67).

Au lieu d'entrer dans le détail de ce Mémoire, nous citerons quelques mots de M. Borchardt du tome 89 du *Journal* (p. 82).

« Dans une correspondance qui vient d'avoir lieu entre M. Sylvester et moi, M. Sylvester m'a autorisé à retirer en son nom le théorème sur les déterminants composés qu'il a énoncé, p. 56 et p. 58 du Vol. 88 de ce *Journal*.... Lorsque l'éminent géomètre qui a enrichi de si belles découvertes la théorie des déterminants et l'algèbre des fonctions entières en général, et dont les contributions forment un ornement si précieux de ce *Journal*, reviendra sur sa théorie des déterminants composés et qu'il voudra bien destiner pour mon *Journal* la rectification dont sa formule générale est susceptible, il nous fera connaître, on peut en être sûr, un progrès nouveau que cette branche de l'Algèbre devra à son initiative. »

Hazzidakis (*J.-N.*). — Sur quelques propriétés des surfaces à mesure constante de courbure. (68-73).

1° Les quadrilatères formés par les lignes asymptotiques ont des côtés opposés d'égale longueur, et leur aire est proportionnelle à l'excès de la somme des quatre angles sur 360°.

2° L'intégration de l'équation différentielle partielle des surfaces en question se ramène à l'intégration de l'équation différentielle $\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \sin\lambda$, où $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont les lignes asymptotiques et λ leur angle.

3° Qu'on exprime les coordonnées x, y, z d'une telle surface par les variables géodésiques u, v, et qu'on forme les déterminants de Gauss désignés par D, D′, D″; les équations

$$\begin{aligned} dx' &= (1 + u^2 + v^2)^2\,(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'dv),\\ dy' &= (1 + u^2 + v^2)^2\,(\mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv),\\ dz' &= (1 + u^2 + v^2)^2\,[(\mathrm{D}u + \mathrm{D}'v)\,du + (\mathrm{D}'u + \mathrm{D}''v)\,dv] \end{aligned}$$

définissent encore une surface à mesure constante de courbure.

Cayley (*A.*). — Sur l'addition des fonctions ϑ doubles. (74-81).

Weber (*H.*). — Observations relatives au Mémoire *Ueber die abelschen Functionen vom Geschlecht* 3. (Extrait d'une Lettre à M. Borchardt.) (82-84).

Stern (*M.*). — Sur la théorie des nombres de Bernoulli. (85-95).

Soit

$$\operatorname{tang} x = \mathrm{T}_1 x + \frac{\mathrm{T}_3}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

On sait qu'on a

$$\mathrm{T}_{2\nu-1} = 2^{2\nu-1}(2^{2\nu}-1)\,\frac{\mathrm{B}_\nu}{\nu},$$

où B_ν est le $\nu^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli. M. Stern montre que, à l'exception de $\mathrm{T}_1 = 1$, les coefficients tangentiels T se terminent en 2 ou en 6, à mesure qu'ils sont contenus dans la forme T_{4m+3} ou T_{4m+1}, et que cette proposition est le cas le plus simple d'un théorème plus général.

Frobenius (*G.*). — Théorie des formes linéaires à coefficients entiers (suite du Mémoire, t. 86 du *Journal, Bulletin*, IV_4). (96-116).

« Après avoir traité la théorie de l'équivalence des formes bilinéaires dans la première Partie de ce travail, je passe à la réponse à cette question : « Quelles » conditions sont nécessaires et suffisantes pour qu'une forme soit contenue sous » une autre? » Pour point de départ, je prends la théorie d'une forme contenue relativement dans une autre par rapport à un module, théorie que j'applique aux congruences linéaires et à laquelle je ramène la théorie d'une forme qui est contenue sous une autre d'une manière absolue.

» Désignons par k un nombre entier positif, et supposons que la forme bilinéaire

$$A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

des $m+n$ variables $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ se change, par les substitutions linéaires

$$(1)\qquad x_\alpha = \sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma,\quad y_\beta = \sum_\delta q_{\beta\delta} y_\delta \quad (\text{mod.}\, k),$$

en $B = \Sigma b_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta$. La forme B sera dite *contenue dans* A (mod. k). Le nombre des nouvelles variables peut être égal, supérieur ou inférieur au nombre des variables primitives. Si B est contenue dans A (mod. k) et C sous B, C est aussi contenue dans A. Si B est contenue dans A (mod. k) et si h est un diviseur de k, B sera contenue dans A (mod. h). Deux formes qui se contiennent l'une l'autre sont appelées *équivalentes* (mod. k). Deux formes équivalentes à une troisième le sont aussi l'une à l'autre. L'ensemble des formes qui sont équivalentes à une forme individuelle se nomme une *classe* de formes. Si B est contenue dans A, toute forme équivalente à B est aussi contenue dans toute forme équivalente à A, ou bien la classe de formes représentée par B est contenue dans celle représentée par A.

» Si A est équivalente à B, et que A se change en B par les substitutions (1) et B en A par les substitutions

$$(2)\qquad x'_\gamma = \sum_\alpha r_{\alpha\gamma} x_\alpha,\quad y'_\delta = \sum_\beta s_{\delta\beta} y_\beta \quad (\text{mod.}\, k),$$

cela étant, les congruences (2) peuvent ne pas être les solutions des congruences (2). Je n'ai nommé (§ 11) équivalentes deux formes A et B que quand le nombre des variables x'_γ (y'_δ) est lui aussi m (n), c'est-à-dire quand les deux formes sont considérées comme dépendantes du même nombre de variables, de plus que les déterminants de $n^{\text{ième}}$ et $m^{\text{ième}}$ degré $|p_{\gamma\alpha}|$ et $|q_{\beta\delta}|$ sont premiers avec k, et que les congruences (2) sont les solutions des congruences (1). Je vais montrer que cette définition restreinte coïncide complètement avec la définition plus étendue que je viens de donner. »

§ 14. La réduction des formes bilinéaires. — § 15. Le rang d'une forme bilinéaire par rapport à un module. — § 16. Le nombre des restes d'un système de formes linéaires par rapport à un module. — § 17. Une forme contenue dans une autre et équivalente à une autre. — § 18. Systèmes adjoints de formes linéaires par rapport à un module. — § 19. Les relations entre les invariants (mod. k) et les diviseurs élémentaires. — § 20. Transformation par des substitutions unimodulaires. — § 21. Une forme contenue (d'une manière absolue) dans une autre.

Stahl (*Hermann*). — Le théorème d'addition des fonctions ϑ à p arguments. (117-130).

D'après un théorème de Riemann, toutes les caractéristiques des ϑ se prêtent à être représentées très simplement et diversement par $2p$ d'entre elles, et c'est aussi par là qu'on parvient à en distinguer le caractère pair ou impair. Après la formation des caractéristiques (§ 1), M. Stahl établit (§ 2), à l'aide de ce théorème, deux systèmes correspondants, chacun de 2^p caractéristiques, désignés par P et Q, et appelés *systèmes de huitaines* (*Achtersysteme*) parce qu'ils se rangent par 2^{p-3} lignes, chacune de huit membres. Les relations simples qui existent entre ces systèmes sont développées jusqu'au point où elles sont nécessaires pour la recherche. Ces systèmes servent (§ 3) à démontrer le théorème général d'addition des fonctions ϑ : l'un s'applique à représenter le théorème, les coefficients restant indéterminés, l'autre à déterminer les coefficients. Le quatrième paragraphe donne des relations ultérieures et établit, surtout à la fin, des relations entre des fonctions ϑ paires et des fonctions ϑ dérivées impaires pour les valeurs nulles des arguments, relations qui font ressortir la connexion entre les modules des ϑ et les modules des classes des fonctions abéliennes du genre p.

Jaerisch (*P.*). — Sur les vibrations élastiques d'une sphère isotrope. (131-145).

Lamé, Clebsch et Henneberg se sont occupés de ce problème. Les deux premiers se sont bornés à traiter des cas spéciaux. Henneberg a cherché la solution générale, mais son raisonnement exige qu'une fonction s'évanouisse avec toutes ses dérivées pour une valeur constante de la variable : il en aurait dû conclure l'impossibilité des vibrations en question.

Les recherches de M. Jaerisch ont conduit à ces résultats : une sollicitation de la sphère dans la direction du rayon ne produit que des vibrations purement longitudinales; une sollicitation dans la direction de la tangente n'excite que des vibrations purement transversales. Celles-là se font le long du rayon, celles-ci sont normales au rayon. Mais, si les déplacements initiaux dépendent de toutes les trois composantes sphériques, il se forme en même temps des vibrations longitudinales et des vibrations transversales qui ont la même durée d'oscillation, et, comme chacune de ces trois sortes de vibrations possède un autre nombre d'oscillations, elles constituent trois états bien distincts de vibrations.

Les vibrations de la troisième espèce, composées de vibrations longitudinales et transversales existantes, ont été observées par Savart dans des tiges finies cylindriques, qui, quoique sollicitées longitudinalement, firent voir en même temps des vibrations longitudinales et transversales.

Frobenius et *Stickelberger*. — Sur l'addition et la multiplication des fonctions elliptiques. (146-184).

La racine carrée d'une fonction entière du quatrième ordre a été développée par Jacobi en fraction continue à l'aide de la multiplication des fonctions elliptiques. Les formules communiquées par ce géomètre (t. VII, p. 41) sans démonstration ont été rattachées par Borchardt au théorème d'Abel et étendues au développement en fraction continue de la racine carrée d'une fonction entière quelconque. D'autre part, Jacobi a établi des formules générales qui peuvent servir à transformer une série de puissances en fraction continue. Donc, pour obtenir les formules pour la multiplication des fonctions elliptiques, il ne fallait que combiner ces deux expressions algébriques et transcendantes pour les éléments du développement en fraction continue de la racine carrée d'une fonction de quatrième degré. C'est ainsi que les auteurs ont trouvé les formules de multiplication telles que les a données M. Brioschi, de même que celles qu'a développées M. Kiepert.

La recherche du cas où la fraction continue est périodique fait voir la relation remarquable qu'il y a entre ses réduites et la transformation inverse des fonctions elliptiques. Soit $\wp(u) = \wp(u; \omega, \omega')$ la fonction elliptique fondamentale de M. Weierstrass, aux périodes ω, ω'. Cela étant, elle peut être mise sous la forme d'une expression rationnelle de $\wp(u; \omega, n\omega')$, et, réciproquement, $\wp(u; \omega, n\omega')$ peut être exprimée à l'aide de racines comme fonction algébrique de $\wp(u)$. En différentiant une équation de la forme

$$n\frac{\sigma'}{\sigma}(u; \omega, n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}(u; \omega, \omega') + cu + R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1},$$

où c désigne une constante et R_ν^n est une fonction entière de $\wp(u)$ et de $\wp'(u)$, M. Kiepert est parvenu à l'expression de $\wp(u; \omega, n\omega'$ par $\wp(u)$. Or ces $n^{\text{ièmes}}$ racines sont toutes exprimables par une quelconque d'entre elles, soit $R_{n-1} = R$. Posons donc

$$R_\nu R^\nu = V_\nu = T_\nu - \frac{1}{2}\wp'(u)U_\nu, \quad R_{n-1}^n = V_{n-1};$$

cela étant, T_ν et U_ν sont des fonctions entières de $\wp(u)$, et $\frac{T_\nu}{U_\nu}$ est la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue qu'on obtient en transformant en fraction continue la série pour $\wp'(u)$ ordonnée suivant les puissances croissantes de $\wp(u) - \wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$.

Une méthode semblable à celle que nous venons d'esquisser pour les formules de multiplication peut aussi servir à développer les formules d'addition. Au lieu de la fraction continue pour $y = \frac{1}{2}\wp'(u)$, c'est-à-dire au lieu des fonctions rationnelles dont les développements se confondent le plus étroitement possible avec les développements de y, il faut considérer des fonctions rationnelles qui coïncident avec y pour autant de valeurs données et différentes qu'il est possible.

§ 1. Transformation d'une série de puissances (*Potenzreihe*, série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable) en fraction continue. — § 2. Propositions auxiliaires empruntées à la théorie des fonctions elliptiques. — § 3. La multiplication des fonctions elliptiques. — § 4. Sur les réduites de la fraction continue pour la fonction $\wp'(u)$. — § 5. Sur le cas où la fraction continue devient périodique. — § 6. La transformation inverse des fonctions elliptiques. — § 7. Transformation du développement en fraction continue par l'introduction de nouvelles variables. — § 8. Sur l'interpolation au moyen de fonctions rationnelles. — § 9. Les théorèmes généraux d'addition des fonctions elliptiques. — § 10. D'autres formes du théorème d'addition.

Biehler. — Sur les fonctions doublement périodiques considérées comme des limites de fonctions algébriques. (185-204).

« C'est Cauchy qui, le premier, a rattaché aux fonctions algébriques les transcendantes elliptiques en donnant (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1843), à l'aide d'un procédé élémentaire, l'équation si importante qui lie l'expression de $\Theta(z)$ sous forme de produit au développement de cette fonction en série de cosinus.

» Je commencerai par établir cette relation en faisant usage d'une méthode plus simple que celle de Cauchy; je donnerai ensuite sous leurs diverses formes les développements des trois fonctions elliptiques; enfin j'y ajouterai les développements de quelques fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Les exemples qui seront traités suffiront pour montrer que les mêmes méthodes s'appliquent également aux cas où les fonctions proposées renfermeraient un plus grand nombre de Θ, soit au numérateur, soit au dénominateur. »

Développement de :

I. La fonction $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$.

II. $\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$.

III. $\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$.

IV. $\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$.

V. $\dfrac{1}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$.

VI. $\dfrac{1}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$.

VII. $\dfrac{1}{\Theta^2\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$.

VIII. $\dfrac{\Theta_1^2\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$.

IX. Démonstrations rigoureuses de toutes ces formules.

Kiepert (*L.*). — Sur la théorie de transformation des fonctions elliptiques. Second Mémoire. (205-212).

Cette Note fait suite au Mémoire du Tome 77, de M. Kiepert. Une quantité f y avait été définie comme racine d'une équation de transformation facile à établir. Il s'agit maintenant de représenter toutes les autres quantités qui se présentent dans la transformation comme fonctions rationnelles de f.

Une équation différentielle, donnée sans démonstration par Jacobi (t. 1), fait voir que toutes les quantités nécessaires à la transformation sont des fonctions linéaires de $\Gamma = \Delta^{\frac{1}{8}(n-1)} f^3$ et des $\frac{1}{2}(n-1)$ premières dérivées de Γ prises suivant l'invariant absolu et que Γ elle-même satisfait à une équation différentielle homogène linéaire d'ordre $\frac{1}{2}(n+1)$.

§ 1. Déduction de l'équation aux différentielles partielles. — § 2. Détermination des quantités $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu, \overline{g_2}, \overline{g_3}$. — § 3. Exemple ($n = 5$).

Sturm (*Rudolf*). — Sur la théorie des surfaces de troisième ordre. (213-240).

M. Sturm a publié en 1867 un Ouvrage sur les surfaces de troisième ordre; le Mémoire dont nous allons rendre compte en peu de mots peut être envisagé comme complément de cette publication, couronnée du prix de Steiner il y a quinze ans.

Les deux premières Sections donnent quelques démonstrations sous des formes simplifiées; la troisième s'occupe du système des sections coniques qui sont contenues dans les plans passant par une droite de la surface et en fait voir de nouvelles propriétés. Dans la quatrième Section, la théorie purement géométrique que M. Milinowski a donnée des polaires des courbes planes de troisième ordre, et dont on a fait peu de cas jusqu'alors, est appliquée par M. Sturm aux polaires des surfaces cubiques. En mettant à profit les idées de M. Milinowski pour les surfaces de troisième ordre, l'auteur remplit donc lui-même un souhait qu'il avait énoncé dans la Préface de son Livre. Pour augmenter la valeur individuelle du Mémoire, M. Sturm a emprunté au travail de M. Milinowski (Schlömilch's *Zeitschrift für Math.*, t. XXI et XXIII) quelques raisonnements sans rien changer. Cependant on y trouve assez de choses nouvelles qui appartiennent exclusivement à M. Sturm. D'abord il a fallu imaginer une méthode de génération de la surface cubique pour y pouvoir appliquer la théorie de M. Milinowski. Le théorème fondamental sur le plan polaire mixte de deux points est démontré d'une manière rigoureuse, tandis que la démonstration du théorème correspondant dans le plan se trouvait originairement en défaut chez M. Milinowski. Enfin quelques nouveaux théorèmes ont été ajoutés à la fin de cette Section. La dernière Section a rapport au problème proposé alors (1879) pour le prix de Steiner, à savoir la détermination de la variété d'une courbe dans l'espace ou bien du nombre des conditions simples auxquelles on la peut soumettre. M. Sturm détermine ce nombre pour les courbes traitées dans le cinquième Chapitre de son Livre. Le problème général n'est pas abordé par cela.

Rosanes (*J.*). — Sur des systèmes ponctuels linéairement dépendants. (241-273).

Pour expliquer les idées de l'auteur, nous allons résumer ses définitions en peu de mots. Une forme ternaire $f(x_1 x_2 x_3)$ du degré n dans les coordonnées plans homogènes $x_1 x_2 x_3$ s'évanouit pour un nombre infini de systèmes de valeurs des quantités x. La courbe qui a l'équation $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ en représente l'ensemble. Si l'on appelle tout système de valeurs $(x_1 x_2 x_3)$ qui fait évanouir $f(x_1 x_2 x_3)$, un point zéro de f, il existe une dépendance entre tous les points zéro, car, la forme $f(x_1 x_2 x_3)$ étant complètement déterminée par $\frac{1}{2} n(n+3)$ points zéro quelconques, l'ensemble de tous les points zéro s'ensuit de $\frac{1}{2}n(n+3)$ d'entre eux.

Cependant on a découvert assez tôt qu'un nombre de points zéro qui n'est pas encore suffisant pour déterminer complètement une forme peut entraîner des points zéro ultérieurs; car, désignant par N le nombre $\frac{1}{2}n(n+3)$, on peut déduire $n^2 - N + 1$ de $N - 1$ donnés. Donc, $N - 1$ points zéro étant donnés arbitrairement, on peut déterminer un $N^{\text{ième}}$ de $n^2 - N + 1$ manières différentes, de façon à avoir N points formant un *système dépendant* (nom employé pour désigner un système de p points zéro lorsque $p - 1$ de ces points entraînent le $p^{\text{ième}}$). En faisant abstraction de la position tout à fait arbitraire des points fondamentaux, il est même possible, en certains cas particuliers, de gagner un système dépendant de $N - 2$ points donnés par l'addition d'un point. Cette demande revient à déterminer les coordonnées du dernier point de telle sorte que tous les déterminants du degré $N - 1$ d'une matrice $(N + 1, N - 1)$ s'évanouissent, ce qui revient à trois équations de condition indépendantes.

Il est évident qu'il existe aussi pour les formes quaternaires des systèmes indépendants de points zéro et même en plus grande variété....

L'existence de formes algébriques en Géométrie qui contiennent deux systèmes de variables porte à approfondir la question comment il en serait avec de tels systèmes dépendants. Tel est le théorème de Hesse, que deux paires de points conjugués d'une section conique entraînent toujours un troisième.

Stahl (*Hermann*). — Démonstration d'un théorème de Riemann sur les caractéristiques des fonctions ϑ. (273-276).

Liouville (*J.*). — Leçons sur les fonctions doublement périodiques, faites en 1847. (277-310).

Voici comment Borchardt raconte l'origine de ces leçons :

« Lorsque, dans la première moitié de l'année 1847, j'ai fait un séjour à Paris, en même temps que mon ami bien regretté Ferdinand Joachimsthal, M. Liouville a bien voulu nous faire chez lui, à nous deux, quelques leçons sur sa méthode de traiter la théorie des fonctions doublement périodiques. J'ai recueilli les leçons de M. Liouville, et lorsque, retourné à Berlin, j'en avais achevé la rédaction, je lui ai fait parvenir une copie de mon manuscrit, qu'il m'a autorisé à communiquer à Jacobi et à Lejeune-Dirichlet. C'est ce même manuscrit dont M. Liouville a donné la Table des matières (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXII, p. 452).

» Quoique depuis longtemps le fond des recherches de M. Liouville soit connu, on n'en possède pourtant pas de rédaction authentique. Cette circonstance a donné occasion à plusieurs de mes amis de m'exprimer leur avis que, encore aujourd'hui, je ferais quelque chose d'utile à la Science en faisant imprimer mon ancien manuscrit contenant les leçons de M. Liouville de 1847. Je me conforme à leur désir après avoir obtenu pour cette publication l'assentiment de l'illustre auteur des recherches dont il s'agit.

» En communiquant aux géomètres un travail fait il y a plus de trente ans et sans l'intention de le faire imprimer, je crois néanmoins pouvoir assurer qu'en général ma rédaction reproduit fidèlement les leçons de M. Liouville. Elle en diffère toutefois, comme l'on verra, dans la démonstration du théorème fondamental suivant : « Il est impossible qu'une fonction doublement périodique reste toujours finie, à moins qu'elle ne se réduise à une constante, » théorème qui forme la base de la méthode de M. Liouville.

» La démonstration de ce théorème donnée par M. Liouville, et que je n'ai fait qu'indiquer brièvement, a été remplacée dans ma rédaction par la démonstration d'un théorème plus général, qui ne se rapporte pas exclusivement aux fonctions doublement périodiques et d'où découle comme corollaire le théorème énoncé ci-dessus. »

Table des matières. — Première Partie : Théorie générale.

1. Une fonction doublement périodique qui ne devient jamais infinie est impossible. 2. Une fonction doublement périodique à un seul infini est impossible. 3. Fonctions doublement périodiques à deux infinis. Leurs propriétés fondamentales. 4. Fonctions doublement périodiques à plusieurs infinis. Leur développement en sommes et en produits de fonctions doublement périodiques à deux infinis. 5. Fonctions à un nombre pair d'infinis. Leur développement en produits de fonctions doublement périodiques à trois infinis. 6. Développements des fonctions doublement périodiques en fractions de la forme

$$\frac{M + N\varphi'(z)}{L},$$

$\varphi(z)$ représentant une fonction doublement périodique à deux infinis, $\varphi'(z)$ son quotient différentiel, et L, M, N des fonctions entières de $\varphi(z)$.

Seconde Partie : Applications.

7. Détermination du quotient différentiel des fonctions doublement périodiques à deux infinis. Théorème de l'addition pour les mêmes fonctions. Cas particulier du *sinus amplitudinis*. — 8. Transformation du *sinus amplitudinis*. Expressions en forme d'une somme et d'un produit. — 9. Transformation inverse du *sinus amplitudinis*. Formule d'Abel. Formule de Jacobi.

Schubert (*Hermann*). — Sur la relation uni-biforme (*ein-zweideutige*) entre les éléments des figures fondamentales de première espèce. (311-342).

Pendant les dernières années, MM. Sturm et Hirst se sont occupés de rechercher les nombres qui se rapportent à la relation projective, c'est-à-dire correspondance uni-uniforme des éléments des figures fondamentales de première et de deuxième espèce. A cet effet, ils ont mis à profit la même méthode que, à diverses reprises, MM. Zeuthen et Schubert ont employée pour calculer les nombres pour les courbes et surfaces, en partant des nombres, beaucoup plus faciles à obtenir, des dégénérations de ces figures. L'auteur a encore fait voir (dans son Livre *Kalkül der abzählenden Geometrie,* Leipzig, Teubner) que le calcul de tous les nombres qui se rapportent aux figures fondamentales projectives de première espèce, ainsi qu'aux figures collinéaires et corrélatives de deuxième espèce, se simplifie beaucoup quand on lui applique la méthode développée dans les premières Sections de ce Livre. Ce calcul permet de généraliser les problèmes de Sturm et de Hirst : on remplace la relation projective, c'est-à-dire uni-uniforme par une correspondance α-β-forme. Le présent Mémoire développe les nombres pour deux figures fondamentales de première espèce qui sont en correspondance uni-biforme.

§ 1. La dimension de la condition de la α-β-formité entre les éléments des figures fondamentales de première espèce. — § 2. Les conditions pour deux séries droites ponctuelles en correspondance uni-biforme. — § 3. Les dégénérations pour deux figures fondamentales de première espèce en correspondance uni-biforme. — § 4. Les équations entre les conditions pour deux séries droites ponctuelles en correspondance uni-biforme. — § 5. Calcul des nombres pour la dégénération K. — § 6. Le calcul des nombres pour la dégénération ω. La figure composée de deux séries droites ponctuelles. — § 7. Le calcul des nombres pour deux séries droites ponctuelles en correspondance uni-biforme. — § 8. Problèmes analogues.

Spitzer (*Simon*). — Intégration de quelques équations différentielles linéaires. (343-347). E. Lampe.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement.

XLVII[e] Cahier, T. XXVIII; 1880 (¹).

Halphen. — Sur les invariants différentiels des courbes gauches. (1-102).

Si l'on considère une substitution homographique par laquelle on passe des variables X, Y, Z, ... aux variables $x, y, z, \ldots$, et si l'on regarde Y et Z comme des fonctions de X, y et z seront des fonctions de x définies par la substitution même et l'on aura ainsi deux courbes gauches correspondantes : ceci posé, soit $f(X, Y, Z, Y', \ldots, Z^{(n)})$ une fonction entière des variables primitives et de leurs dérivées; que, dans l'équation $f=0$, on fasse la substitution et qu'on mette aussi l'équation transformée sous forme entière, la fonction f sera dite un invariant différentiel si cette transformée ne diffère de l'équation $f=0$ que par le changement des lettres, c'est-à-dire si cette transformée peut s'écrire

$$f(x, y, z, y', \ldots, z^{(n)}) = 0,$$

quels que soient les coefficients de la substitution.

M. Halphen commence par donner des exemples de tels invariants : ainsi la fonction $u = \frac{1}{1.2}(y''z''' - z''y''')$, qui, égalée à zéro, exprime qu'une courbe est plane, est un invariant différentiel; il en est de même de la fonction v qui, égalée à zéro, exprime que les tangentes à une courbe gauche appartiennent à un complexe linéaire; si l'on pose d'une façon générale

$$a_n = \frac{1}{4.5.6\ldots n}\,\frac{y''z^{(n)} - y^{(n)}z''}{y''z''' - y'''z''},$$

$$b_n = \frac{1}{3.4.5\ldots n}\,\frac{y^{(n)}z''' - y'''z^{(n)}}{y''z''' - y'''z''} \quad (n \geqq 4),$$

(¹) Voir *Bulletin*, IV₂, 121.

on a

$$v = a_6 - 2b_6 - 3a_4a_5 + 3a_4b_4 + 2a_4^3.$$

L'examen de substitutions particulières montre tout de suite qu'un invariant différentiel ne contient ni les variables elles-mêmes, ni les dérivées premières, et qu'il est nécessairement une fonction homogène de déterminants binaires tels que $y^{(m)}z^{(n)} - y^{(n)}z^{(m)}$; en regardant ce déterminant comme une figure, on voit de plus que chaque terme d'un invariant entier f contient un nombre de figures qui est le même pour tous les termes de l'invariant : ce nombre est le *degré* de l'invariant; ainsi les invariants u et v ont les degrés 1 et 3. Le quotient d'un invariant différentiel de degré δ par u^δ est une fonction entière des quantités a_n, b_n précédemment définies. La somme des indices de dérivation, dans un même terme d'un invariant, est constante pour tous les termes de cet invariant : c'est le *poids* de ce dernier; quant à l'ordre d'un invariant, c'est l'ordre des plus hautes dérivations. Il n'existe pas d'invariant absolu d'ordre inférieur à 7.

Dans un invariant différentiel d'ordre n, si l'on prend, parmi les termes du plus haut degré en a_n, b_n simultanément, celui qui est du plus haut degré en b_n, le coefficient de ce terme est lui-même un invariant; il en est de même du coefficient du terme du plus haut degré en b_n, ce terme étant considéré isolément.

Quand un invariant différentiel est réduit à la forme d'une fonction des quantités A_n, B_n (analogues à a_n, b_n), si q est alors son poids, l'effet de la substitution homographique $X = \frac{\xi}{\omega}$, $Y = \frac{\eta}{\omega}$, $Z = \frac{\zeta}{\omega}$, où ξ, η, ζ, ω sont des polynômes du premier degré en x, y, z, est de le reproduire multiplié par $\left(\frac{\omega^2}{\omega\xi' - \xi\omega'}\right)^q$; mis sous une forme quelconque, il se reproduit multiplié par $D^d \frac{\omega^{(p-d)}}{(\omega\xi' - \xi\omega')^{p+d}}$, d étant son degré, p son poids et D étant le déterminant de la substitution. Il suit de là que la somme de deux invariants d'un même degré et d'un même poids est encore un invariant; que leur quotient est un invariant absolu; que, avec trois invariants, on peut former un invariant absolu; enfin que tout invariant d'ordre moindre que 7 se réduit à $u^m v^n$.

De ce qui suit on supposera toujours les invariants exprimés au moyen des quantités a_n, b_n : ils sont alors de degré zéro.

Sous cette condition on a la proposition suivante : *Si φ et ψ sont deux invariants différentiels d'un même poids, la quantité $\varphi\psi' - \varphi'\psi$ est un invariant; cet invariant est lui-même de degré zéro; il est exprimé au moyen des quantités a_n, b_n, et les dérivées d'ordre le plus élevé n'y entrent que linéairement.* M. Halphen est ainsi conduit à la notion des invariants *linéaires*. Un invariant linéaire d'ordre n est celui qui ne contient a_n et b_n que linéairement.

L'auteur met ensuite en évidence l'existence de deux invariants linéaires s_7, t_7 du septième ordre, qui sont de la forme

$$s_7 = v^\mu a_7 + \theta, \quad t_7 = v^\nu t_7 + \psi a_7 + \vartheta,$$

où θ, ψ, ϑ sont des quantités d'ordre au plus égal à b, et μ, ν des exposants entiers et positifs; cette forme caractéristique se retrouve dans les invariants s_n, t_n d'ordre supérieur à 7, que l'on déduit successivement de s_7, t_7 et de l'invariant v par l'application de la règle suivante. En désignant par σ et τ les poids de s_7, t_7, on aura

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(vs'_7 - \frac{\sigma}{3}v's_7\right), \quad t_8 = \frac{1}{8}\left(vt'_7 - \frac{\tau}{3}v't_7\right),$$

les deux invariants linéaires s_8, t_8 étant de huitième ordre et des poids $\sigma + 4$, $\tau + 4$. On aura ensuite

$$s_9 = \frac{1}{9}\left(v s'_8 - \frac{\sigma + 4}{3} v' s_8\right), \quad t_9 = \frac{1}{9}\left(v t'_8 - \frac{\tau + 4}{3} v' t_8\right), \quad \ldots.$$

Les invariants s_8, t_8, s_9, t_9, ..., s_n, t_n ainsi formés sont dits *fondamentaux,* et cette dénomination est bien justifiée par la proposition suivante :

Tout invariant différentiel d'ordre n' est exprimable rationnellement en fonction des invariants fondamentaux d'ordre n et d'ordre moindre, ainsi que l'invariant v. Si cet invariant est une fonction entière des quantités a_n, b_n, la fonction rationnelle qui le représente ne contient en dénominateur qu'une puissance de v.

On voit donc que la recherche de tous les invariants différentiels se ramène à la recherche de deux invariants du septième ordre. C'est en se plaçant à un point de vue un peu différent que M. Halphen effectue cette détermination : elle résulte, en effet, de la proposition suivante, dont on aperçoit de suite tout l'intérêt.

Il est en général possible, par un choix convenable des coordonnées (et cela d'une seule façon), de réduire les équations d'une courbe à la forme *canonique*

$$\begin{aligned} z &= x^3 + x^6 + p_7 x^7 + p_8 x^8 + \ldots, \\ y &= x^2 \qquad\quad + q_7 x^7 + q_8 x^8 + \ldots, \end{aligned}$$

et les coefficients de ces développements p_7, p_8, ..., q_7, q_8, ... sont des invariants absolus. En effectuant cette réduction, on parvient aux expressions de s_7, t_7, à savoir

$$s_7 = \mu_7 - 3\lambda_6, \quad t_7 = \mu_6\lambda_7 - \lambda_6\mu_7 + 2\lambda_6^2,$$

où

$$\begin{aligned} \mu_6 &= v, \\ \lambda_6 &= b_6 - a_4 b_5 - 4a_5 b_4 + 4a_4^2 b_4 - 2a_4^2 a_5 + 2b_4^2 + a_5^2 + a_4^4, \\ \mu_7 &= a_7 + 3b_4^2 - 4b_4 a_5 + 3b_5 a_4 - 4a_6 a_4 + 6a_4^2 a_5 - 3a_4^4, \\ \lambda_7 &= -2a_4\lambda_6 + b_7 + 5b_4 b_5 - 5a_5 b_5 + 4a_4^2 b_5 \\ &\quad - 2(a_4^2 + 2b_4 - a_5)(a_6 + a_4^3 + a_4 b_4 - 2a_4 a_5). \end{aligned}$$

La considération d'une courbe (m), dite *adjointe* à la courbe (M), et qui s'en déduit par corrélation, conduit ensuite M. Halphen à la notion des invariants différentiels adjoints; on conçoit, en effet, que tout invariant différentiel F, relatif à la courbe (M), puisse être transformé en un invariant différentiel f, relatif à la courbe m. Les invariants différentiels peuvent ainsi être classés par couples; un invariant différentiel peut d'ailleurs être son propre adjoint; tel est le cas de l'invariant v, puisque la figure corrélative d'une complexe linéaire est encore une complexe linéaire.

Les résultats précédents reçoivent une interprétation géométrique intéressante par l'introduction de la courbe *anharmonique* déjà considérée par M. Fouret et dont les équations, en la supposant rapportée à un tétraèdre de référence convenable, sont

$$t^{r-1} y = x^r, \quad t^{s-1} y = z^s.$$

M. Fouret a montré que, en chaque point d'une courbe, il existait une courbe anharmonique unique, ayant avec la proposée, au point considéré, un contact du septième ordre : les exposants r, s qui la caractérisent sont des invariants absolus, liés par conséquent aux invariants absolus $\frac{s_7^3}{v^4}$, $\frac{t_7^3}{v^8}$; au lieu des quantités r et s, M. Halphen est amené à introduire deux quantités g, h qui ne changent pas les modifications qui résultent pour les nombres r, s des échanges entre les faces du tétraèdre de référence; posons

$$\alpha = r + s - 1, \quad \beta = r - s - 1, \quad \gamma = s - r - 1,$$

on a

$$h = \frac{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}, \quad g = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}.$$

Si maintenant l'on fait

$$a = \frac{s_7^3}{v^4}, \quad b = \frac{t_7}{s_7^2},$$

ces deux invariants absolus s'expriment au moyen de g, h par les formules

$$a = \frac{3}{2.5^2.7^2}\frac{(4 - 25h)^3}{g^2},$$

$$b = \frac{7}{2^2.3^8}\left[1 - 2^2.3^2.5\frac{g}{(4 - 25h)^2}\right];$$

inversement on a

$$g = \frac{3^8.2^4}{5.7^4}\frac{1}{a^2(7 - 36b)^3},$$

$$4 - 25h = \frac{2^3.3^5}{7}\frac{1}{a(7 - 36b)^2}.$$

L'auteur aborde ensuite une autre question :

Soient $\varphi = 0$, $\psi = 0$ deux équations différentielles simultanées entre la variable indépendante x et les deux fonctions y et z; quelle doit être la nature de ce système pour qu'il soit invariant, et, dans ce cas, quelles simplifications peuvent être apportées au problème de l'intégration?

Après avoir écarté les cas particuliers où une combinaison des deux équations est $u = y'z'' - z'y'' = 0$, ou bien $v = 0$, il montre que, dans le cas général, ces deux équations consistent en des relations entre les coefficients de la forme canonique, c'est-à-dire entre des invariants absolus : par exemple, si elles sont du septième ordre, elles se réduisent à

$$\frac{s_7^3}{v^4} = a, \quad \frac{t_7}{s_7^2} = b,$$

a et b étant des constantes, et l'intégrale générale est formée par les équations générales de la courbe anharmonique, dont les invariants g, h sont déterminés en fonction de a, b par les formules précédemment données. Dans le cas de deux équations d'ordre n, l'intégration se ramène à l'intégration successive :

1° D'un système de deux équations, l'une d'ordre $(n - 7)$, l'autre d'ordre $(n - 8)$;

2° D'un système de deux équations, l'une du second, l'autre du premier ordre;

3° D'un système de deux équations du premier ordre chacune;

4° D'un système de deux équations, l'une du deuxième, l'autre du troisième ordre;

5° Et, enfin, à cinq quadratures successives.

Le dernier Chapitre du Mémoire est consacré à diverses applications et à divers exemples de *covariants* différentiels; on y trouvera la détermination du tétraèdre principal de la courbe anharmonique, osculatrice en un point d'une courbe donnée, l'équation de la surface du second degré osculatrice en un point, les équations différentielles des courbes biquadratiques, etc.

Collignon (*E.*). — Recherches sur la formule de Wallis. (103-138).

On trouvera dans ce Mémoire, outre diverses transformations de la formule de Wallis et quelques recherches arithmétiques relatives au numérateur et au dénominateur, un curieux essai de démonstration de l'incommensurabilité de π et de ses puissances. M. Collignon, en partant de l'égalité hypothétique

$$\frac{\pi}{2} = \frac{Y}{X} = (p)\frac{np + m}{np},$$

où $\frac{Y}{X}$ serait une fonction irréductible, où

$$(p) = \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}\cdots\frac{p-1}{p},$$

p étant un nombre premier et m et n étant deux nombres entiers premiers entre eux, dont on sait seulement que m est inférieur à n, établit que la possibilité d'une telle égalité est *infiniment peu probable*. Il ne manque pas d'ailleurs de reconnaître ce qu'un tel mode de démonstration a de défectueux.

Léauté (*H.*). — Sur un perfectionnement applicable à tous les régulateurs à force centrifuge. (139-175).

On connait un grand nombre de solutions approchées du problème de l'isochronisme du régulateur. M. Rolland en a donné une solution exacte : toutefois, la plupart des régulateurs employés dans l'industrie n'appartiennent pas aux types qui répondent à ces solutions; il y a donc intérêt à faire connaître un procédé simple permettant, sans compliquer sensiblement les régulateurs, de les rapprocher de l'isochronisme. D'un autre côté, l'isochronisme parfait est souvent d'une application défectueuse : la sensibilité du régulateur doit, en effet, être en rapport avec l'énergie du volant; de là résulte la nécessité de déterminer, dans chaque cas, le degré d'isochronisme qu'il convient d'adopter et, par suite, l'utilité d'un système permettant d'obtenir le degré d'isochronisme qu'on veut; enfin il est nécessaire de pouvoir modifier la vitesse de régime de la machine, tout en conservant le degré d'isochronisme que l'on s'est fixé; le système indiqué par M. Léauté répond à ces divers *desiderata* : il s'applique à un régulateur à boules quelconque; il procure le degré d'isochronisme qu'on veut; il permet de faire varier la vitesse de régime sans même arrêter la machine; il donne la possibilité de maintenir le degré d'isochronisme obtenu, quand cette vitesse est modifiée; enfin il est simple à établir et ne complique pas sensiblement le mécanisme.

Poincaré (*H.*). — Sur un mode nouveau de représentation des formes quadratiques définies ou indéfinies. (177-245).

Le Mémoire de M. Poincaré comprend cinq Parties. La première est consacrée à l'étude arithmétique des réseaux de points dont les coordonnées x, y sont données par les formules

$$x = am + bn,$$
$$y = cm + dn,$$

où m, n prennent toutes les valeurs entières possibles. Ces réseaux jouissent de propriétés qui rappellent certaines propriétés des nombres : ils peuvent être entiers, fractionnaires, incommensurables; ils sont entiers quand a, b, c, d sont entiers; un réseau A est multiple d'un réseau B quand tous les points du réseau A appartiennent au réseau B; deux réseaux A, B sont équivalents quand ils comprennent les mêmes points; le rapport du réseau $\begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix}$ au réseau $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est le réseau $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$; on est amené ainsi à considérer les conditions de divisibilité de deux réseaux, leur plus grand commun diviseur, leur plus petit multiple commun; ces diverses recherches s'effectuent aisément par la considération d'un réseau équivalent à un réseau donné et ayant la forme réduite $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$; on est amené aussi à considérer des réseaux *premiers* dont la *norme* $ad - bc$ est un nombre premier et à effectuer, pour les réseaux entiers, une décomposition analogue à la décomposition d'un nombre entier en ses facteurs premiers. Un réseau entier peut aussi être considéré comme l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à une congruence de la forme

$$ax + by \equiv 0 \pmod{c},$$

a, b, c étant des nombres entiers; on est ainsi amené à traiter, sous cette nouvelle forme, les problèmes précédemment indiqués.

M. Poincaré, dans la seconde Partie, traite de la représentation des nombres complexes de la forme $x + y\sqrt{D}$; un tel nombre est représenté par le point x, y; son *module* et son *argument* sont les quantités

$$\sqrt{x^2 - y^2 D}, \quad \frac{1}{\sqrt{-D}} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\sqrt{-D},$$

qui s'interprètent géométriquement sans difficulté; l'introduction des nombres complexes conduit à une notation nouvelle pour la représentation des réseaux; ainsi le symbole $Am + Bn$, où A, B sont les nombres complexes $a + c\sqrt{D}$, $b + d\sqrt{D}$, représentera le réseau $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Les points représentatifs de tous les nombres complexes existants qui sont multiples d'un nombre complexe donné, existant ou idéal, forment un réseau que l'on peut regarder comme un nouveau mode de représentation de ce nombre existant ou idéal donné; ce mode de représentation conduit l'auteur au théorème suivant :

On peut représenter, avec une approximation aussi grande qu'on voudra, un nombre complexe quelconque $a + b\sqrt{D}$, où a et b peuvent être incom-

mensurables, par une expression de la forme

$$\Sigma\lambda_m(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$

où λ_m et m sont des nombres entiers. α et β des nombres fractionnaires donnés (à dénominateurs plus grands que 2).

Dans la troisième Partie, M. Poincaré traite de la représentation des formes par des réseaux.

Le réseau

$$x = am + bn, \quad y = cm + dn$$

représente la forme

$$(am + bn)^2 - D(cm - dn)^2;$$

ce mode de représentation s'applique aux formes indéfinies et conduit l'auteur à l'interprétation géométrique des formes réduites indéfinies, interprétation qui fournit immédiatement la démonstration des principaux théorèmes qui concernent ces formes. Dans cette même Partie on résout ces deux problèmes :

Reconnaître si une forme en implique une autre; trouver toutes les transformations d'une forme en elle-même.

La quatrième Partie concerne ce que l'auteur appelle le *produit second* de deux réseaux.

Si, A, B, A_1, B_1 étant des nombres complexes, on considère les deux réseaux

$$Am + Bn, \quad A_1 m_1 + B_1 n_1,$$

leur produit second sera

$$AA_1\mu_1 + AB_1\mu_2 + BA_1\mu_3 + BB_1\mu_4,$$

où μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sont les nouvelles indéterminées. L'opération est évidemment commutative; appliquée aux réseaux qui représentent deux formes, elle conduit à la composition des formes, au sens de Gauss.

Enfin, dans la cinquième Partie, l'auteur montre comment les considérations précédentes permettent d'exposer d'une manière simple et concrète la théorie des nombres complexes idéaux, qui correspondent aux formes quadratiques de déterminant D.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS PURE AND APPLIED, Editor in chief J.-J. SYLVESTER, Associate Editor in charge W.-E. STORY, with the cooperation of B. PEIRCE, S. NEWCOMB and H.-A. ROWLAND. Published under the auspices of the John Hopkins University. Baltimore.

Tome I; 1878.

Newcomb (S.). — Note sur une classe de transformations par lesquelles une surface peut être retournée dans un espace de plus de trois dimensions. (1-4).

L'auteur se propose de démontrer le théorème suivant :

Si une quatrième dimension est ajoutée à l'espace, une surface matérielle fermée peut être retournée par une simple flexion sans déchirure ni duplicature.

Hill (*G.-W.*). — Recherches sur la théorie de la Lune. (5-26).

Eddy (*H.-T.*). — Le théorème des trois moments. (27-31).

Le théorème dont il s'agit exprime la relation entre les moments de flexion d'une poutre élastique droite en trois points de support consécutifs; il a été publié par Clapeyron, en 1857, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. L'auteur l'obtient simplement et l'énonce sous une forme plus générale.

Weichold (*G.*). — Solution du cas irréductible. (32-49).

Une traduction française de ce Mémoire a été insérée dans le *Journal de Mathématiques* de M. Resal, 3e série, t. V; 1879. Voir *Bulletin*, 2e série, t. III, IIe Partie, p. 221.

Cayley. — Desiderata et suggestions. (50-52).

Rowland. — Note sur la théorie de l'absorption électrique. (53-58).

Après la décharge d'une bouteille de Leyde, il se produit au bout d'un certain temps une charge nouvelle de même signe que la première. L'auteur cherche quelle doit être la constitution de l'isolateur pour qu'un tel phénomène (qu'on explique habituellement au moyen d'une absorption de l'électricité par l'isolateur) soit possible. Il part des équations fondamentales, données par Maxwell,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial z}\right)+4\pi\rho=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial V}{\partial z}\right)-\frac{d\rho}{dt}=0,$$

où V est le potentiel, ρ la densité au point x, y, z, $\varkappa$ le pouvoir inducteur, k le pouvoir conducteur, quantités qui, dans le système de corps considéré comprenant des conducteurs et des non-conducteurs, doivent être regardées comme variables.

S'il n'y a pas absorption électrique, le rapport des densités en deux points quelconques doit rester constant : si l'on pose

$$\frac{\rho}{\rho'}=c,$$

les équations précédentes admettent les solutions

$$\rho=\rho_0 e^{-ct},\quad V=V_0 e^{-ct},$$

où $\rho=-k\dfrac{dV}{dn}$ désigne l'intensité du courant et où $c=3\Pi m$, $m=\dfrac{k}{\varkappa}$. Inversement on peut déduire de ces équations qu'il y a absorption lorsque $\dfrac{k}{\varkappa}$ n'est pas constant pour tout le système. Ceci peut avoir lieu si le corps comprend des parties hétérogènes, si la conductibilité dans le corps ne satisfait pas aux lois de Ohm, c'est-à-dire si k dépend des forces électriques, enfin si $\varkappa$ dépend des mêmes forces.

L'auteur s'occupe ensuite des matériaux qui montrent le mieux l'absorption électrique et traite le cas d'un condensateur composé de plaques parallèles.

Peirce (*C.*). — Esposizione del metodo dei minimi quadrati. (59-63).

Analyse de l'Ouvrage publié sous ce titre par M. A. Ferrero. (Firenze, 1876.)

Sylvester. — Sur une application de la nouvelle théorie atomique à la représentation graphique des invariants et covariants des quantités binaires avec trois appendices. (64-125).

M. Sylvester expose dans ce Mémoire de singulières analogies entre les formules chimiques (dans la théorie atomique) et les formes symboliques des invariants des formes binaires. Un élément est représenté par une forme binaire dont le degré est égal à la valeur atomique de l'élément. Ainsi on posera

$$\begin{gathered} \mathrm{H} = h_x = h'_x = h''_x = \ldots, \\ \mathrm{O} = o_x^2 = o'^2_x = o''^2_x = \ldots, \\ \mathrm{C} = c_x^4 = c'^4_x = c''^4_x = \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Les combinaisons saturées sont alors représentées par les mêmes notations que Clebsch a fait connaître pour les représentations des invariants

$$\begin{gathered} 2\mathrm{O} = (oo')^2, \quad \mathrm{H_2O} = (ho)(h'o), \\ \mathrm{H_4C} = (hc)(h'c)(h''c)(h'''c), \\ \mathrm{NO_2H} = (no)^2(no')^2(no'')(o''h). \end{gathered}$$

Les représentations graphiques dont se servent les chimistes et qui consistent à représenter les éléments par des points, et les systèmes tels que $(oo')\ldots$ par des droites qui les joignent, peuvent aussi servir à la représentation des invariants.

Le noyau d'une combinaison ou une combinaison non saturée est représenté par un covariant; ainsi la figure de Lodenburg pour le noyau benzine sera

$$(cc_1)(c_1c_2)(c_2c_3)(c_3c_4)(c_4c_5)(c_5c)(c_1c_4)(c_2c_5)\,c_x c_{1x} c_{2x} c_{3x} c_{4x} c_{5x}.$$

Il faut remarquer qu'un invariant ne correspond pas à chaque corps; ainsi l'hydrogène ne peut être représenté par (hh'), puisque $(hh') = 0$. Si l'on ne veut pas regarder l'hydrogène comme un corps composé, la théorie présente une lacune.

Dans ce système, le poids des invariants ou covariants est égal au nombre des droites qui joignent les unités atomiques. M. Sylvester cherche quelles doivent être les propriétés de la figure, si la forme invariante est réductible, ainsi que cela a lieu pour le covariant ci-dessus, du sixième degré, et montre sur quelques exemples comment la figure d'un produit peut être composée avec les figures des facteurs irréductibles. A une relation invariante correspond la possibilité de déformer les figures des différentes formes les unes dans les autres : ainsi la loi de réciprocité de M. Hermite peut s'établir graphiquement en remplaçant m atomes d'atomicité n par n atomes d'atomicité m.

Clifford. — Extrait d'une Lettre à M. Sylvester. (126-129).

Dans le Mémoire de M. Sylvester, les figures chimiques sont réduites à des schèmes géométriques, les éléments chimiques n'y entrent pas. M. Clifford comble cette lacune.

Hill (W.). — Recherches sur la théorie de la Lune. (129-147).

Franklin (F.). — Coordonnées biponctuelles. (148-173).

Dans le système adopté par M. Franklin, les coordonnées d'une droite sont les distances mesurées parallèlement à une direction fixe, à deux ou trois points; l'auteur se sert de ces coordonnées pour faire l'étude des coniques.

Cayley. — Desiderata et suggestions. (174-176).

Story. — Sur le potentiel élastique des cristaux. (176-183).

Les composantes de la force élastique peuvent être regardées comme les dérivées partielles d'une fonction entière homogène et du second degré des six quantités

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dots.$$

C'est cette fonction que l'auteur appelle *potentiel des forces élastiques;* elle contient, si l'on fait abstraction de toute hypothèse sur la nature du corps, vingt et une constantes; ce nombre se réduit à deux pour les corps isotropes. M. Story s'occupe spécialement de déterminer le nombre des constantes pour les divers systèmes cristallins.

Lucas (É.). — Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. (184-240; 289-321).

I. Définition des fonctions numériques simplement périodiques.

Soient a, b les racines de l'équation à coefficients entiers

$$x^2 = \mathrm{P}x - \mathrm{Q};$$

l'auteur pose

$$\mathrm{U}_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad \mathrm{V}_n = a^n + b^n;$$

telles sont les fonctions dont l'auteur étudie les propriétés arithmétiques; elles se classent en trois espèces selon que les racines sont réelles et entières, réelles et incommensurables, imaginaires.

II. Des relations des fonctions U_n et V_n avec les fonctions circulaires et hyperboliques.

III. Des relations de récurrence pour le calcul des valeurs des fonctions U_n et V_n.

IV. Des relations des fonctions U_n et V_n avec les déterminants.

V. Des relations des fonctions U_n et V_n avec les fractions continues. Développements de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$, $\frac{U_{(n+1)r}}{U_{nr}}$.

VI. Développement des fonctions U_n et V_n en séries de fractions; Développements de $\frac{U_{(n+1)r}}{U_{nr}}$, $\frac{V_{(n+1)r}}{V_{nr}}$.

VII. Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie de la divisibilité.

U_m est divisible par U_n quand m est divisible par n; de même pour V_m, V_n, à condition que m soit impair. U_n et V_n sont premiers entre eux.

VIII. Des formes linéaires et quadratiques des diviseurs de U_n et V_n qui correspondent aux valeurs paires et impaires de l'argument n.

IX. Des formules concernant l'addition des fonctions numériques.

Le produit de n termes consécutifs de la série U_n est divisible par le produit des n premiers termes.

X. De la somme des carrés des fonctions numériques U_n et V_n.

XI. Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie du plus grand commun diviseur.

Le plus grand commun diviseur de U_m et de U_n est U_D, en désignant par D le plus grand commun diviseur entre m et n.

XII. De la multiplication des fonctions numériques.

XIII. De la loi de la répétition des nombres premiers dans les séries récurrentes simplement périodiques.

Si λ désigne le plus grand exposant d'un nombre premier p contenu dans U, l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise U_{pn} est égal à $\lambda+1$.

XIV. Nouvelles formes linéaires et quadratiques des diviseurs de U_n et de V_n.

XV. Des relations des fonctions U_n et V_n avec les radicaux continus.

XVI. Développements des puissances de U_n et de V_n en fonctions linéaires des termes dont les arguments sont des multiples de n.

XVII. Autres formules concernant le développement des fonctions numériques U_n et V_n.

XVIII. Développements en séries des irrationnelles et de leurs logarithmes népériens.

XIX. Sur le calcul rapide des fractions continues périodiques.

XX. Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie de l'équation binôme.

p désignant un nombre premier, le quotient $4\frac{U_{qr}}{U_r}$ peut se mettre sous la forme

$$Y^2 - pZ^2 \quad \text{ou} \quad \Delta Y^2 + pZ^2$$

suivant que l'on a

$$p \equiv \pm 1 \pmod 4.$$

XXI. Sur les congruences du triangle arithmétique de Pascal et sur une généralisation du théorème de Fermat.

XXII. Sur la théorie des nombres premiers dans leurs rapports avec les progressions arithmétiques.

XXIII. Sur la théorie des nombres premiers dans leurs rapports avec les progressions géométriques.

XXIV. De l'apparition des nombres premiers dans les séries récurrentes de première espèce.

En désignant par $\varphi(m)$ le nombre des nombres premiers inférieurs à m, on a

$$U_{\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Si l'on appelle *diviseurs propres de* U_m les facteurs premiers de U_m qui ne divisent pas les fonctions d'indice moindre, on a les propositions suivantes :

Les diviseurs impropres des termes U_n *sont des diviseurs propres des termes dont le rang est un diviseur de n.*

Les diviseurs propres des termes U_n *des fonctions périodiques de première espèce appartiennent à la forme* $2kn+1$; *enfin ces diviseurs appartiennent aux diviseurs de la forme quadratique* $x^2 \pm py^2$.

Ces propositions permettent de déterminer les diviseurs des fonctions numériques de première espèce.

XXV. De l'apparition des nombres premiers dans les séries récurrentes de seconde et de troisième espèce.

Si le nombre premier p divise Δ, il divise aussi le terme U_p d'une série de seconde espèce.

Suivant que l'on a $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = \pm 1$, le nombre premier p divise le terme $U_{p\pm1}$ d'une série de seconde ou de troisième espèce; dans les mêmes conditions et si l'on a affaire à une série de seconde espèce, les diviseurs propres de U_ω sont de la forme

$$p = k\omega \pm 1.$$

XXVI. Sur la périodicité des fonctions numériques et sur la généralisation du *Canon arithmeticus.*

Si m désigne un nombre premier avec le produit des racines d'une équation du second degré à coefficients commensurables

$$m = p^\pi r^\rho s^\sigma \ldots;$$

si l'on désigne par Δ le discriminant de l'équation et si l'on fait

$$\Phi(m) = p^{\pi-1} r^{\rho-1} s^{\sigma-1} \ldots \left[p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)\right]\left[r - \left(\frac{\Delta}{r}\right)\right]\left[s - \left(\frac{\Delta}{s}\right)\right]\cdots,$$

on a

$$U_{\Phi(m)} = 0 \pmod{m}.$$

XXVII. Sur l'inversion du théorème de Fermat et sur la vérification des grands nombres premiers.

Si, dans l'une des séries récurrentes U_n, le terme U_{p-1} est divisible par p, sans qu'aucun des termes de la série, dont le rang est un diviseur de $p-1$, le soit, le nombre p est premier; de même, si U_{p+1} est divisible par p sans qu'aucun des termes de la série, dont le rang est un diviseur de $p+1$, le soit, le module p est premier.

XXVIII. Sur la division géométrique de la circonférence en parties égales.

XXIX. Sur la vérification de l'assertion du P. Mersenne.

XXX. Sur la périodicité numérique des coefficients différentiels des fonctions rationnelles d'exponentielles.

Si l'on pose symboliquement

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = e^{E^n},$$

où, dans le développement du second membre, on remplace E^n par E_n, les nombres entiers E^n, dits eulériens par M. Sylvester, jouissent des propriétés suivantes :

Si p est un nombre premier, la somme des nombres eulériens, pris avec les signes alternés + et —, dont l'indice est plus petit que p, est divisible par p.

Les résidus des nombres eulériens, suivant un module premier quelconque, se reproduisent périodiquement dans le même ordre, comme les résidus des puissances des nombres entiers.

Eddy (H.). — L'arche élastique. (241-244).

Hill. — Recherches sur la théorie de la Lune. (245-260).

Halsted. — Bibliographie de l'hyperespace et de la Géométrie non euclidienne. (261-276; 384-385).

Titres des travaux, sur ces sujets, dus à Lobatchefsky, Gauss, Bolyai (W. et J.), Jacobi, Grassmann, Cayley, Sylvester, Riemann, Salmon, Baltzer, Hoüel, Beltrami, Battaglini, Helmholtz, Potocki, Darboux, Kronecker, Christoffel, Clifford, Lipschitz, Genocchi, Nöther, Betti, de Tilly, Becker, Schlaefli, Beez, Rosanes, Flye Sainte-Marie, Lie, Klein, Saleta, König, Jordan, Frischauf, Kober, Hoffmann, Freye, Cassani, Frahm, Lindemann, d'Ovidio, Stahl, Schering, Spitz, Halphen, Escherich, Spottiswoode, Lewes, Funcke, Zollner, Frank, Günther, Réthy, Frankland, Erdmann, Mehler, Cantor, Newcomb, Tannery (P.), Lüroth, Weissenborn, Agolini, Bouniakofsky, Schmitz-Dumont, Mouro, Young.

Mallet. — Quelques remarques sur un passage du Mémoire du professeur Sylvester sur la théorie atomique. (277-281).

Mallet. — Données historiques sur la découverte de la loi de *valence*. (282).

Hammond. — Description mécanique des ovales de Descartes. (283).

Dixon. — Nouvelle méthode pour la résolution des équations du quatrième degré. (283-284).

Kendall. — Sur un procédé rapide pour la résolution du cas irréductible de Cardan. (285-287).

Glashan. — Extension du théorème de Taylor. (287-288).

Démonstration de la formule

$$
\begin{aligned}
& f(x+a+b+c+e\ldots) \\
& \quad = f(x+b+c+e+\ldots) \\
& \quad + \int_0^a da\, f(x+c+e+\ldots) \\
& \quad + \int_0^a da \int_0^{a+b} d(a+b) f''(x+e+\ldots) \\
& \quad + \int_0^a da \int_0^{a+b} d(a+b) \int_0^{a+b+c} d(a+b+c) f'''(x+\ldots) \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Eddy. — Sur les deux méthodes réciproques générales de la Statique graphique. (289-335).

Après avoir donné quelques renseignements historiques sur le développement de la méthode de la Statique graphique, l'auteur fait remarquer que Poncelet, dans un travail inséré dans le *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 12, a fait poser les bases d'une seconde méthode fondamentale, aussi générale que celle du polygone des forces, et qui est, en quelque sorte, réciproque à cette dernière; c'est cette méthode que développe M. Eddy.

Lipschitz. — Démonstration d'un théorème fondamental obtenu par M. Sylvester. (336-340).

Voir le Mémoire de M. Sylvester contenu dans le tome 85 du *Journal de Borchardt.*

Sylvester. — Note sur le théorème contenu dans le Mémoire du professeur Lipschitz. (341-343).

Muir. — Lettre au professeur Sylvester sur le mot *continuant.* (344).

Frankland. — Extrait d'une Lettre à M. Sylvester. (345-349).

Clifford. — Application de l'Algèbre extensive de Grassmann. (350-358).

Craig (*T.*). — Mouvement d'un point à la surface d'un ellipsoïde. (359-364).

Le point est attiré par le centre proportionnellement à la distance.

Franklin. — Sur un problème d'isomérisme. (365-368).

Franklin. — Sur une forme exponentielle indéterminée. (368-369).

Sylvester. — Table synoptique des invariants et des covariants irréductibles d'un *quintic* binaire, avec une scholie sur un théorème relatif aux hyperdéterminants conditionnels. (370-378).

Holman et *Engler.* — La tangente à la parabole. (379-383).

Cayley. — Mécanisme pour la construction de x^2. (386).

Philipps (*W.*). — Mécanisme pour la construction de la lemniscate. (386).

Loudon (*J.*). — Équations d'Euler. (387-388).

CRÓNICA CIENTÍFICA, Revista internacional de Ciencias, publicada por D. Rafael Roig y Torres. Barcelona (1).

La *Crónica científica*, Revue internationale des sciences, dirigée par le savant don *Rafael Roig y Torres,* de Barcelone, a commencé, avec l'année 1881, sa quatrième année de publication. C'est à notre connaissance le seul recueil de ce genre qui se publie en Espagne.

La *Crónica científica* embrasse dans son cercle d'études non seulement les sciences mathématiques et astronomiques, mais aussi les sciences physiques et naturelles et leurs diverses applications à la médecine, à la pharmacie et à l'agriculture. Laissant de côté les travaux qui ne rentrent pas dans le domaine plus circonscrit du Bulletin, nous nous bornerons à regret à donner ici simplement la liste par noms d'auteurs des diverses questions mathématiques et astronomiques qui ont été traitées dans les vingt-quatre livraisons de la *Crónica científica* pendant le cours de l'année 1880.

(1) Paraissant deux fois par mois. Calle de Fontanella, núm. 28.

MATHÉMATIQUES.

A. Angot. — Nouvelles Tables pour calculer les hauteurs par le moyen des observations barométriques. (566).

D. Carrère. — Théorèmes relatifs à la décomposition des polynômes (300).

L. Clariana y Ricart. — Application des déterminants à la Trigonométrie. (201).

L. Clariana y Ricart. — Application des déterminants à la résolution des équations du quatrième degré. (425).

L. Clariana y Ricart. — Points ombilicaux de l'ellipsoïde. (521).

G. Eneström. — Lettres inédites de Bernoulli à Euler. (329-353-377).

Faye. — Variations séculaires de la figure mathématique de la Terre. (277).

Govi. — Détermination de la longitude du pendule simple. (365).

Landolt. — Nouveau télémètre. (173).

Landry. — Décomposition du nombre $2^{64}+1$. (366).

Leclerc et *de Bernardières.* — Différence de longitude entre Paris et Bonn (348).

Lefébure. — Sur l'équation $x^n + y^n = z^n$. (320).

Loewy et *Th. von Oppolzer.* — Différence de longitude entre Paris et Bregenz (123).

Marey. — Appareil pour étudier la marche. (397).

Marre (Aristide). — Deux règles de l'arithmétique des Hindous. (153-177).

É. Mathieu. — Intégrations relatives à l'équilibre de l'élasticité. (194).

C.-S. Peirce. — Valeur de la gravité (pesanteur) à Paris. (320-323).

F. Perrier. — Longitudes et latitudes terrestres en Afrique. (495).

H. Resal. — Des diverses branches de la Cinématique, et particulièrement de la Géométrie cinématique de M. Mannheim. (48).

F. de Rocquigny. — Calcul de la somme des cubes de la suite naturelle des *n* premiers nombres entiers. (119).

ASTRONOMIE.

Abney. — Carte photographique de la portion infra-rouge du spectre solaire (99).

Airy et *Mouchez.* — Observations méridiennes des petites planètes. (275).

D'Apples. — Calcul abrégé de la hauteur du Soleil (358).

Barker. — Observation spectroscopique de l'éclipse de Soleil. (342).

Bell. — Application du photophone aux bruits qui se produisent en la superficie solaire. (538).

Bigourdan. — Comète de Hartwig. (515).

Brésil (S. M. l'Empereur du). — Nouvelle comète. (124-140).

Callandreau. — Opposition des petites planètes. (78).

Callandreau. — Planète 217. (538).

Chapelas. — Étoiles filantes observées les 9, 10 et 11 août 1880. (417).

Chase. — Planète intérieure à l'orbite de Mercure. (78).

Chase. — Position des principales planètes. (235).

Coggia. — Planète 217. (443).

Conche. — Photographie du spectre solaire. (192).

Cruls. — Investigations spectroscopiques de quelques étoiles qui n'ont pas encore été étudiées. (462).

Cruls. — Mouvement orbital probable de quelques systèmes binaires du ciel austral. (462).

Daubrée. — Chute de deux météorites. (348).

Denning. — Pluies météoriques. (186).

Draper. — Photographie de la nébuleuse d'Orion. (517).

Draper. — La lumière de Jupiter. (531).

Du Treux. — Bolide observé à Amiens le 2 novembre. (541).

Escriche y Mieg. — Nouveau sélénurium, appareil terro-lunaire. (545).

Faye. — L'hypothèse de Laplace. (209).

Faye. — Origine du système solaire. (268).

Fievez. — Intensité des rayons de H et de N et application à la constitution des nébuleuses. (559).

Gaillot. — Sur les Tables du mouvement de Saturne. (558).

Gaussin. — Lois relatives à la distribution des astres du système solaire. (163-184).

Gouy. — Mesure de l'intensité des rayons d'absorption et des rayons obscurs du spectre solaire. (45).

Hennessy. — Figure de la planète Mars. (321).

Huggins. — Spectres photographiques des étoiles. (75-559).

Janssen. — Visibilité directe du réseau (?) photosphérique du Soleil. (50).

Janssen. — Taches du Soleil. (104).

Janssen. — Photographie de la chromosphère. (348).

Konkoly. — Observations spectroscopiques des étoiles filantes. (17).

Tempel. — La comète Faye. (496).

Thollon. — Tache du Soleil le 3 janvier. (76).

Thollon. — Taches et protubérances solaires. (134).

Thollon. — Observations sur un groupe de rayons du spectre. (416).

Thollon. — Protubérance solaire. (441).

Thollon. — Phénomènes solaires observés à Nice le 28 mai. (462).

Thompson. — La grande météorite de Iowa. (236).

Tisserand. — Satellites de Mars : *Phobos* et *Deimos*. (23).

Tisserand. — Éléments de l'orbite des astéroïdes. (376).

Turner. — Occultation de l'étoile 64 du Verseau par Jupiter. (137).

Werebrusoff. — Inégalités séculaires du grand axe dans le mouvement des planètes. (564).

Wolf. — Statistique des taches solaires durant l'année 1879. (122).

Young. — Variation des jours terrestres. (120).

Z..... — Les comètes dans le moyen âge. (28, 51, 147).

Aristide Marre.

FORHANDLINGER i Videnskabs-Selskabet i Christiania (1).

Année 1879.

Les Mémoires de cette année ne contiennent aucun article mathématique développé, mais seulement de courtes Communications de MM. Bjerknes et Lie.

Les intéressantes Communications de M. Bjerknes se rapportent aux forces de pression produites par le mouvement de sphères dans un fluide incompressible,

(1) Voir *Bulletin*, III_2, 166.

forces qui, dans certains cas, présentent une remarquable analogie avec les forces naturelles magnétiques et électriques. Toutefois les forces de pression dont il est question agissent toujours dans une direction opposée à celles des forces de la nature. En conséquence, les efforts faits depuis de longues années par M. Bjerknes, pour expliquer les forces de la nature par des pressions hydrodynamiques, sont restés jusqu'à présent sans résultat. Les résultats mathématiques trouvés par M. Bjerknes ont été vérifiés expérimentalement de la manière la plus frappante au moyen de quelques appareils construits par Schjötz et Svendsen.

Il serait à désirer que les recherches étendues de M. Bjerknes, qui, aux yeux de l'auteur de cet article, sont d'une valeur *mathématique* incontestable, ne tardassent pas à être communiquées *in extenso* au public mathématique.

Les Communications de M. Lie concernent les surfaces dont les courbes géodésiques permettent une infinité de transformations, les surfaces minima et les surfaces de courbure constante. Elles ont été développées, depuis, dans le Recueil norvégien *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*

Année 1880.

Lie (*S.*) Résumé d'une théorie d'intégration. (1-4.)

Il existe une dépendance générale entre la théorie de l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre, à *une seule* fonction inconnue, et la théorie de l'intégration des équations simultanées aux différentielles partielles d'ordre supérieur, traitées par M. Darboux, qui ont une intégrale commune contenant une ou plusieurs fonctions arbitraires.

Exemple I. — Soient données deux équations du second ordre,

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad \Phi = 0,$$

possédant une intégrale générale avec une fonction arbitraire. Posons

$$\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial p} r + \frac{\partial U}{\partial q} s = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial p} s + \frac{\partial U}{\partial q} t = 0,$$

et formons, par l'élimination de r, s, t, une équation de la forme

$$\Omega\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial p}, \frac{\partial U}{\partial q}\right) = 0.$$

L'intégration du système $F = 0$, $\Phi = 0$ se réduit à l'intégration de $\Omega = 0$.

Exemple II. — Soient données *trois* équations,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

entre

$$x, y, z, z_1, p, p_1, q, q_1,$$

et admettons l'existence d'une intégrale générale avec une fonction arbitraire.

Posons

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} p + \frac{\partial U}{\partial z_1} p_1 = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q + \frac{\partial U}{\partial z_1} q_1 = 0,$$

et formons, par l'élimination de p, p_1, q, q_1, une relation de la forme

$$\Omega\left(x, y, z, z_1, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z_1}\right) = 0.$$

L'intégration du système $f_k = 0$ se ramène à celle de $\Omega = 0$.

D'une manière analogue, l'intégration d'un système composé d'un nombre suffisant d'équations aux différentielles partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre avec m variables indépendantes se ramène à l'intégration d'un système d'équations du premier ordre à une seule fonction inconnue. Cette dépendance remarquable ressort de la manière la plus frappante, lorsqu'on prend pour base la généralisation, due à l'auteur, de la notion de solution complète d'un système d'équations aux différentielles partielles du premier ordre.

Le reste du Volume ne contient plus d'articles mathématiques, si ce n'est de courtes Communications de M. Lie sur les surfaces de courbure constante, et de M. Bjerknes sur les analogies hydrodynamiques avec les actions magnétiques et électriques, ainsi qu'une brève discussion entre MM. Bjerknes et Lie au sujet de la convenance des dénominations de *Hydromagnétisme* et de *Hydro-électricité,* introduites par M. Bjerknes.

S. L.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 2e série.

Tome XX; 1881, 1er semestre.

Henry (*C.*). — Sur le calcul des dérangements. (5-9).

Solution de ce problème, proposé par M. J. Bertrand : « Combien y a-t-il en tout de dérangements dans le Tableau des permutations des n premiers nombres ? »

Lucas (*É.*). — Sur la déformation du cache-pot. (9-11).

Considérations intéressantes sur les hyperboloïdes homofocaux à une nappe.

Kœnigs (*G.*). — Construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe. (11-12).

Cette construction s'appuie sur la longueur du rayon de courbure en un point d'une parabole.

(¹) Voir *Bulletin,* IV_1, 260.

Lebrun (*L.*). — Solution géométrique d'une question proposée en 1879 au Concours d'agrégation pour l'enseignement secondaire spécial. (12-13).

Perspective d'une hélice sur un tableau perpendiculaire à l'axe, le point de vue étant sur l'axe.

Hilaire (*A.*). — Solution d'une question proposée en 1876 au Concours entre les classes de Mathématiques spéciales de l'Académie de Douai. (14-17).

Sur les normales abaissées d'un point mobile à une ellipse.

Michaux (*C.*). — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours général de 1878. (17-20).

Sur des surfaces de révolution du second degré passant par six sommets d'un ellipsoïde fixe.

Griess (*J.*). — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours général de 1879. (20-27).

Lieu relatif à l'intersection d'un hyperboloïde et d'un cylindre de révolution.

Griess (*J.*). — Solution de la question proposée en 1879, pour l'admission à l'École Normale supérieure (27-35).

Propriétés d'un ellipsoïde admettant pour diamètres conjugués les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées deux à deux d'un tétraèdre.

Fauquembergue (*E.*). — Solution d'une question de licence : Faculté de Paris, 1875. (35-38).

Courbe telle que son rayon de courbure soit dans un rapport donné avec celui d'une des transformées par rayons vecteurs réciproques.

Laurent (*H.*). — Réduction de deux polynômes homogènes du second degré à des sommes de carrés. (38-48).

Intéressante étude, se rattachant à la théorie des substitutions linéaires et donnant lieu à des interprétations géométriques dignes de remarques parmi lesquelles nous nous contenterons de citer ces deux résultats :

Deux surfaces du second ordre qui ont un double contact ont une infinité de tétraèdres autopolaires communs ;

Deux surfaces circonscrites n'ont pas de tétraèdres autopolaires communs.

Cette étude se divise comme il suit : Considérations générales ; — démonstration d'un lemme ; — discussion des résultats ; — interprétation géométrique.

Questions proposées : 1356, 1357. (48).

Candèze (*G.*). — Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation. (49-53).

L'objet de l'article est de donner une limite qui fasse intervenir le rang du terme négatif dont le coefficient est le plus grand en valeur absolue; c'est ce que ne font pas les règles de Maclaurin et de Lagrange.

Hunyady (*E.*). — Sur la détermination du cercle osculateur d'une courbe à double courbure. (53-55).

Emploi, dans le calcul, des déterminants.

Fauquembergue (*E.*). — Solution d'une question de licence : Faculté de Lille, novembre 1878. (55-57).

Lignes tracées sur une surface de révolution, et telles que le plan osculateur en chaque point comprenne la normale à la surface.

Barbarin (*P.*). — Solution d'une question d'Analyse proposée au Concours d'agrégation de 1878. (57-65).

Problème relatif à l'ellipsoïde. L'auteur, après l'avoir résolu par le calcul, en donne une solution géométrique fort simple.

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée en 1879 pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique. (65-73).

Sur une conique à centre.

Weill. — Théorèmes sur les normales à l'ellipse. (73-94, 110-112).

L'auteur démontre quatorze propositions relatives à l'ellipse ou à l'ellipsoïde. Plusieurs d'entre elles se rattachent à ses précédents travaux, fort intéressants, sur les triangles à la fois inscrits et circonscrits à deux coniques.

Correspondance. — M. E. Amigues : « A propos d'une méthode de transformation des figures, due à M. de Longchamps. » (94-95).

Publications récentes. — 1. Traité de Géométrie supérieure, par M. Chasles; 2e édition, Paris, 1880. — 2. Leçons sur la Géométrie, par M. A. Clebsch, traduites par A. Benoist; t. II, *Courbes algébriques en général et courbes du troisième ordre;* Paris, 1880. — 3. Éléments de calcul approximatif, par Ch. Ruchonnet; 3e édition; Paris, 1880. — 4. Exposition géométrique des propriétés générales des courbes, par Ch. Ruchonnet; 4e édition; Paris, 1880. — 5. Études géométriques et cinématiques; Note sur quelques questions de Géométrie et de Cinématique, et réponse aux réclamations de M. l'abbé Aoust, par E.-J. Habich; Lima, 1880. — 6. American Journal of Mathematics; editor in chief J.-J. Sylvester; Vol. III, n° 2; Cambridge, 1880. — 7. Atti della R. Accademia dei Lincei, 1880-1881; Transunti, vol. V, fascicoli 1°, 2°, 3°; Roma, 1881. (95-96).

QUESTION PROPOSÉE : 1355. (96).

Biehler (*Ch.*). — Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. (97-110).

Suite de l'article antérieurement publié dans le même Recueil (voir *Bulletin* IV$_2$, 265); on y trouvera une discussion complète des diverses singularités possibles, fondée sur l'emploi uniforme de la méthode imaginée par l'auteur.

Picart (*A.*). — Surfaces applicables sur des surfaces de révolution. (113-120).

L'auteur reprend la question consistant dans la recherche des surfaces qu'on peut décomposer en carrés infiniment petits, par des lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales. M. Haton de la Goupillière a démontré en 1867 que les seules surfaces jouissant de cette propriété sont les surfaces applicables sur des surfaces de révolution. C'est ce qui est de nouveau démontré dans le présent article, au moyen des principes les plus simples de la Géométrie des surfaces. Comme application, M. Picart recherche ensuite quelle est la surface de révolution sur laquelle peut s'appliquer la surface de la vis à filet carré.

Griess (*J.*). — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Normale en 1880. (120-127).

Problème relatif au paraboloïde hyperbolique.

Lez (*H.*). — Solution de la question proposée pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1880. (127-131).

Propriétés d'un système d'hyperboles équilatères.

Cretin. — Sur l'équation de Hesse aux points d'inflexion. (131-132).

Application des identités d'Euler sur les fonctions homogènes.

Collin (*J.*). — Sur le théorème de Rolle. (132-133).

Démonstration s'appliquant exclusivement aux équations algébriques.

Lebon (*E.*). — Normale menée à une conique à centre d'un point de l'axe focal. (133-134).

Propriété de la perpendiculaire à l'axe, menée par le pied de la normale.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880. — Mathématiques spéciales, Philosophie, Mathématiques élémentaires, Rhétorique, Seconde, Troisième. Énoncés des compositions. (134-137).

Nécrologie. — Notice sommaire sur Giusto Bellavitis. (1803-1880), par *un abonné*. (137-139).

Correspondance. — Général Parmentier : « Sur l'origine du mot *algèbre*. » — D. Marchand : « Sur la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers. » — H. Faure : « Sur un théorème de M. Weill, relatif à un polygone inscrit et circonscrit à deux circonférences. » — P. Mansion : « Sur un théorème que M. Weill lui attribue par erreur. » — M. Rocchetti : Sur les questions 1340 et 1353. (139-143).

Questions proposées : 1359 à 1361. (144).

Picart (*A.*). — Nouvelle méthode d'intégration de l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde. (145-149).

L'auteur essaye d'intégrer directement l'équation, sans passer par le détour d'une différentiation dont l'objet est d'éliminer les constantes.

Moret-Blanc. — Questions d'Analyse indéterminée proposées par M. Édouard Lucas. (150-160).

Solutions entières des équations suivantes :

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=z^2,$$

$$x^4-5x^2y^2+5y^4=z^2,\quad p^4+2p^3q+2p^2q^2-2pq^3+q^4=r^2,$$

$$p^4+p^3q+2p^2q^2-pq^3+q^4=r^2,\quad pq(p^2-q^2)+2(p^2+q^2)^2=r^2.$$

Weill. — Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal. (160-171).

Démonstration de vingt et un théorèmes sur les courbes du quatrième et du troisième degré.

Fauquembergue (*E.*). — Sur une question de licence. (171-173).

Cet article se rapporte à un passage de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (novembre 1880) concernant un énoncé publié par les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XX, p. 35).

Correspondance. — M. Desboves : « Au sujet des questions 1296 et 1324. (173-175).

Genese (*R.-W.*). — Solution de la question 1275. (175-177).

Théorème sur la Géométrie de la droite et du plan.

Realis (*S.*). — Solution de la question 1313. (177-178).

p étant la somme de n cubes entiers, faire que $p^2 q$ soit la somme algébrique de n cubes entiers.

Leinekugel (*A.*). — Solution de la question 1342. (178).

Propriété de deux normales menées d'un point à un paraboloïde.

Laudiero (*F.*). — Solution de la question 1344. (179).

Propriété de deux coniques.

Boudènes (*J.*). — Solution de la question 1348. (180-182).

Problème relatif à la parabole.

Delacourcelle (*J.-B.*). — Solution de la question 1353. (182-184).

Propriété du triangle.

Pecquery (*E.*) et *Chrétien* (*E.*). — Solution de la question 1356. (184-185).

Il y a trois cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points.

Publications récentes. — 1. Leçons de Statique graphique, par A. Favaro, traduites par P. Terrier; Ire Partie : *Géométrie de position;* Paris, 1879. — 2. Cours de Calcul différentiel et intégral, par J.-A. Serret; 2e édition, 2 volumes; Paris, 1880. — 3. Traité d'Algèbre, par H. Laurent; 3e édition, 3 volumes; Paris, 1881. — 4. Introduction à la méthode des quaternions, par C.-A. Laisant; Paris, 1881. — 5. Annuaire pour l'an 1881, publié par le Bureau des Longitudes; Paris, 1881. — 6. Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour l'an 1881; Paris, 1881. — 7. Éléments d'Arithmétique, par J.-B.-V. Reynaud; Paris, 1879. — 8. Éléments de Géométrie, par A. Amiot; Paris, 1881. — 9. Traité de Géométrie descriptive, par E. Lebon; 1er volume et supplément; Paris, 1880 et 1881. — 10. Notions de Trigonométrie; Tours, 1879. — 11. Tirages à part; annonce de cinquante-huit brochures étrangères ou françaises, extraites pour la plupart de divers Recueils. (185-192).

Questions proposées : 1362 et 1363. (192).

Candèze. — Remarques sur le théorème de Sturm. (193-196).

Propriétés intéressantes de certaines fractions continues obtenues par les fonctions de Sturm.

D'Ocagne (*M.*). — Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes. (197-200).

Note de Géométrie infinitésimale; on en déduit, comme cas particuliers, les théorèmes de Joachimsthal et certaines propositions sur les ovales de Descartes et les lemniscates.

D'Ocagne (*M.*). — Remarque sur le centre de composition d'un système de forces quelconques dans le plan. (201).

Addition à la Note : « Sur la composition des forces dans le plan. » Voir même Recueil, 2e série, t. XIX, p. 115 (mars 1880).

Moret-Blanc. — Questions d'Analyse indéterminée proposées par M. Édouard Lucas. (201-213).

Ces questions portent principalement sur l'Analyse indéterminée des troisième, quatrième et cinquième degrés. Parmi les plus simples d'entre elles, nous citerons les suivantes :

L'équation biquadratique $x^4 - 5y^4 = 1$ a pour unique solution entière $x = 3$, $y = 2$; l'équation $(x+1)^3 - x^3 = z^4$ est impossible en nombres entiers; trouver toutes les valeurs de x telles que la somme des cinquièmes puissances des x premiers nombres soit un carré parfait.

Henry (*C.*). — Sur un procédé particulier de division rapide. (213-215).

Cette Note est fondée sur des développements dignes de remarque, sous forme décimale, de fractions dont les dénominateurs se terminent par 9. Voir sur ce sujet un Mémoire de Cauchy (*Comptes rendus*, t. XI, p. 853; 1841).

Picart (*A.*). — Condition d'équilibre d'une masse fluide homogène ayant la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, et animée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'un de ces axes. (216-220).

L'auteur se propose d'établir par une voie plus élémentaire les équations de conditions découvertes par Jacobi et démontrées par M. Liouville (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIIIe cahier).

Scholtz (Dr *A.*). — Résolution de l'équation du troisième degré. (220-224).

Emploi — un peu exagéré peut être pour une question de cette nature — des émanants, covariants, jacobiens, hessiens, discriminants d'une forme cubique.

Briot (*F.*). — Résolution de l'équation du quatrième degré. (225-227).

Calcul ingénieux, mais qui ne nous semble pas constituer une simplification des méthodes connues.

Escary. — Sur la résolution d'un système particulier de deux équations simultanées du degré m à deux inconnues. (227-229).

Solution très élégante du système $ax^m + by^m = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = c$ par la considération du triangle ayant pour côtés a, b, c, considération employée par M. Lannes, ainsi que le fait remarquer l'auteur du présent article.

Evesque. — Solution d'une question de licence : Faculté de Lille, novembre 1878. (229-231).

Lignes géodésiques d'une surface de révolution.

Fauquembergue (*F.*). — Problème de Mécanique. (231-235).

Équilibre d'une tige rigide pesante appuyée sur deux hémisphères creux. — Ce problème est extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique*.

Boudènes (*J.*). — Solution d'une question proposée au Concours d'admission à l'École Centrale ; première session, 1879. (235-238).

Sur un système d'hyperboles équilatères.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1880. — Enoncés des compositions de Mathématiques et de Géométrie descriptive données à quelques élèves n'ayant pu concourir que tardivement. (238-240).

Correspondance. — M. E. Lebon : Remarque sur un article de lui (même Recueil, 1881, p. 133 ; voir ci-dessus). (240).

Jablonski (*E.*). — Note sur les limites et les nombres incommensurables. (241-250).

L'auteur s'est proposé de reprendre les principes mêmes de la théorie des limites, en généralisant le théorème fondamental, ce qui permet d'éviter des difficultés et des longueurs. Il fait ensuite diverses applications à la longueur d'une circonférence, à la définition d'un radical, et aux opérations sur les nombres incommensurables.

Baehr (*S.-F.-W.*). — Note sur une enveloppe. (250-252).

Enveloppe d'une droite qui joint les extrémités de deux aiguilles d'une montre, supposées de longueurs égales.

Moret-Blanc. — Questions nouvelles d'Arithmétique supérieure proposées par M. Édouard Lucas. (253-265).

Les questions que résout M. Moret-Blanc se rapportent notamment : aux derniers chiffres des termes de la série de Lamé 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,.... ; — à la recherche du plus grand commun diviseur entre deux termes de cette série; — à des séries récurrentes plus générales; — enfin à l'Analyse indéterminée et à la théorie des nombres premiers.

Correspondance. — M. Haillecourt : Au sujet du planimètre polaire. — M. Barbarin : Réponse aux observations de M. Haillecourt. — M. V. Jamet : Démonstration nouvelle de la propriété que présentent les quatre hauteurs d'un tétraèdre, d'être situées sur un même hyperboloïde. — M. Gambey : Sur un mode de description des courbes du second ordre. (265-275).

Hioux (*V.*). — Note relative à la question 1210. (276-279).

Enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe, et qui reste tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second ordre.

Geneix-Martin (*A.*). — Solution de la question 329. (280-281).

Sur une progression géométrique de quatre termes.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1308. (281).

Sur la cinématique du plan.

Aignan (*A.*). — Solution de la question 1357. (282-288).

L'énoncé de la question 1357 est celui-ci : ABC étant un triangle donné, on joint ces sommets à un point O de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments ; trouver le lieu du point O pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est constant.

A. L.

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. Clebsch und C. Neumann, gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer [1]

Tome XV; 1879.

Cantor (*G.*). — Sur les variétés de points infinis linéaires. (1-7).

L'auteur a déjà étudié [2] avec soin le concept des variétés de points infinies linéaires, et il a fait voir que ce concept est essentiel pour la démonstration de la représentation uniforme d'une fonction par une série trigonométrique. Depuis,

---

[1] Voir *Bulletin*, VI_1, 214.
[2] *Mathem. Annalen*, V.

Dini (¹) et Harnack (²) ont développé encore plus loin ce concept, et ont démontré son importance pour les théorèmes fondamentaux du Calcul intégral. Dans le présent Mémoire, l'auteur montre d'abord que les variétés de points se divisent en *deux espèces,* à la première desquelles appartiennent toutes les variétés qui renferment un nombre *fini* de groupes de points dérivés. Ces variétés ne sont, dans aucun intervalle, *denses en tous points.* Par *dérivée* il faut entendre la *variété* de tous les points qui jouissent de la propriété d'un point-limite de P. Dans les multitudes de points de seconde espèce, le nombre des systèmes dérivés est *infini.*

L'auteur discute ensuite la division des variétés en *classes* de même puissance équivalentes. Ces variétés sont celles dont les éléments peuvent se correspondre chacun à chacun uniformément. Dans les multitudes linéaires de points, on peut, avant tout, distinguer deux classes : premièrement, la classe de ceux qui ont même puissance que la suite naturelle des nombres; à cette classe appartiennent toutes les multitudes de première espèce et aussi celles de la seconde, telles, par exemple, que la multitude composée de tous les points d'un intervalle dont les abscisses sont des nombres *rationnels;* en second lieu, la suite continue des points d'un intervalle. On démontre que ces classes ne peuvent pas être mises en correspondance l'une avec l'autre d'une manière uniforme.

Hurwitz (A.). — Sur les problèmes de Géométrie infiniment multiformes, et en particulier sur le problème de la fermeture. (8-15).

Le théorème, consistant en ce qu'une équation algébrique à une inconnue possède une infinité de racines dès qu'elle en admet plus qu'il n'y a d'unités dans son degré, conduit, dans les recherches géométriques sur la correspondance, à ce principe général :

Si entre les éléments d'une variété rationnelle d'une dimension il existe une correspondance (m, n), *et si dans cette correspondance on peut signaler plus de* $m+n$ *coïncidences, la correspondance aura une infinité d'éléments de cette nature, et ainsi chaque élément sera un élément de coïncidence.*

A l'aide de ce principe, l'auteur démontre, de la manière la plus simple, les théorèmes connus de Steiner et de Poncelet sur les séries fermées de courbes tangentes, ainsi que d'autres théorèmes analogues à ceux-là.

Halphen. — Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. (16-38; fr.).

Aperçu des résultats que l'auteur a développés dans un Mémoire publié dans le *Journal de l'École Polytechnique,* 45ᵉ Cahier.

Bäcklund. — Sur la théorie des équations aux différentielles partielles du second ordre. (39-85).

Suite des recherches publiées par l'auteur, dans les *Mathem. Annalen,* t. XI

(¹) *Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa, 1878.
(²) *Elemente der Differential- und Integralrechnung.* Leipzig, 1881.

et XIII, sur les équations aux différentielles partielles d'ordre supérieur qui possèdent deux ou plusieurs séries d'intégrales premières.

§ 1. Sur les systèmes d'équations aux différentielles partielles de l'espace de trois dimensions. — § 2. Sur les équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre qui restent invariables après une transformation de contact infinitésimale. — § 3. Sur les relations qui peuvent avoir lieu entre les équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre de l'espace de quatre dimensions. — § 4. Des équations aux différentielles partielles d'ordres supérieurs de l'espace de quatre dimensions. — § 5. Sur l'extension à l'espace de $n+1$ dimensions.

Klein (*F.*). — Sur les équations du multiplicateur ([1]). (86-88).

Si l'on désigne par g_2, g_3, Δ les invariants de l'intégrale elliptique donnée; par g'_2, g'_3, Δ' les invariants de l'intégrale transformée, on fait voir que, déjà pour $\sqrt[n]{\Delta'}$, dans une transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre (n étant premier et >3), on obtient des équations du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficients sont des fonctions entières de g_2, g_3, $\sqrt[n]{\Delta}$. Pour le calcul des coefficients de cette équation, l'auteur développe des règles générales. Pour $n = 5, 7, 13$, on obtient les mêmes équations que l'auteur avait indiquées précédemment ([2]). Pour $n = 11$, l'équation

$$\begin{aligned} z^{12} - 90.11.\sqrt[2]{\Delta}.z^6 + 40.11.12g_2.\sqrt[3]{\Delta}.z^4 - 15.11.216g_3\sqrt[4]{\Delta}.z^3 \\ + 2.11.(12g_2)^2\sqrt[6]{\Delta}.z^2 - 12g_2.216g_3.\sqrt[12]{\Delta}.z - 11 = 0, \end{aligned}$$

$\left(\text{pour } z = \sqrt[12]{\Delta'}\right)$ s'accorde avec certaines indications que M. Brioschi a déduites par une autre voie relativement à la forme de ces équations ([3]).

Noether (*M.*). — Sur les équations du huitième degré et leur rôle dans la théorie des courbes du quatrième degré. (89-110).

Dans ce Mémoire, l'auteur étudie d'abord certains systèmes de coniques qui se rencontrent dans l'étude des courbes du quatrième ordre, mais dont on ne s'était pas occupé jusqu'ici. On peut, en effet, partager les 28 tangentes doubles en sept groupes de quatre, de telle sorte que par les points de contact de chaque groupe de quatre passe une conique, ce qui fournit pour chaque décomposition un système correspondant de sept coniques. Maintenant, de ces systèmes septuples, 24.315 sont impropres, parce que dans ces systèmes *chacune* des coniques joue un rôle distinct; mais, outre cela, il existe 135 systèmes propres.

Pour traiter complètement les relations de ces derniers systèmes entre eux et avec les autres systèmes, il faut développer deux théories différentes, que l'auteur expose plus en détail qu'il ne serait immédiatement nécessaire, et cela en vue de les rendre susceptibles d'applications plus générales. Le mode habituel de notation des tangentes doubles, au moyen des couples de huit quantités, tels que ceux qu'emploient Hesse, Aronhold et Cayley, distingue ici un des 36 groupes de courbes de contact du troisième ordre des autres groupes. Cette notation a dû

([1]) *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, 2 janvier 1879.

([2]) *Math. Annalen*, t. XIV, p. 147 et suivantes.

([3]) *Annali di Matematica*, 2e série, t. IX, p. 172.

par conséquent être modifiée de façon qu'elle puisse s'employer commodément pour tous les passages à des systèmes quelconques.

De plus, la distinction de l'un des 36 groupes a pour conséquence que l'équation aux tangentes doubles se réduit à une surface du huitième degré, pour laquelle le système de coniques, si l'on en adjoint un, fournit une résolvante importante, savoir, une équation du septième degré dont les racines se rangent en groupes de trois. L'équation modulaire du huitième degré, qui correspond à la transformation du septième degré des fonctions elliptiques, et qui a été étudiée par Galois, Betti, Kronecker, Hermite, possède une résolvante du septième degré, avec un groupe de 168 substitutions. Mais la propriété la plus essentielle de cette équation spéciale, propriété qui n'a pas encore été énoncée, consiste encore dans le rangement dont nous venons de parler des racines en sept groupes de trois. De plus, Mathieu a traité les équations du huitième degré dont les racines sont rangées en couples de groupes de quatre; ces équations aussi possèdent la résolvante du septième degré, avec la propriété des groupes ternaires. Ces relations n'ayant pas encore été éclaircies, l'auteur les développe complètement. Il remarque à ce propos que les équations générales du septième degré, douées de la propriété de présenter des groupes ternaires, sont les mêmes que celles qui, d'après les nouvelles communications de F. Klein, peuvent se résoudre par les fonctions elliptiques ([1]).

Hahn (*J.*). — Recherches sur les réseaux de coniques dont la forme jacobienne et la forme hermitienne s'évanouissent identiquement. (111-121).

Soient $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ les équations, représentées symboliquement, de trois coniques; leur forme jacobienne sera

$$a_x b_x c_x (abc),$$

et leur forme hermitienne

$$(abu)(bcu)(cau).$$

L'objet du présent travail est de répondre à la question de savoir de quelle espèce sont les réseaux de coniques dont la forme, soit jacobienne, soit hermitienne, s'évanouit identiquement. L'auteur parvient aux résultats suivants :

1. Si la forme jacobienne seule s'évanouit identiquement, alors toutes les coniques du faisceau se décomposent en deux droites passant par un même point. La forme hermitienne est alors égale au cube d'une forme linéaire qui, égalée à zéro, représente l'équation du point double commun à toutes les coniques.

2. Si la forme hermitienne seule s'évanouit identiquement, alors toutes les coniques du réseau sont réductibles, et ont une droite commune dont le cube est représenté par la forme jacobienne.

3. Dans le cas seulement où les formes jacobienne et hermitienne s'évanouissent à la fois, le réseau de coniques se réduit à un faisceau.

Stolz (*O.*). — La multiplicité des points d'intersection de deux courbes algébriques. (122-160).

La multiplicité de tous les points d'intersection de deux courbes algébriques, d'ordres m et n, $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$, laquelle reste invariable par rapport

([1]) *Repertorium der Mathem. von Königsberger u. Zeuner*, t. II, p. 347.

aux transformations linéaires, est déterminée par l'*ordre* de la résolvante dont Clebsch a fait connaître la formation. Le même *ordre* fournit le produit des équations de tous les points d'intersection, chacun avec leur multiplicité respective. L'auteur, en se posant le problème d'obtenir immédiatement la multiplicité d'un point d'intersection (x_0, y_0) situé à distance finie, c'est-à-dire de l'obtenir sans le secours des transformations, au moyen des équations $F = 0$, $G = 0$, parvient à ce théorème : *Si l'on forme toutes les racines y_r de l'équation* $F = 0$ *qui, pour* $\lim x = x_0$, *se changent en y_0, et de même toutes les racines y'_s de l'équation* $G = 0$ *jouissant de la même propriété, et si l'on développe le produit $\prod\limits_{r,s}(y_r - y_s)$ suivant les puissances ascendantes (entières) de $x - x_0$, l'exposant du premier terme de cette série indiquera le degré de multiplicité du point (x_0, y_0)*. La démonstration de ce théorème s'obtient en étudiant la résultante des points d'intersection à distance finie, au point de vue de la multiplicité de ses facteurs, et l'on peut effectuer aussi directement le développement en série du produit. Cette recherche fournit l'occasion d'employer *les nombres caractéristiques* introduits par M. Halphen ([1]).

Au moyen de la résultante $X = \prod\limits_{r,s}(y_r - y'_s)$ et de la résultante analogue $\prod\limits_{r,s}(x_r - x_s)$, on peut encore obtenir, pour la multiplicité totale w de tous les points d'intersection à distance infinie, les relations suivantes. Si F et G sont respectivement des degrés $m - \mu$, $n - \nu$ en x, et des degrés $m - \mu'$, $n - \nu'$ en y, la multiplicité des points d'intersection à l'infini situés sur la droite $X = 0$ sera donnée par l'expression

$$m_2 = \mu'\nu' + \lambda' + \delta',$$

où $\varepsilon + \lambda' = q'$ est le degré en x de la résultante X, ε la multiplicité totale des points d'intersection à distance finie; la quantité δ', qui est un nombre positif, est prise parmi les exposants du développement en série à la place considérée. On détermine de même le nombre analogue $m_1 = \mu\nu + \lambda + \delta$. Les nombres δ (et pareillement δ') s'évanouissent dans le cas, et dans ce cas seulement, où parmi les facteurs des plus hautes puissances de x dans F et G, le premier au moins atteint le degré μ, ou le dernier le degré ν en y. Si ω_1 est la multiplicité totale des points à l'infini, non situés sur $x = 0$ ni sur $y = 0$, on a alors

$$\omega = \omega_1 + m_1 + m_2 = \mu\nu + \mu'\nu' + \lambda + \lambda' + \delta + \delta' + \omega_1.$$

On a donc

$$\varepsilon = mn - \omega = (mn - \mu\nu - \mu'\nu') - \lambda - \lambda' - \delta - \delta' - \omega_1$$

Le nombre ε des intersections à distances finies peut ainsi être au plus égal à

$$(mn - \mu\nu - \mu'\nu') - \lambda - \lambda' - \omega_1.$$

L'auteur démontre alors les nombres de multiplicité relatifs aux équations incomplètes, et en même temps il rectifie d'une part, et généralise de l'autre les relations données par Bézout (*Théorie générale des équations algébriques*, 1779, p. 139).

([1]) *Journal de Liouville*, 3e série, t. II, p. 89.

König (*J.*). — La décomposition en facteurs des fonctions entières, et les problèmes d'élimination qui s'y rattachent. (161-173).

Dans l'Introduction à ce Mémoire, l'auteur dit : « Les considérations que Gauss a employées dans la deuxième démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre se composent de deux séries de conclusions essentiellement différentes quant à leur contenu. La première de ces séries peut être caractérisée comme une application du principe de l'élimination, que Gauss, comme il ressort de ce Mémoire, a bien connu et appliqué, mais n'a jamais énoncé généralement.

» A la suite de cela, on rencontre une idée ayant jusqu'à un certain point une existence indépendante, idée qui fournit à elle seule une méthode de résolution des équations algébriques et qui consiste à considérer l'équation $f(x) = 0$ comme coexistant avec l'équation $F(x, u) = 0$. Si l'on choisit maintenant convenablement la forme de F, de telle sorte que l'équation résultante en u puisse être résolue, alors l'équation primitive se trouve ainsi décomposée en facteurs, et partant résolue.

» Dans la démonstration donnée par Gordan, dans le t. X des *Annalen,* du principe fondamental de l'Algèbre, la simplification essentielle consiste précisément dans le choix convenable de $F(x, u)$, de telle sorte que le degré et toutes les autres propriétés de l'équation en u puissent être aperçus presque immédiatement, et l'on obtient par là une démonstration algébrique du théorème en question, d'une clarté et d'une brièveté qu'il serait difficile de dépasser.

» Malgré cela, il n'est peut-être pas sans intérêt de nous livrer ici à une étude sur l'autre idée fondamentale du Mémoire de Gauss. Là il est encore fait usage du principe de l'élimination en question, pour discuter complètement l'équation en u, plus compliquée par suite du choix de l'équation $F(x, u) = 0$. Or ce principe, considéré en général, contient la solution complète du problème de la décomposition en facteurs des fonctions entières, de sorte qu'ainsi la *demonstratio nova altera* fournit les matériaux pour deux démonstrations du principe fondamental complètement indépendantes entre elles, lesquelles sont de nature purement algébrique, l'une trouvant sa place naturelle dans la théorie des courbes, l'autre, au contraire, ayant la sienne dans la partie de l'Algèbre dont l'essence consiste dans l'emploi des méthodes combinatoires. »

Koenigsberger (*L.*). — Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques et hyperelleptiques. (174-205).

Dans le Tome 86 du *Journal de Borchardt,* l'auteur a traité la question de savoir si l'on peut d'avance indiquer les propriétés caractéristiques des intégrales elliptiques auxquelles peuvent se réduire certaines intégrales abéliennes de la forme

$$\int f[x, \sqrt[m]{R(x)}]\, dx,$$

où f désigne une fonction rationnelle et R une fonction entière de x. Un des résultats trouvés dans ce Mémoire est énoncé, dans le présent travail, de la manière suivante :

Les intégrales de la forme

$$\int \psi(x)[\sqrt[m]{R(x)}]^r\, dx,$$

dans lesquelles r et n sont premiers entre eux, fournissent, comme seules formules possibles de réduction aux intégrales elliptiques, les formules

$$\int \psi(x)[\sqrt[3]{\mathrm{R}(x)}]^r\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}},$$

$$\int \psi(x)[\sqrt[4]{\mathrm{R}(x)}]^r\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}},$$

$$\int \psi(x)[\sqrt[6]{\mathrm{R}(x)}]^r\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}},$$

dont la dernière, à cause de la transformabilité de l'intégrale elliptique du second membre, se confond avec la première.

L'auteur fait voir maintenant que les mêmes théorèmes absolument subsistent lorsqu'il s'agit en général de la réduction de formes semblables d'intégrales pour des équations algébriquement résolubles, c'est-à-dire d'intégrales de la forme

$$\int \mathrm{Q}_\rho p^{\frac{\rho}{n}}\,dx,$$

Q_ρ et p étant des fonctions algébriques d'un ordre déterminé, et que l'on pose alors la question de savoir comment on peut représenter effectivement toutes les intégrales réductibles à la forme indiquée. On trouve d'abord, en supposant, pour plus de simplicité, dans la transcription des résultats, que Q_ρ et p désignent toujours des fonctions rationnelles, que si les deux fonctions $f(x)$ et $\mathrm{R}(x)$ sont déterminées de manière que

$$\left[1-\overline{f(x)}^2\,\mathrm{R}(x)\right]\left[1-k^2\overline{f(x)}^2\,\mathrm{R}(x)\right] = \overline{\mathrm{F}(x)}^2$$

soit une fonction rationnelle n'ayant que des facteurs doubles, *toutes* les intégrales hyperelliptiques de première espèce réductibles chacune à une seule intégrale elliptique s'obtiendront sous la forme

$$\int \frac{\frac{1}{2}f(x)\mathrm{R}'(x)+f'(x)\mathrm{R}(x)}{\mathrm{R}(x)\mathrm{F}(x)}\sqrt{\mathrm{R}(x)}\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$
$$\left[z=f(x)\sqrt{\mathrm{R}(x)}\right].$$

En ayant égard à la multiplication complexe des intégrales elliptiques, dont il s'agit, et en s'appuyant sur le théorème d'Abel, on trouve, de plus, si $f(x)$ et $\mathrm{R}(x)$ sont choisis de telle manière que l'expression

$$\overline{f(x)}^3\,\overline{\mathrm{R}(x)}^2 - 1 = \overline{\mathrm{F}(x)}^2$$

ne renferme que des facteurs doubles, qu'alors toutes les intégrales abéliennes de la forme demandée qui sont réductibles aux intégrales elliptiques seront contenues dans l'expression

$$\int \frac{\frac{\rho}{3}f(x)\mathrm{R}'(x)+f'(x)\mathrm{R}(x)}{\mathrm{R}(x)\sqrt{\overline{f(x)}^4\,\mathrm{R}(x)^\rho-1}}[\sqrt[3]{\mathrm{R}(x)}]^\rho\,dx.$$

Par la substitution $z=f(x)[\sqrt[3]{\mathrm{R}(x)}]^\rho$, elles seront ramenées à l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}.$$

Pour la formule de réduction

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[6]{\mathrm{R}(x)}\right]^{\rho} dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}},$$

il n'y a rien de changé, si ce n'est que $f(x)$ et $\mathrm{R}(x)$ doivent être déterminés de telle façon que

$$f(x)\left[\overline{f(x)}^3\,\overline{\mathrm{R}(x)}^3 - 1\right]$$

soit un carré parfait.

Enfin, par une application répétée du théorème d'Abel, on conclut que, par la forme reconnue nécessaire de la formule de réduction

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[4]{\mathrm{R}(x)}\right]^{\rho} dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}},$$

on peut obtenir toutes les intégrales réductibles, si l'on pose

$$\psi(x) = \frac{\frac{\rho}{4} f(x)\mathrm{R}'(x) + f'(x)\mathrm{R}(x)}{\mathrm{R}(x)\mathrm{F}(x)},$$

la fonction rationnelle $f(x)$ et la fonction entière $\mathrm{R}(x)$ devant être soumises à la condition que

$$\overline{f(x)}^4\,\mathrm{R}(x)^{\rho} - 1$$

soit le carré d'une fonction rationnelle $\mathrm{F}(x)$.

L'auteur traite encore, de plus, la question de la réduction des intégrales abéliennes contenues dans la forme précédente aux intégrales *hyperelliptiques,* et il caractérise l'équation à laquelle doit satisfaire le multiplicateur complexe des intégrales hyperelliptiques obtenues. Il étudie ensuite l'équation de réduction

$$\begin{aligned}\int \psi(x)\left[\sqrt[2p+1]{\mathrm{R}(x)}\right]^r dx \\ = \int \frac{f(z_1)\,dz_1}{\sqrt{z_1^{2p+2}-1}} + \int \frac{f(z_2)\,dz_2}{\sqrt{z_2^{2p+1}-1}} + \cdots + \int \frac{f(z_p)\,dz_p}{\sqrt{z_p^{2p+1}-1}},\end{aligned}$$

dans laquelle, comme il résulte des théorèmes généraux de la théorie de la transformation des intégrales abéliennes, les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_p$ représentent les solutions de l'équation du $p^{\text{ième}}$ degré

$$z^p + f_1\left\{x, \left[\sqrt[2p+1]{\mathrm{R}(x)}\right]^r\right\} z^{p-1} + \ldots + f_p\left\{x, \left[\sqrt[2p+1]{\mathrm{R}(x)}\right]^r\right\} = 0,$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont des fonctions rationnelles formées avec les quantités qui y sont contenues, et où les irrationnalités contenues dans les quantités z sont déterminées par une expression de la forme

$$\sqrt{z_\rho^{2p+1} - 1} = \mathrm{F}\left\{z_\rho, x, \left[\sqrt[2p+1]{\mathrm{R}(x)}\right]^r\right\}.$$

On peut maintenant, en faisant parcourir à la variable x des contours fermés, ramener l'équation précédente à une autre de la forme

$$(2p+1)\int \psi(x)\left[\sqrt[2p+1]{\mathrm{R}(x)}\right]^r dx = \sum_{0}^{p-1}{}_k \mathrm{A}_k \sum_{0}^{2p}{}_s \alpha^{-s} \sum_{1}^{p}{}_\rho \int \frac{z_{\rho s}^k\, dz_{\rho s}}{\sqrt{z_{\rho s}^{2p+1}-1}},$$

en posant

$$f(z) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 z + \mathrm{A}_2 z_2 + \ldots + \mathrm{A}_{p-1} z^{p-1}.$$

Au moyen de la substitution

$$z_{\rho s} = \alpha^{m_s} t_{\rho s},$$

α étant une des racines $(2p+1)^{\text{ièmes}}$ primitives de l'unité, et m_s satisfaisant à la congruence

$$m_s(k+1) \equiv s \mod (2p+1),$$

une telle somme se ramène à la forme

$$\sum_{0}^{2p}{}_s \sum_{1}^{p}{}_\rho \int \frac{t_{\rho s}^k\, dt_{\rho s}}{\sqrt{t_{\rho s}^{2p+1}-1}},$$

et on la traite d'après le théorème d'Abel, en cherchant à déterminer la forme des coefficients indéterminés du théorème d'Abel. Le résultat s'énonce ainsi : L'équation

$$\sum_{0}^{2p}{}_s \sum_{0}^{p}{}_\rho \int \frac{t_{\rho s}^k\, dt_{\rho s}}{\sqrt{t_{\rho s}^{2p+1}-1}} = \int \frac{z_1^k\, dz_1}{\sqrt{z_1^{2p+1}-1}} + \ldots + \int \frac{z_p^k\, dz_p}{\sqrt{z_p^{2p+2}-1}}$$

est de telle nature que, si l'on pose

$$Z_\rho = \mathrm{W}_\rho y^\lambda,$$

où l'on a

$$y = \left[\sqrt[2p+1]{\mathrm{R}(x)}\right]^r, \quad \text{et} \quad \lambda(k+1) \equiv 1, \quad \text{mod } (2p+1),$$

les quantités

$$\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2, \ldots, \mathrm{W}_p,$$

étant les solutions d'une équation

$$\mathrm{W}^p + \mathfrak{M}_1 \mathrm{W}^{p-1} + \mathfrak{M}_2 \mathrm{W}^{p-2} + \ldots + \mathfrak{M}_{p-1}\mathrm{W} + \mathfrak{M}_p = 0,$$

dont les coefficients sont composés rationnellement en x, tandis que les irrationnalités

$$\sqrt{\mathrm{W}_\rho^{2p+1} y^{\lambda(2p+1)} - 1} = \sqrt{\mathrm{W}_\rho^{2p+1}\, \overline{\mathrm{R}(x)}^{r'} - 1}$$

peuvent se représenter comme des fonctions rationnelles de W_ρ, dont les coefficients sont eux-mêmes composés rationnellement en x. Dans les formules ci-dessus sont contenues toutes les relations que fournissent les transformations de cette espèce.

Ainsi la résolution du problème pour les intégrales hyperelliptiques du premier ordre se trouve complètement achevée. Comment, pour les intégrales hyperelliptiques d'ordre supérieur, faut-il établir les équations de condition? C'est ce que l'auteur a montré dans un travail publié postérieurement (*Journal de Borchardt*, t. 87) ([1]).

Le Paige (C.). — Sur une propriété des formes algébriques préparées. (206-210; fr.).

Démonstration de ce théorème : *Deux substitutions transposées, opérées sur les variables d'une fonction préparée, induisent deux substitutions transposées sur les coefficients.*

Krey (H.). — Sur les tangentes singulières des surfaces algébriques. (211-237).

Au moyen des méthodes de la *Géométrie numérique* (principe de correspondance) développées par M. Schubert, l'auteur détermine une longue série de nombres relatifs aux tangentes singulières des surfaces algébriques. Les surfaces elles-mêmes, dans cette étude, ne sont pas toutes supposées des surfaces *générales* en coordonnées de points, mais peuvent posséder les singularités ordinaires. Dans le système de notations de l'auteur, les résultats les plus importants de son étude peuvent s'énoncer comme il suit :

Soit T^r une droite tangente r-uple qui touche la surface en r points, tandis que T_μ désigne une tangente rencontrant la surface en μ points consécutifs (tangente μ-ponctuelle). L'auteur détermine les nombres suivants :

(T^3), c'est-à-dire l'ordre de la surface réglée formée par les tangentes triples;

(T^4), ou le nombre des tangentes quadruples;

(T_4), ou l'ordre de la surface réglée formée par les tangentes quadriponctuelles;

(T_5), ou le nombre des tangentes quintiponctuelles.

Mais, outre ces nombres, le calcul fournit une série de nombres, correspondant à des conditions mixtes, tels, en particulier, que (T_3T), qui donne l'ordre de la surface réglée formée des tangentes principales qui sont tangentes encore une fois de plus; de même, (T_3T^2), (T_4T), (T_3^2).

Cayley (A.). — Sur la correspondance des homographies et des rotations. (238-240; angl.).

Brioschi (F.). — Sur l'équation modulaire du huitième degré de Jacobi. (241-250).

Klein (F.). — Sur la résolution de certaines équations du septième et du huitième degré. (251-282).

Ce travail forme la continuation des recherches de l'auteur sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques ([2]), et a pour objet de montrer comment la résolution de ces équations du septième et du huitième degré, qui ont le groupe des équations modulaires, peut se ramener à la résolution des équations modulaires elles-mêmes. Les recherches de l'auteur sont en même

---

([1]) *Repertorium der Mathematik von Konigsberger und Zeuner*, t. II.
([2]) *Bulletin*, III_1, 408.

temps un programme pour la manière de traiter *toutes* les équations d'affect quelconque, programme qui comprend à la fois la résolution des équations cycliques par les radicaux, ainsi que la théorie de Kronecker et Brioschi des équations du cinquième degré.

La méthode de résolution des équations du septième degré à 168 substitutions peut s'exprimer comme il suit.

En employant les notations précédemment introduites (¹), on obtient le système des 168 substitutions linéaires ternaires par la répétition et la combinaison des opérations suivantes :

$$(1)\qquad \lambda' = \gamma\lambda, \quad \mu' = \gamma^4\mu, \quad \nu' = \gamma^2\nu, \quad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right),$$

$$(2)\qquad \lambda' = \mu, \quad \mu' = \nu, \quad \nu' = \lambda,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \sqrt{-7}.\lambda' = (\gamma^5-\gamma^2)\lambda + (\gamma^3-\gamma^4)\mu + (\gamma^6-\gamma\ )\nu, \\ \sqrt{-7}.\mu' = (\gamma^3-\gamma^4)\lambda + (\gamma^6-\gamma\ )\mu + (\gamma^5-\gamma^2)\nu, \\ \sqrt{-7}.\nu' = (\gamma^6-\gamma\ )\lambda + (\gamma^5-\gamma^2)\mu + (\gamma^3-\gamma^4)\nu. \end{cases}$$

Ici les quatre fonctions f, ∇, C, K restent invariables, et l'équation modulaire peut être remplacée par le système d'équations

$$f = 0, \quad -\frac{C^3}{1728\,\nabla^7} = J.$$

Soient maintenant $x_0, x_1, \ldots, x_6$ les sept racines d'une équation du septième degré à 168 substitutions. Alors la première chose à faire est de former trois fonctions rationnelles λ, μ, ν des x, qui, dans les 168 permutations des x, éprouvent les substitutions ternaires linéaires indiquées. Ce résultat peut s'obtenir, par les procédés de la théorie des invariants, d'un grand nombre de manières différentes.

Soient, par exemple, X, X', X'' trois fonctions rationnelles quelconques de x, qui, pour $x = x_0, x_1, \ldots, x_6$, prennent les valeurs $X_0, X_1, \ldots, X_6, \ldots$. En désignant toujours par γ une racine septième de l'unité, posons, pour abréger,

$$\Sigma\gamma^\nu X_\nu = p_1, \qquad \Sigma^{4\nu} X_\nu = p_4,$$

$$\frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\Sigma\gamma^{6\nu}X_\nu = p_6, \quad \frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\Sigma\gamma^{3\nu}X_\nu = p_3,$$

$$\Sigma\gamma^{2\nu}X_\nu = p_2, \quad \frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\Sigma\gamma^{5\nu}X_\nu = p_5,$$

et de même $\Sigma\gamma^\nu X'_\nu = p'_1, \ldots$. Enfin, à la place du déterminant

$$\begin{vmatrix} p_i & p_k & p_l \\ p'_i & p'_k & p'_l \\ p''_i & p''_k & p''_l \end{vmatrix},$$

écrivons simplement (i, k, l). Alors il y a trois fonctions jouissant de la propriété

(¹) *Math. Ann.*, t. XIV, p. 444.

cherchée et données par les équations

$$\lambda = (4, 3, 5) + (1, 6, 5) + (4, 2, 6),$$
$$\mu = (2, 5, 6) + (4, 3, 6) + (2, 1, 3),$$
$$\nu = (1, 6, 3) + (2, 5, 3) + (1, 4, 5).$$

Si l'on calcule maintenant, pour ces fonctions λ, μ, ν, les formes f, ∇, C, K, il en résultera des expressions qui ne changeront pas par les 168 permutations des x et qui sont ainsi connues rationnellement. La résolution de l'équation du septième degré en x est ramenée, d'après cela, au *problème des* λ, μ, ν, savoir : des valeurs connues de f, ∇, C, K tirer celles de λ, μ, ν. Maintenant, si l'on considère les rapports des quantités λ, μ, ν, l'équation modulaire, sous la forme indiquée plus haut, est un cas particulier de ce problème. La question est maintenant de ramener le problème général des λ, μ, ν à ce cas particulier. On y parvient à l'aide d'une équation du quatrième degré, qu'il est impossible d'éviter, comme on peut le montrer par les propriétés de la courbe $f = 0$. Soient λ', μ', ν' les inconnues du problème particulier; f', ∇',... les valeurs que prennent f, ∇,... Écrivons les équations suivantes :

$$f' = 0, \quad \lambda'\lambda.\mu'\mu.\nu'\nu = 0, \quad \frac{-C'}{1728\,\nabla'} = J.$$

L'élimination de $\lambda' : \mu' : \nu'$ donne alors pour J une équation du quatrième degré dont les coefficients sont des fonctions entières de f, ∇, C, K, c'est-à-dire, sont des quantités connues, que l'on peut déterminer *a priori*. Il suffit de déterminer *une seule* des racines de l'équation du quatrième degré : soit J_1 cette racine. On a alors l'équation modulaire

$$f' = 0, \quad \frac{-C'^3}{1728\,\nabla'^7} = J_1,$$

et, après l'avoir résolue, on obtiendra les λ, μ, ν du problème primitif, et par suite les x_0, x_1, ..., x_6 de l'équation proposée du septième degré, par des calculs rationnels [1].

Du Bois-Reymond (P.).— Éclaircissements sur les premiers principes du Calcul des variations. (283-314, 564-576).

Le premier Mémoire contient la discussion de la démonstration du théorème que la corde est la ligne la plus courte entre ses extrémités. La notion de la rectificabilité est une restriction nécessaire. Dans la méthode ordinaire de démonstration, au contraire, on se restreint sans nécessité à la considération de fonctions qui sont continues en même temps que leurs dérivées du premier *et du second ordre*. L'auteur montre comment, à l'aide de l'intégration par parties, on peut effectuer la démonstration dans la seule supposition de la continuité de la dérivée première.

Le second Mémoire traite du problème général du Calcul des variations. La méthode de Lagrange, qui exige, pour la détermination du minimum ou du maximum d'une intégrale $V(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$, la continuité des $2n$ premières dérivées, est modifiée de telle façon qu'on n'a plus besoin de la continuité des $n-1$ premières dérivées et de l'intégrabilité de la $n^{\text{ième}}$.

---

(1) *Repert. d. Math. u. Phys.*, Bd. 2, p. 400.

Rohn (*K.*). — Transformation des fonctions hyperelliptiques $p=2$ et son rôle dans la surface de Kummer. (315-354).

Voir *Bulletin*, V_1, 327.

Voss (*A.*). — Sur la théorie des connexes linéaires. (355-358).

Démonstration de ce théorème de Clebsch :

Dans toutes les collinéations dans lesquelles les points correspondant à cinq points donnés sont situés sur cinq droites données, il existe toujours un sixième point dont les points correspondants sont tous situés sur une droite, et ce sixième point et cette droite peuvent se construire linéairement, au moyen de ce théorème général :

Dans une série (Schaar) *linéaire de connexes linéaires quadruplement infinie, il se trouve six connexes spéciaux.*

Halphen (*G.-H.*). — Recherches sur les courbes planes du troisième degré. (359-379; fr.).

Désignons par la notation x_m des points en chacun desquels il existe des courbes du degré m, ayant avec la cubique des contacts de l'ordre $3m-1$. Quand on emploie la représentation des courbes cubiques par les fonctions elliptiques, les points x_m sont ceux dont les arguments, multipliés par $3m$, reproduisent les périodes, si l'on a choisi l'argument de telle sorte qu'il soit nul pour un point d'inflexion.

Le covariant qui s'évanouit en chacun d'eux est un combinant pour le faisceau des cubiques qui ont neuf points d'inflexion communs.

Le lieu des points x pour le faisceau des cubiques se compose de 9 courbes distinctes quand m n'est pas divisible par 3; de 8 courbes distinctes quand m est un multiple de 3.

Si $m=3^\alpha$, chacune des 8 courbes est du degré $3^{2\alpha-1}$.

Si $m=3^\alpha\mu$, μ n'étant plus divisible par 3, et α pouvant être zéro, et que p, p', p'', ... désignent les facteurs premiers du nombre μ, distincts entre eux, chacune des 8 courbes (pour $\alpha \geqq 1$) ou des 9 courbes (pour $\alpha=0$) est d'un degré égal à

$$3^{2\alpha-1}\mu^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right)\cdots$$

Meissel. — Contribution à la Géométrie de la sphère. (380).

Markoff (*A.*). — Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. (381-406; fr.).

Sturm (*R.*). — Simplification du problème de la projectivité dans l'espace. (407-423).

L'auteur traite, avec des simplifications, au moyen des méthodes de la Géométrie des nombres, le problème suivant déjà résolu par lui (*Math. Annalen*, t. VI) :

Dans l'un des deux espaces considérés, on donne k points $A_1, A_2, \ldots, A_k$, *et l plans* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, *et comme homologues à ces points et à ces plans, dans l'autre espace, k points* $B_1, B_2, \ldots, B_k$, *et l plans* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$. *Il s'agit maintenant de trouver des droites associées a, b, telles que le faisceau de plans* $a(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, *et le système de points* $a(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ *soient respectivement projectifs à* $b(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ *et à* $b(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$.

Bachmann (*P.*). — Sur quelques intégrales définies. (424-431).

Schur (*F.*). — Recherches géométriques sur les complexes de rayon du premier et du second degré. (432-464).

Voir *Bulletin*, V_1.

Lie (*S.*). — Contributions à la théorie des surfaces minima. (465-506).

Voir *Bulletin*, IV_1, 340.

Noether (*M.*). — Sur les systèmes de points d'intersection d'une courbe algébrique avec des courbes non adjointes. (507-528).

Schubert (*H.*). — Description des dégénérescences des courbes gauches du troisième ordre. (529-532).

Klein (*F.*). — Sur les transformations du onzième ordre des fonctions elliptiques. (533-555).

Par des considérations empruntées à la théorie des fonctions, l'auteur est parvenu, pour la transformation du onzième ordre, aux résultats suivants :

I. *Établissement de la résolvante du* 660^e *degré de Galois pour l'équation modulaire.* — Soumettons les cinq variables (¹)

$$y_1, y_4, y_5, y_9, y_3$$

aux quinze équations qui se tirent des trois suivantes,

$$\begin{cases} 0 = y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1, \\ 0 = y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9, \\ 0 = y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1, \end{cases}$$

par une permutation cyclique des y; posons, d'autre part,

$$J = \frac{C^3}{\nabla^{11}};$$

(¹) On a pris pour indices de ces variables les résidus quadratiques correspondants au module 11.

J étant l'invariant absolu $\frac{g_2^3}{\Delta}$ de l'intégrale elliptique, C étant une fonction du onzième degré des y, que nous définirons tout à l'heure avec plus de précision,

$$C = (y_1^{11} + y_4^{11} + y_5^{11} + y_9^{11} + y_3^{11}) + \ldots,$$

et Δ représentant la fonction suivante du troisième degré

$$\Delta = y_1^2 y_9 + y_4^2 y_3 + y_5^2 y_1 + y_9^2 y_4 + y_3^2 y_5.$$

Il existe alors 660 systèmes de solutions

$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3,$$

qui résultent d'un seul d'entre eux par la répétition et la combinaison des substitutions linéaires suivantes $\left(\rho = e^{\frac{2i\pi}{11}}\right)$:

$$(\mathrm{S}') \qquad y'_1 = \rho y_1, \quad y'_4 = \rho^4 y_4, \quad y'_5 = \rho^5 y_5, \quad y'_9 = \rho^9 y_9, \quad y'_3 = \rho^3 y_3;$$

$$(\mathrm{T}) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{-11}.y'_1 &= (\rho^9 - \rho^2)y_1 + (\rho^4 - \rho^7)y_4 + (\rho^3 - \rho^8)y_5 \\ &\quad + (\rho^5 - \rho^6)y_9 + (\rho^1 - \rho^{10})y_3, \\ \sqrt{-11}.y'_4 &= (\rho^4 - \rho^7)y_1 + (\rho^3 - \rho^8)y_4 + (\rho^5 - \rho^6)y_5 \\ &\quad + (\rho^1 - \rho^{10})y_9 + (\rho^9 - \rho^2)y_3, \\ \sqrt{-11}.y'_5 &= (\rho^3 - \rho^8)y_1 + (\rho^5 - \rho^6)y_4 + (\rho^1 - \rho^{10})y_5 \\ &\quad + (\rho^9 - \rho^2)y_9 + (\rho^4 - \rho^7)y_3, \\ \sqrt{-11}.y'_9 &= (\rho^5 - \rho^6)y_1 + (\rho^1 - \rho^{10})y_4 + (\rho^9 - \rho^2)y_5 \\ &\quad + (\rho^4 - \rho^7)y_9 + (\rho^3 - \rho^8)y_3, \\ \sqrt{-11}.y'_3 &= (\rho^1 - \rho^{10})y_1 + (\rho^9 - \rho^2)y_4 + (\rho^4 - \rho^7)y_5 \\ &\quad + (\rho^3 - \rho^8)y_9 + (\rho^5 - \rho^6)y_3, \end{aligned} \right.$$

et le problème de calculer, pour une valeur donnée de J, *les systèmes correspondants des solutions* y *peut être considéré comme la résolvante de Galois de l'équation modulaire.*

La fonction déjà désignée par C est un multiple numérique de la somme des onzièmes puissances des 660 expressions qui, en vertu des substitutions en question, se présentent à la place de y_1, par exemple, savoir :

$$C = \frac{11}{124}(\Sigma y^{11}).$$

II. *Établissement de la résolvante du onzième degré.* — Il existe deux formes des plus simples de la résolvante du onzième degré. L'une d'elles est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}:(\mathrm{J}-1):1 = {} & [\mathfrak{z}^2-3\mathfrak{z}+(5\pm\sqrt{-11})]\left(\mathfrak{z}^3+\mathfrak{z}^2-3.\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}\mathfrak{z}+\frac{7\pm\sqrt{-11}}{2}\right)^3 \\
& :\left[\mathfrak{z}^3+4\mathfrak{z}^2+\frac{7\pm 5\sqrt{-11}}{2}\mathfrak{z}+(4\pm 6\sqrt{-11})\right] \\
& \times\left[\mathfrak{z}^4-2\mathfrak{z}^3+3.\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}\mathfrak{z}^2+(5\mp\sqrt{-11})\mathfrak{z}-3.\frac{5\mp\sqrt{-11}}{2}\right]^2 \\
& :1728;
\end{aligned}$$

on trouve pour l'autre

$$\begin{aligned}
0 = {} & \xi^{11}-22\xi^8+11(9\pm 2\sqrt{-11})\xi^5-11.\frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\xi^4\mp 88\sqrt{-11}.\xi^2 \\
& +11\,\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}\,\frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}-\frac{144 g_2^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}}.
\end{aligned}$$

On passe de l'une à l'autre en posant

$$\xi^3 = \mathfrak{z}^2-3\mathfrak{z}+(3\pm\sqrt{-11}).$$

Au moyen des y que l'on vient de définir, les 11 valeurs de $\mathfrak{z}$, ainsi que celles de ξ, s'expriment comme il suit. On a, pour une valeur de $\mathfrak{z}$,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathfrak{z} = {} & (y_1^3+y_4^3+y_5^3+y_9^3+y_3^3) \\
& -(1+\sqrt{-11})(y_1^2 y_4+y_4^2 y_5+y_5^2 y_9+y_9^2 y_3+y_3^2 y_1) \\
& +\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}(y_1^2 y_5+y_4^2 y_9+y_5^2 y_3+y_9^2 y_1+y_3^2 y_4) \\
& +3(y_1^2 y_3+y_4^2 y_1+y_5^2 y_4+y_9^2 y_5+y_3^2 y_2) \\
& -3(y_1 y_4 y_9+y_4 y_5 y_3+y_5 y_9 y_1+y_9 y_3 y_4+y_3 y_1 y_5) \\
& -\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}(y_1 y_4 y_5+y_4 y_5 y_9+y_5 y_9 y_3+y_9 y_3 y_1+y_3 y_1 y_4),
\end{aligned}$$

et pour la valeur correspondante de ξ,

$$\begin{aligned}
\nabla^{\frac{2}{3}}.\xi = {} & (y_1^2+y_4^2+y_5^2+y_9^2+y_3^2) \\
& -(y_1 y_9+y_4 y_3+y_5 y_1+y_9 y_4+y_3 y_5 \\
& -\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}(y_1 y_4+y_4 y_5+y_5 y_9+y_9 y_3+y_3 y_1),
\end{aligned}$$

et les dix autres valeurs de $\mathfrak{z}$ ou de ξ s'obtiennent en répétant dans les seconds membres des égalités précédentes la substitution que nous venons de désigner par S.

III. *Interprétation transcendante des equations ci-dessus.* — Par analogie avec l'équation de Jacobi du douzième degré, dont M. Klein a parlé récemment (*Math. Ann.*, t. XII), posons, en désignant par μ un facteur de proportionnalité,

$$\mu A_0 = q^{\frac{11}{12}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+55h+22},$$

$$\mu A_1 = q^{\frac{1}{133}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+h} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+34h+14} \right],$$

$$\mu A_4 = q^{\frac{37}{132}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+13h+1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+31h+7} \right],$$

$$\mu A_5 = q^{\frac{49}{132}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+37h+10} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+7h} \right],$$

$$\mu A_9 = q^{\frac{97}{132}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+19h+2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+25h+4} \right],$$

$$\mu A_3 = q^{\frac{25}{132}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+49h+18} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+61h+28} \right].$$

On a alors, pour déterminer les rapports des y, les relations

$$\frac{y_4}{y_5} = -\frac{A_0}{A_1}, \quad \frac{y_5}{y_9} = -\frac{A_0}{A_4}, \quad \frac{y_9}{y_3} = -\frac{A_0}{A_5}, \quad \frac{y_3}{y_8} = -\frac{A_0}{A_9}, \quad \frac{y_8}{y_4} = -\frac{A_0}{A_3}.$$

(*Repert. der Mathem. von Königsberger u. Zeuner*, t. XI.)

Stolz (*O.*). — Sur les limites des quotients. (556-559).

Voir *Bulletin*, IV_2, 216.

Harnack (*Ax.*). — Note sur la représentation algébrique au moyen de paramètres de la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre.

Voir *Bulletin*, IV_1, 39.

Ax. H.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS PURE AND APPLIED, Editor in chief J.-J. SYLVESTER, Baltimore.

Tome II; 1879 [1].

Ladd (*Miss Christine*). — L'hexagramme de Pascal. (1-12).

Miss Ladd se propose de donner une notation nouvelle pour les lignes et les

---

[1] Voir *Bulletin*, V_2, 116.

points qui se présentent dans la théorie de l'hexagramme de Pascal. Elle expose brièvement, en partant de là, les recherches de M. Veronese sur ce sujet [*voir* Dewulf, *Sur l'hexagramme mystique* (*Bulletin*, I_2, p. 348)], et donne quelques propriétés nouvelles.

Burr (*William-H.*). — Sur la théorie de la flexion. (13-45).

Après avoir rappelé les différentes hypothèses faites successivement dans la théorie de la flexion, par Mariotte et Leibniz, Navier, Parent, l'auteur prend comme base de sa théorie les deux hypothèses suivantes : 1° le corps a une structure non cristalline; 2° les forces qui causent la flexion ne produisent point de compression en leurs points d'application. Si la première hypothèse nous semble bien acceptable, il ne nous paraît pas en être de même de la seconde.

Halsted (*Georges Bruce*). — Note sur le premier *Euclide* anglais. (46-48).

Quelques mots sur un manuscrit de la bibliothèque de Princeton, contenant en particulier une copie de la première édition des *Éléments* d'Euclide qui ait été publiée à Bâle, en 1533, chez Jean Hervagius, par Simon Grynæus. Ce manuscrit a appartenu à Henry Billingsley, et c'est sur cette copie que Billingsley aurait fait la première traduction en anglais des *Éléments* d'Euclide.

Gibbs (*J.-W.*). — Sur les formules fondamentales de la Dynamique. (49-64).

L'auteur arrive à des formules nouvelles pour les équations du mouvement, en substituant, dans les formules ordinaires, aux variations des coordonnées les variations des composantes de l'accélération.

Halsted (*G.-B.*). — Suppléments à la bibliographie de l'hyperespace (Géométrie à n dimensions) et de la Géométrie non euclidienne. (65-70).

Suite de la bibliographie commencée dans le vol. I, p. 261-276, 384-385.

Cayley (*A.*). — Calcul de la fonction génératrice numérique minima de la forme homogène, à deux variables du septième ordre. (71-84).

M. Cayley rectifie une erreur qu'il avait faite dans la détermination de cette fonction, publiée d'abord dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXXVII; 1878, p. 505, et explique la méthode qu'il a suivie pour la calculer.

Sylvester(*J.-J.*). — Remarque sur le Mémoire précédent. (84).

M. Sylvester explique comment il avait trouvé la faute de M. Cayley.

Eddy (*Henry*). — Sur la déviation latérale des projectiles sphériques. (85-88).

Sylvester (*J.*). — Note sur les déterminants et les disynthèmes doubles. (89-96 et 214-222).

M. Sylvester traite dans cette Note différents problèmes : il calcule le nombre de termes distincts d'un déterminant symétrique; u_m étant le nombre des termes distincts obtenus dans le développement d'une matrice symétrique du même ordre, il démontre que l'on a

$$u_m = m u_{m-1} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} u_{m-3},$$

ou bien, en posant

$$u_m = 1.2\ldots m . v_m$$

$$m v_m - m v_{m-1} + \frac{v_{m-3}}{2} = 0,$$

et on en déduit facilement que v_m est le coefficient de t_m dans le développement des

$$\frac{e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{1-t}},$$

fonction que l'on peut appeler *fonction génératrice*.

Pour le déterminant symétrique dont la diagonale n'est formée que de zéros, la fonction géneratrice est

$$y = \frac{e^{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{1-t}}.$$

Pour un déterminant quelconque,

$$y = \frac{1}{1-t},$$

et si le déterminant quelconque a une diagonale formée de zéros,

$$y = \frac{e^t}{1-t}.$$

Étude de la série ω,

$$1,\ 2,\ 8,\ 50,\ \ldots,$$

formée par les coefficients du développement

$$\frac{e^{\frac{t}{4}}}{\sqrt[4]{1-t}} = \omega_0 + \omega_1 \frac{t}{2} + \omega_2 \frac{t^2}{2.4} + \omega_3 \frac{t^3}{2.4.6},$$

coefficients qui représentent les nombres de termes distincts du déterminant gauche d'ordre h_n, divisés par les produits des nombres entiers pairs inférieurs à h_n.

Cayley (*A.*). — Desiderata et suggestions. (97).

Sur l'extension au cas des coefficients imaginaires et des racines imaginaires du théorème de Newton, complété par Fourier et relatif à la résolution par approximations successives de l'équation $f(x) = 0$. Dans quelle région du plan imaginaire l'application de la règle analogue à celle qu'on emploie pour les racines réelles d'une équation à coefficients réels conduira-t-elle à un procédé convergent?

Cayley (A.). — Sur le système complet des formes fondamentales (*Grundformen*) de la forme homogène à deux variables du neuvième ordre. (98-99).

Extrait d'une Lettre de *M. A. de Gasparis à M. Sylvester*. (99-100).

Sur certaines séries où les éléments, tels que le rayon vecteur, les anomalies excentrique et vraie, etc..., sont exprimés en fonction de l'anomalie moyenne donnée en parties du rayon, sans sinus ni cosinus.

Mc Clintock (Emory). — Essai sur le *Calcul d'extension* (Calculus of Enlargement). (101-161).

Ce Calcul est, à un certain point de vue, une extension du Calcul des différences finies; à un autre point de vue, une extension du Calcul des opérations. Il comprend comme branche la plus importante le Calcul différentiel et le Calcul des variations. L'objet de ce Mémoire est de donner une esquisse préliminaire de cette méthode et de prendre date pour sa découverte.

Craig (Thomas). — Le mouvement d'un solide dans un fluide. (162-177).

Exposé rapide des résultats obtenus jusqu'ici. La méthode symétrique de M. Craig lui permet d'arriver rapidement à des démonstrations très simples et aussi d'établir d'une façon élégante les formules générales du mouvement du corps et du liquide.

Lucas (Éd.). — Sur l'analyse indéterminée du troisième degré. Démonstration de plusieurs théorèmes de M. Sylvester. (178-185).

1° x, y, z étant des nombres entiers vérifiant l'équation

$$x^3+y^3=\mathrm{A}z^3,$$

on a une autre solution au moyen des formules

$$\mathrm{X}=x(x^3+2y^3),\quad \mathrm{Y}=-y(y^3+2x^3),\quad \mathrm{Z}=z(x^3-y^3),$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{X}}{x}+\frac{\mathrm{Y}}{y}+\frac{\mathrm{Z}}{z}=0,\quad \mathrm{X}x^2+\mathrm{Y}y^2=\mathrm{AZ}z^2.$$

2° Soit l'équation

$$\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}y^3+\mathrm{C}z^3+3\mathrm{D}xyz=0.$$

Si l'on a une première solution en nombres entiers (x, y, z), on en aura une autre (X, Y, X) en posant

$$X = x(By^3 - Cz^3),$$
$$Y = y(Cz^3 - Ax^3),$$
$$Z = z(Ax_3 - By^3)$$

ou encore

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0, \quad AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

M. Lucas s'occupe aussi de la question quand on donne deux solutions distinctes de l'équation.

3° Application de la théorie des cubiques à la théorie des nombres. Signification géometrique des propositions établies précédemment.

4° Démonstration d'un théorème de Sylvester. Si p et q désignent des nombres des formes respectives $18n + 5$ et $18n + 11$, il est impossible de décomposer en deux cubes, soit entiers, soit fractionnaires, aucun des nombres suivants:

$$p, 2p, 4p^2; 4q, q^2, 2q^2.$$

5° Pour que $X^3 + Y^3 = AZ^3$ soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, il faut et il suffit que A appartienne à la forme

$$xy(x+y),$$

préalablement débarrassée des facteurs cubiques qu'elle peut contenir.

On a, par exemple, contrairement à ce que Legendre affirme, des solutions en nombres entiers pour $A = 6$,

$$17^3 + 37^3 = 6.21^3.$$

Cayley (A.). — Desiderata et suggestions. (186).

Est-il possible de fabriquer un appareil permettant de construire des figures semblables dans leurs parties infiniment petites ?

Franklin (F.). — Note sur la partition des nombres. (187).

Stringham (W.). — Quelques formules pour l'intégration des fractions irrationnelles. (188-190).

Burr (William). — Note sur la *Théorie de la flexion* (vol. II, p. 13 du même *Journal*).

Crofton. — Généralisation d'un théorème de Statique de Leibniz. (192).

Si un système de force est en équilibre, le centre de gravité des points d'application est le même que celui des extrémités des forces.

Kempe. — Sur le problème géographique des quatre couleurs. (193-201).

Story. — Note sur l'article précédent. (201-204).

M. Kempe s'occupe de la manière la plus convenable de disposer les couleurs sur une carte géographique donnée, et M. Story se propose de démontrer rigoureusement un théorème de Géométrie de position qui s'était présenté dans les recherches de M. Kempe.

Stone (*Ormond*). — Sur la dynamique d'un projectile sphérique. (211-213).

Relevé d'une faute faite par M. Eddy dans son Mémoire *Sur la déviation latérale des projectiles sphériques.*

Sylvester (*J.*) et *Franklin* (*F.*). — Table des fonctions génératrices et des formes fondamentales pour les formes homogènes à deux variables des dix premiers ordres. (223).

Craig (*Th.*). — Note sur la projection du lieu général d'un espace à quatre dimensions, dans l'espace à trois dimensions. (252-259).

M. Craig se propose le problème de la représentation conforme (similitude dans les parties infiniment petites). Il résout aussi le problème dans le cas général d'un espace quelconque

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

dont on cherche la représentation conforme sur l'espace o, $\xi_1\ \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

Craig (*Th.*).— Sur le mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide. (261-279).

L'auteur traite le cas du mouvement d'un ellipsoïde dont la masse est symétrique par rapport aux trois plans principaux. Le mouvement a lieu dans un fluide incompressible, sans frottement. Le corps est soumis à l'action de forces instantanées; on demande le mouvement résultant du corps et celui du fluide.

Poisson s'était déjà occupé d'un problème de ce genre : le mouvement du pendule dans un gaz; mais, en réalité, l'idée de déterminer le mouvement d'un corps dans un fluide revient à Dirichlet, qui attaqua spécialement le cas du mouvement de la sphère (*Monatsberichte und Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin;* 1852). Après lui Clebsch, dans son Mémoire : *Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit* (*Crelle's Journal,* t. 52 et 53), s'occupa du problème général et du cas particulier où le corps est un ellipsoïde. Il fut suivi dans cette voie par beaucoup d'autres :

Kirchoff, *Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit* (*Borchardt's Journal*, vol. 71). Il donne aux équations différentielles une forme très élégante, reprise plus tard par Clebsch (*Math. Ann.,* t III). Citons encore :

Ferrers, *The motion of an infinite mass of water about a moving ellipsoid* (*Quart. Journal,* n° 52; 1875).

Köpcke, *Zur Discussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit* (*Math. Ann.*, vol. XII, p. 387).

Weber, *Anwendung der Thetafunctionen zweier Variabeln auf die Theorie* *der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit* (*Math. Ann.*, vol. XIV, p. 173).

HOPPE (*Ann. de Poggendorff*, t. LXIII).

THOMSON et TAIT (*Natural Philosophy*).

M. Craig traite d'abord le cas particulier d'un mouvement parallèle à l'un des axes; puis, arrivant au cas général et employant les formules établies dans le même volume dans son Mémoire *Sur le mouvement d'un solide dans un fluide*, il démontre entre autres choses l'existence d'un ellipsoïde analogue à l'ellipsoïde de Poinsot dans la dynamique. M. Craig tire parti successivement de l'emploi des coordonnées elliptiques et des coordonnées générales de Lagrange.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur certaines équations homogènes à trois variable du troisième degré. (280-281).

Chapitre I. — Sur la résolution des nombres en sommes ou en différence de deux cubes.

Section I. — p et q étant des nombres premiers des formes respectives $18n+5$ et $18n+11$, l'équation

$$x^3+y^3 = Az^3$$

est irrésoluble en nombres entiers ou fractionnaires si A a une des formes

$$p,\ q,\ p^2,\ q^2,\ pq,\ p^2q^2,\ p_1p_2^2,\ q_1q_2^2,$$
$$9p,\ 9q,\ 9p^2,\ 9q^2,\ 9pq,\ 9p^2q^2,\ 9p_1p_2^2,\ 9q_1q_2^2,$$
$$2p,\ 4p,\ 4p^2,\ 2q^2.$$

De plus, on a les deux théorèmes suivants :

1° c, ψ, φ étant des nombres premiers des formes respectives $18n+1$, $18n+7$, $18n+13$, si ρ, ψ, φ ne sont pas de la forme f^2+27g^2, et, par suite, n'ont pas le résidu cubique 2, tous les nombres d'une des huit classes

$$2\rho,\ 4\rho,\ 2\rho^2,\ 4\rho^2,\ 2\psi,\ 4\psi^2,\ 4\varphi,\ 2\varphi^2$$

donnent aussi des nombres indécomposables en la somme de deux cubes.

2° Si 3 n'est pas résidu cubique par rapport à v, $3v$ et $3v^2$ donnent aussi des nombres indécomposables (sous certaines conditions cependant).

Ces théorèmes, seulement énoncés ici, sont suivis de quelques remarques complémentaires sur les travaux analogues de M. Lucas et du P. Pepin.

Petersen (*Julius*). — Démonstration nouvelle du théorème de réciprocité. (285-286).

Hall (*H.*). — Sur une action nouvelle du magnétisme sur les courants électriques. (287-292).

Sylvester (*J.-J.*) et *Franklin* (*F.*). — Table des fonctions génératrices et des formes fondamentales pour les formes homogènes à deux variables des quatre premiers ordres prises deux à deux. (293-306).

Mc Clintock (*Emory*). — Une nouvelle méthode générale d'interpolation. (307-311).

M. Mc Clintock se propose de donner une méthode d'interpolation plus facile à démontrer et aussi à employer que les méthodes en usage maintenant.

Ayant d'abord examiné la méthode de Lagrange, qui, en réalité, doit être attribuée à Euler, puis celle de Newton, il donne une nouvelle formule peu différente de la dernière, mais un peu plus symétrique.

Au lieu de poser, comme Newton,

$$\varphi_{m+1} x_n = \frac{\varphi_m x_n + \varphi_m x_{m+1}}{x_n - x_{n-m+1}},$$

il emploi la formule

$$\varphi_{m+1} x_n = \frac{\varphi_m x_n - \varphi_m x_{m+1}}{x_n - x_{m+1}}.$$

On a, dans les deux cas,

$$\varphi x = \varphi x_1 + (x - x_1)\,\varphi_1 x_2 + (x - x_1)(x - x_2)\,\varphi_2 x_3 + \ldots .$$

Mc Clintock (*Emory*). — Note sur la démonstration d'une certaine formule d'interpolation. (311-314).

Application du calcul d'extension à la démonstration de deux théorèmes de Newton et Stirling.

Chace. — Étude, au moyen des quaternions, d'une certaine classe de surfaces du troisième degré. (315-323).

Étude des surfaces que M. Chace appelle *cubiques à centre,* par suite de la forme de leur équation. Recherche du rayon de courbure de la section normale en un point d'une des surfaces et classification des différentes familles de surfaces qui se présentent.

Sylvester (*J.-J.*). — Remarques sur les Tables pour les formes homogènes à deux variables, publiées précédemment. (324-329).

Peirce. — Sur les raies du spectre de diffraction de Rutherfurd. (339-347).

Mc Clintock (*E.*). — Sur le développement des fonctions de fonctions. (348-353)

Application du calcul d'extension au développement de $\varphi[f(x)]$, où

$$f(x) = a + bx + \frac{1}{2} cx^2 + \frac{1}{2.3} dx^3 + \ldots .$$

Rowland (*H.*). — Notes préliminaires sur la découverte récente de M. Hall. (354-356).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur certaines équations homogènes à trois variables du troisième degré. (357-393).

Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques :

1° Fonctions cyclotomiques de première espèce. Soit q nombre premier $p = mk + 1$, $x^k - 1$ est facteur de $x^{p-1} - 1$. Si $\chi_k(x)$ est le facteur de $x^k - 1$, qui contient toutes ses racines primitives. La fonction χ s'appelle fonction cyclotomique de première espèce, relativement à k.

2° Fonctions cyclotomiques de seconde espèce. Théorie des diviseurs de la fonction qui a pour racines les sommes de groupes à deux termes des racines primitives de $x^k - 1$, ou, en d'autres termes, toutes les valeurs distinctes de $2\cos\frac{\lambda\tau}{k}$, λ étant un nombre plus petit que $\frac{k}{2}$ est premier à λ. Cette fonction est la fonction cyclotomique de seconde espèce et de classe conjuguée à k.

3° Fonctions cyclotomiques d'espèce et de classe quelconques. Généralisation des théorèmes trouvés dans les paragraphes précédents. L'auteur termine son Étude de la cyclotomie par ces mots : « La cyclotomie me semble ne devoir pas être regardée comme une simple application, mais bien comme le centre naturel, la base fondamentale de l'Arithmétique de l'avenir. »

Remarques sur les diviseurs intrinsèques des fonctions cyclotomiques de première espèce.

Notes sur le premier article du Mémoire :

I. Sur le triangle rationnel inscrit et circonscrit à la cubique

$$x^3 + 3xy^2 - y^3 + 3z^3 = 0.$$

Contrairement à ce qui a été dit dans le premier Mémoire sur la correspondance entre la résolution en nombres entiers des équations

$$(1)\qquad x^3 - y^3 + Az^3 = 0,$$

$$(2)\qquad x^3 - 3xy^2 - y^3 + 3Az^3 = 0,$$

on a cependant, pour A = 1, les solutions suivantes de (2)

$$\begin{aligned} x:y:z &= 1:1:1\\ &= -2:1:1\\ &= 1:-2:1; \end{aligned}$$

mais ces points sont les sommets d'un triangle à la fois inscrit et circonscrit à la cubique. Ce sont les seuls points rationnels de cette courbe, et, quand on étudie la correspondance entre (1) et (2), on voit qu'aux trois points (3) correspondent sur la cubique (1) des points pour lesquels $x = 0$ ou $y = 0$.

Sur les triangles et les polygones à la fois inscrits et circonscrits à une cubique quelconque.

Note sur la même question, d'après M. F. Franklin.

Note sur la condition pour que 2 et 3 soient résidus cubiques par rapport à un nombre premier de la forme $6i + 1$.

II. Sur certains nombres et certaines classes de nombres non décomposables en la somme ou différence de deux cubes rationnels.

Si A est un des nombres 1, 2, 3, 4, 18, 36, ou un nombre de la forme

$$\begin{array}{cccc} p, & q, & p^2, & q^2,\\ 9p, & 9q, & 9p^2, & 9q^2,\\ 2p, & 4q, & 4p^2, & 2q^2,\\ pq, & p_1p_2^2, & q_1q_2^2, & p^2q^2; \end{array}$$

p et q étant des nombres premiers des formes respectives $18n+5$ et $18n+11$, A n'est pas décomposable en la somme de deux cubes inégaux. (Le Mémoire se continue dans le volume suivant.)

Peirce (*C.-S.*). — Sur une projection quinconciale de la sphère (394-396; 1 pl.).

Projection conforme obtenue en transformant la projection stéréographique avec un pôle à l'infini au moyen des fonctions elliptiques. La planche représente une mappemonde, bien préférable, ce nous semble, aux projections de Mercator ou stéréographiques. Des Tables sont données pour la construction de la mappemonde.

Johnson (*Woolsey*) et *Story*. — Notes sur le taquin (15 *puzzle*). (397-399, 399-404). BRUNEL.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI ([1]).

Tome XI; 1878.

Millosevich (*Elia*). — Sur la vie et les travaux de GIOVANNI SANTINI. (1-110).

Né le 29 janvier 1787, mort le 26 juin 1877, Santini fut un astronome du premier ordre, un grand cométographe, un professeur éminent. Directeur de l'Observatoire de Padoue en 1817, il fut nommé directeur de la Faculté des Sciences mathématiques en 1845, et acquit une réputation européenne par son enseignement et ses travaux. C'est dans ses *Elementi di Astronomia con le applicazioni alla Geografia, Nautica, Gnomonica e Cronologia* que plusieurs générations d'Italiens ont appris le mécanisme du ciel. Giovanni Santini ne fut pas seulement un grand astronome, un illustre savant : il ne cessa jamais de se montrer, pendant tout le cours de sa longue carrière, l'ami sincère et dévoué de son pays, de la Science et de la jeunesse des écoles.

Pour plus amples renseignements sur le noble caractère de Santini, on pourra lire encore le discours du professeur Lorenzoni, de Padoue, et l'écrit du professeur Turazza, de Vienne.

Genocchi (*Ang.*). — Fragment d'une lettre à D. B. Boncompagni. (111).

Annonce de la prochaine publication des Œuvres d'Augustin Cauchy, notre grand analyste parisien, avec une Note du prince Boncompagni, rappelant que,

---

([1]) Voir *Bulletin*, II_2, 191.

en 1869, c'est-à-dire dès son apparition, le *Bullettino* avait signalé la grande utilité qu'aurait pour tous les amis des Sciences mathématiques la publication des Œuvres de Cauchy.

Mayer (Ad.), trad. par *Biadego (G.-B.)*. — Histoire du principe de la moindre action. (155-156).

Curtze (M.), trad. par *Sparagna (A.)*. — *Nova Copernicana* d'Upsal. Rapport lu à la Société Copernicienne des Sciences et Arts de Thorn, le 4 juin 1877. (167-176).

M. Max. Curtze avait été chargé par le prince Boncompagni de rechercher en Suède, et spécialement à Upsal, les manuscrits autographes de Copernic et les Livres annotés de sa main. Le Dr Sparagna, qui a traduit ce Rapport en italien, l'a enrichi de nombreuses annotations.

Giordani (Enr.). — I sei Cartelli di matematica disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di *Lodovico Ferrari*, coi sei Contra-Cartelli in riposta di *Nicolò Tartaglia*, comprendenti le soluzioni de' Quesiti dall' una e dall' altra parte proposti; raccolti, autografati e pubblicati da *Enrico Giordani*, Bolognese. Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui Cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. *Silvestro Gherardi*. Milano, 1876. In-8°, 220 pages (1). (177-196).

En 1544, Maria del Fiore s'était vanté de savoir résoudre les problèmes conduisant à des équations de la forme

$$x^3 + ax = b,$$

et l'année suivante avait eu lieu le cartel entre Tartaglia et del Fiore. Ces cartels étaient soutenus publiquement et presque toujours dans les églises. C'est ainsi que, le 10 août de l'année 1548, l'église de Santa Maria del Giardino, à Milan, avait été assignée comme lieu de rendez-vous pour vider le différend mathématique entre Tartaglia et Ferrari, le disciple de Cardan. On sait que Nicolò avait été surnommé *Tartaglia* (le Balbutiant) à cause du balbutiement, résultat physique d'une horrible blessure à la mâchoire qu'il reçut à la prise de Brescia par les Français. Il n'avait alors que douze ans, et s'était réfugié avec sa mère dans *il Duomo*, croyant échapper ainsi à la poursuite des soldats furieux. Il faut lire, dans les Notes du prince Boncompagni (p. 181-183), l'autobiographie de Tartaglia, telle qu'elle est reproduite, sous forme de dialogue, entre lui et le prieur de Barletta (2).

(1) Traduction d'un article de M. Cantor, publié dans le *Zeitschrift für Math. u. Phys.*, t. XXII.

(2) *Voir* encore Libri, *Hist. des Math. en Italie.*

Cette intéressante Notice, due au Dr Maurice Cantor, est précédée d'une dédicace de l'auteur au prince Balthazar Boncompagni, « le magnanime et savant promoteur des études historico-mathématiques à Rome ».

Cantor (*M.*), trad. par *Favaro* (*A.*). — La correspondance entre Lagrange et Euler. (197-216).

C'est le 28 juin 1754 que Lagrange écrivit sa première Lettre à Euler. Par le nombre des années, il n'était encore qu'un enfant; mais par la maturité de la pensée, c'était déjà un homme et un savant. Le Dr Cantor fait l'historique de la Correspondance et des travaux qui ont immortalisé les noms d'Euler et de Lagrange. Il rend un juste hommage au prince Boncompagni pour ses publications de Lettres inédites de Lagrange à Euler.

Gilbert (*Ph.*). — Essai historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide (1). (217).

M. Gilbert a fait paraître, en 1878, une étude historique et critique sur le problème fameux de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. M. Siacci s'est empressé de donner de cet Ouvrage un compte rendu auquel nous ne ferons qu'un reproche, celui d'être trop bref. Le jugement qu'il porte sur l'auteur sera ratifié par tous les mathématiciens.

Grâce, dit-il, à l'exposé lucide et bien ordonné de M. Gilbert, son étude constitue un Chapitre qui n'est plus à faire de l'histoire de la Mécanique rationnelle.

Garbieri (*G.*). — Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende von Dr Siegmund Günther. Zweite durchaus umgearbeitete, vermehrte und durch eine Aufgaben-Sammlung bereicherte Auflage. Erlangen, 1877 (2). (257-318).

Le Dr Giovanni Garbieri rend compte de la seconde édition d'un Ouvrage de M. Günther, ou plutôt il donne une étude fort instructive sur cette branche spéciale des Mathématiques qu'on appelle la *Théorie des Déterminants* et sur les mathématiciens qui en ont fait l'objet de leurs travaux.

C'est, paraît-il, à Leibnitz qu'il faut faire remonter la première invention des déterminants; c'est à Gauss qu'on doit cette dénomination nouvelle, et c'est Cauchy qui a posé le couronnement de cet édifice, auquel avaient travaillé Cramer, Euler, Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, suivis dans cette voie, qui semble attractive, par une phalange de vaillants chercheurs : Albeggiani, Armenante, Baltzer, Battaglini, Bellavitis, Binet, Borchardt, Brioschi, Casorati, Catalan, Cayley, Chiò, Clebsch, Dahlander, Darboux, Davidof, Diekmann, Dietrich, Dölp, Dostor, Falk, Fiedler, Fontebasso, Fürstenau, Garbieri, De Gasparis, Germain (Sophie), Glaisher, Grassmann, Gundelfinger, Günther, Hankel, Heine, Hesse, Hindenburg, Hoüel, Iarochenko, Jacobi, Janni, Laisant, Lucas (Éd.), Mansion, Mellberg, Meylink, Monro, Nachreiner, Nägelsbach, Newmann, Ramus,

(1) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 2e année, 1878; 98 pages, in-8°. Voir *Bulletin*, IV_2, 88.

(2) Voir *Bulletin*, I_1, 377.

Reidt, Reiss, Rothe, Rubini, Salmon, Scheibner, Schering, Seeliger, Siacci, Smith, Somof, Souillart, Sperling, Spottiswoode, Stern, Studnička, Sylvester, Tait, Thiele, Trudi, Veltmann, Weyrauch, Zehfuss, Zeipel. Dans cette liste, encore incomplète, les Allemands sont en majorité; on y rencontre bon nombre d'Italiens et peu de Français contemporains.

Favaro (Ant.). — Sur la publication faite par le Dr Carlo Malagola de quelques documents relatifs à Nicolas Copernic et à d'autres astronomes et mathématiciens des xve et xvie siècle. (319-334).

L'important Ouvrage de Malagola offre un tableau fidèle de la vie scientifique et littéraire de l'Université de Bologne vers la fin du xve siècle; il a valu à son auteur les éloges mérités des écrivains les plus éminents de l'Italie, Domenico Berti, Cesare Correnti, Francesco de Sanctis, Federico Selopis, etc., etc. On sait que, d'après des documents trouvés dans la citadelle de Ferrare, publiés et annotés par le prince B. Boncompagni, Nicolas Copernic fréquenta les cours de l'Université de Bologne pendant les années 1496, 1497, 1499, 1500; qu'il étudia ensuite le droit canon à Ferrare, et qu'il se trouvait encore dans cette ville le 31 mai 1503, jour où le titre de docteur lui fut publiquement décerné.

Bierens de Haan (D.). — Notice sur un pamphlet mathématique hollandais, intitulé : « Bril voor de Amsterdamsche belachelycke geometristen (1). Amsterdam, 1663. (383-452; franç.). »

Il s'agit d'un pamphlet publié par Cornelis Sackersz van Leeuwen contre ses compatriotes et collègues Abraham de Graaf, Gietermaker, Anhaltin et autres. Dans cet écrit de mauvais goût, l'auteur distribue à tort et à travers les épithètes de singes, de pirates, de brigands, de voleurs, de charlatans et autres aménités de ce genre. De Graaf répondit à Van Leeuwen en le traitant à son tour d'ignorant, de pillard, de plagiaire, de pitoyable géomètre, etc. M. Bierens de Haan ne s'est pas contenté de nous faire assister à cette curieuse lutte de mathématiciens hollandais du xviie siècle; il a tracé un aperçu des principaux Ouvrages de Mathématiques publiés dans les Pays-Bas pendant les xvie et xviie siècles et de leurs méthodes.

Son Catalogue biographique et bibliographique, de plus de soixante-dix mathématiciens néerlandais, offre un réel intérêt pour l'histoire des Sciences mathématiques. Parmi les géomètres qu'il cite se rencontrent les noms du grand Huygens, d'Adrien Metius, de Hudde, de Schooten, de Simon Stevin, de Ludolf van Ceulen, etc.

Somof (André), (trad. par *Hoüel*). — Nécrologie de Joseph Ivanovitch Somof. (453-486; franç.).

Joseph Ivanovitch Somof, né le 13 juin 1815, au village d'Otrada, gouvernement de Moscou, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, a inscrit son nom en caractères ineffaçables dans l'histoire des Sciences mathé-

(1) Lunettes pour les géomètres ridicules d'Amsterdam.

matiques. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter un coup d'œil sur le Catalogue donné par le prince Boncompagni, des trente-huit Ouvrages et Mémoires qui composent son œuvre. Ce Catalogue est suivi d'une Lettre de Somof au prince Boncompagni, et d'observations y relatives par le prince lui-même.

Boncompagni (*B.*) et *Siacci* (*F.*). — Solution de la question 391 de la *Nouvelle Correspondance mathématique*. (487).

La somme des carrés des nombres impairs de rang pair, diminuée de la somme des carrés des nombres impairs de rang impair, est le double d'un carré. Deux solutions de cette question, dues l'une au prince Boncompagni, l'autre au professeur Siacci.

Caverni (*Raffaello*). — Notices historiques sur l'invention des thermomètres. (531-586, 1 pl.).

L'auteur examine successivement le thermomètre de Galilée, ceux de Santorio, de Sagredo, de Torricelli, et le thermomètre multiplicateur des académiciens *del Cimento*. On pourra consulter utilement sur ce dernier thermomètre le Mémoire de Libri, publié au tome 45 des *Annales de Chimie et de Physique* (1830), et intitulé : « Mémoire sur la détermination de l'échelle du thermomètre de l'Académie *del Cimento.* »

Les conclusions de M. R. Caverni sont que l'invention première du thermomètre à air appartient à l'Italie, aussi bien que celle du thermomètre à liquide. L'auteur compare sa patrie à une mère défiante de ses forces, qui cède les droits sacrés de la maternité à quelque nourrice accorte. On pourrait en dire autant de la France, dont les inventions et les découvertes sont lancées dans le monde par d'habiles exploiteurs, qui ont tous les bénéfices de l'invention au détriment des véritables inventeurs.

Boncompagni (*B.*). — Sur deux Lettres du P. abbé D. Benedetto Castelli, moine du Mont-Cassin, à Monsignor D. Ferdinando Cesarini. (587-644).

Castelli (*B.*). — Deux Lettres du P. abbé D. Benedetto Castelli à Monsignor D. Ferdinando Cesarini. (645-657).

Mazzucchelli (C[te] *Giovanni Maria*). — Castelli (Benedetto). Article inédit de l'Ouvrage intitulé : *Gli Scrittori d'Italia*. (658-665; 1 pl.).

Benedetto Castelli, moine du Mont-Cassin, mathématicien en titre du pape Urbain VIII, fut l'un des plus grands mathématiciens et physiciens de l'Italie. Né à Brescia le 24 juin 1577, il mourut à Rome, au monastère de Saint-Calixte, en 1644, et non en avril 1643, comme le dit le comte Mazzuchelli. Élève et ami de Galilée, il ne cessa jamais de prendre la défense de son maître et de propager ses doctrines. Il fut le maître et le bienfaiteur de Torricelli et compta parmi ses élèves les princes Ferdinand et Léopold de Médicis, Taddeo Barberini, Alfonso Borelli, Bonaventura Cavalieri, etc. Le prince Balthasar Boncompagni a mis en relief cette grande figure dans une Notice intéressante; il a publié *deux*

Lettres de Castelli écrites à Mgr D. Ferdinando Cesarini, l'une à la date du 20 septembre 1638, l'autre à la date du 12 août 1639. La première de ces Lettres établit que le thermomètre ou mieux le thermoscope fut inventé par Galilée avant 1603; elle n'avait été publiée qu'en partie par J.-B. Clément de Nelli; le prince Boncompagni l'a donnée tout entière, telle qu'elle existe à Florence, où elle est conservée précieusement, bien que ce ne soit qu'une copie, mais une copie faite de la main du célèbre mathématicien Viviani. La seconde de ces Lettres traite de la mesure « delle Fontane ».

Un exemplaire manuscrit autographe de cette Lettre, datée du 12 août 1639, se trouve dans un Volume petit in-4° de la Bibliothèque royale de Parme, intitulé : Castelli : | *Acque correnti* | *Lettere* | Mss. | 191.

En 1664 parut à Castres une traduction en français de cet Ouvrage de Castelli, sous le titre : *Traicté* | *de* | *la Mesure des* | *Eaux courantes* de | Benoist Castelli, Reli | gieux du Montcassin et | Mathématicien du pape Urbain VIII | traduit d'italien en françois | avec un discours de la ionction des Mers, adressé à Mes | seigneurs les Commissaires deputez par Sa Majesté. | Ensemble un Traité du mouvement des eaux d'Evangeliste Torricelli | mathématicien du Grand Duc de Toscane | Traduit de latin en françois. | A Castres, | Par Bernard Barcouda, imprimeur du Roy, de la | Chambre de l'Edict, de la dite Ville et Diocèse. | 1664. |

L'article du prince Boncompagni sur le P. abbé Benedetto Castelli se termine par un extrait inédit de l'Ouvrage du comte Giovanni Maria Mazzuchelli, intitulé : *Gli Scrittori d'Italia,* coté sous le n° 9266 des manuscrits du Vatican.

Favaro (*Ant.*) — Étude sur la vie et les écrits physico-mathématiques de Hermann Grassman. (699-756).

Hermann Grassman ne fut pas apprécié à sa juste valeur par ses contemporains; il n'est pas encore suffisamment connu, malgré les écrits de ses compatriotes : Delbrück, Junghans, Schlegel, Sturm, Schröder et Sohncke. Le D[r] Favaro a pensé avec raison que l'étude des œuvres d'un savant est le monument le plus durable que la postérité puisse élever à sa mémoire, et il s'est appliqué à faire revivre cette singulière physionomie d'un homme d'une activité infatigable, qui fut tout à la fois philosophe, théologien, mathématicien, physicien, philologue et musicien. L'esprit créateur de Grassmann ne se reposait d'une œuvre que par une autre de genre tout différent. Hermann-Gunther Grassmann naquit le 15 avril 1809 à Stettin, en Poméranie, où son père était professeur de Physique et de Mathématiques; il étudia l'Analyse supérieure dans les œuvres de Lagrange, de Lacroix et de Laplace. Le plus grand et le plus remarquable peut-être de ses travaux mathématiques est l'*Ausdehnungslehre.* Hermann Grassmann mourut le 26 septembre 1877.

Favaro (*Ant.*).— Geschichte der Astronomie von Rudolf Wolf. München, 1877. (757-777).

L'Académie des Sciences de Munich, sous les auspices du roi Maximilien II de Bavière, a publié un Recueil de Rapports sur l'Histoire des Sciences en Allemagne dans les temps modernes. Parmi ces Rapports figure l'*Histoire de l'Astronomie* par *Rodolphe Wolf,* professeur de l'Université de Zurich. L'auteur ne s'est pas borné à faire l'histoire de l'Astronomie en Allemagne dans les temps modernes : il a considérablement élargi son cadre dans le temps et dans l'espace; il s'est occupé de l'Astronomie chez les Égyptiens, les Chinois, les Babyloniens, les Grecs, dans les écoles d'Alexandrie, de Bagdad, du Caire, de Samarcande et de Cordoue. L'école chrétienne de Tolède, Alphonse de Castille et les Tables alphonsines ont trouvé place dans ce vaste tableau d'ensemble.

« Il n'y a pas d'histoire possible », dit Wolf, « sans les calculs de temps, et il n'y a pas de calcul de temps sans Astronomie. » L'Histoire de l'Astronomie de Wolf est, certes, un bel Ouvrage ; mais nous adresserons à l'auteur, d'accord avec le savant professeur Favaro, de Padoue, certains reproches qui nous paraissent inévités. Wolf a dit quelques mots seulement de l'Astronomie des Hindous ; il a commis dans l'histoire des travaux de Copernic et de Galilée quelques omissions bibliographiques qui ont été signalées par le prince Balthazar Boncompagni ; de Huygens il parle peu ; de M. Chasles, le vénéré doyen de nos géomètres français, il parle avec une passion injuste et jalouse. Dans l'Histoire de l'Astronomie il a passé sous silence des hommes tels que Striborio, Ramus, Biancano. Il a omis de citer la *Biblioteca matematica italiana*, œuvre d'importance capitale ; il a omis de mentionner la Société *degli Spettroscopisti* si connue en Italie et si utile à la Science astronomique. Enfin, quand Wolf parle de la diffusion des Observatoires dans le monde entier, il ne trouve pas un seul Italien à signaler, et pourtant il n'avait que l'embarras du choix !

Favaro (*Ant.*). — Grundlinien der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen, von Dr Siegmund Günther. (778-782).

Ce titre de 136 pages in-8° est destiné à l'enseignement classique. Il fait une large part à l'Histoire scientifique, et ce trait caractéristique commande l'attention des lecteurs du *Bullettino*. C'est une innovation à laquelle applaudit le Dr Favaro, et tous les amis des sciences partagent son avis à cet égard. Cet excellent petit livre est divisé en douze Chapitres ; d'un bout à l'autre, il excite continuellement l'intérêt de l'élève et donne satisfaction aux savants et aux érudits par sa science et sa haute érudition.

Lucas (*Éd.*). — Sur la série récurrente de Fermat. (783-798).

M. Édouard Lucas a produit de remarquables travaux sur l'analyse algébrique et sur la théorie des nombres ; ils sont bien connus des lecteurs du *Bullettino*, qui n'ont pas oublié sans doute ses *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure*, publiées dans les cahiers de mars, avril et mai de l'année 1877. Les nombres de la forme $2^n \pm 1$ ont exercé, depuis Fermat, bon nombre d'esprits mathématiques de la plus haute portée, et je constate avec plaisir ce fait que rappelle M. Édouard Lucas, à savoir que si M. Le Lasseur, de Nantes, a trouvé directement les deux facteurs de $2^n + 1$, c'est au moyen d'une méthode inédite de décomposition des grands nombres, due à Aurifeuille, mon condisciple à l'Institution Barbet des Feuillantines, ancien élève de l'École Polytechnique, mort professeur de Mathématiques au Lycée de Toulouse.

Favaro (*Ant.*). — L'histoire des Mathématiques à l'Université de Padoue. Lettre à D. B. Boncompagni. (799-801).

Dans cette Lettre pleine de sens, le savant professeur sommet au prince Boncompagni, comme à son maître dans l'Histoire des Sciences, ses vues, ses idées, sa méthode et son programme du premier Cours d'Histoire des Sciences qu'il a ouvert à l'Université de Padoue.

En France, l'enseignement de l'Histoire des Sciences n'existe nulle part, c'est en vain qu'on le chercherait dans les grandes écoles nationales scientifiques, voire même au Collège de France.

Garbieri (*G.*). — Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben, von Dr P. Mansion, Professor der Universität zu Gent. (802-803).

Le Dr Giovanni Garbieri a rendu compte de ce savant travail non sur l'édition originale française, mais sur la traduction faite du français en allemand par le Dr Horn, parce que dans l'édition allemande quelques points sont mieux et plus amplement développés, et que les exercices y sont plus nombreux et plus variés que dans l'édition française.

ANNONCES de publications récentes. — (112-154, 218-256, 335-382, 488-530, 666-698, 804-854). AR. MARRE.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome XCII; 1881, 1er semestre.

N° 14; 4 avril.

Puiseux (*V.*). — Sur les mesures micrométriques effectuées pendant le passage de Vénus du 8 décembre 1874. (808).

Mouchez. — Note sur les mesures micrométriques du passage de Vénus sur le Soleil. (813).

Villarceau (*Y.*). — Note sur les méthodes de Wronski. (815).

Janssen. — Sur la photométrie photographique et son application à l'étude des pouvoirs rayonnants comparés du Soleil et des étoiles. (821).

Halphen. — Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss. (856).

Soient trois nombres entiers positifs m, n, p; posant

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1-\frac{2}{\mu},$$

M. Schwarz a montré comment, lorsque μ est négatif, l'équation hypergéométrique, où l'on suppose

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right),\quad \beta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right),\quad \gamma=1-\frac{1}{m},$$

s'intègre algébriquement; M. Halphen montre comment tous les cas où cette hypothèse est réalisée peuvent être réunis en un seul; il examine ensuite le cas où μ est positif; faisant, pour abréger,

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(m,n,p,x),$$

il pose

$$\eta=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{\left(-p,n,m,\frac{1}{x}\right)}{\left(p,n,m,\frac{1}{x}\right)}.$$

Aux développements doivent être substituées les intégrales, qui subsistent toujours.

x est une fonction uniforme de η; il en résulte que le point η reste nécessairement dans une région limitée du plan, à savoir un cercle ayant l'origine pour centre et dont M. Halphen calcule le rayon. Dans ce cercle, les fonctions

$$X(\eta)=(-1)^{\frac{1}{m}}\left(p,n,m,\frac{1}{x}\right)^{\frac{\mu}{m}},$$

$$Y(\eta)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}\left(p,n,m,\frac{1}{x}\right)^{\frac{\mu}{n}},$$

$$Z(\eta)=\left(\quad\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\left(p,n,m,\frac{1}{x}\right)^{p}$$

sont développables en séries procédant suivant les puissances entières et positives de η.

Poincaré (*H.*). — Sur une nouvelle application et quelques propriétés des fonctions fuchsiennes. (859).

Sur certains types d'équations différentielles linéaires qui s'intègrent par les fonctions fuchsiennes, lorsque celles-ci n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Wolf (*C.*). — Sur les relations entre les taches solaires et les variations magnétiques. (861).

Crookes (*W.*). — Sur la viscosité des gaz. (862).

Violle (*J.*). — Intensités lumineuses des radiations émises par le platine incandescent. (866).

Bouty (*E.*). — Sur le changement de volume qui accompagne le dépôt magnétique d'un métal. (868).

Blondlot. — Sur la conductibilité voltaïque des gaz échauffés. (870).

Villari. — Sur les décharges internes des condensateurs électriques. (872).

Laurent. — Sur les miroirs magiques. (874).

N° 15; 11 avril.

Gyldén. — Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. (897).

Application des formules données par M. Hermite (*Journal de Borchardt*, t. 90, p. 332) pour le calcul numérique de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\eta x}}{(1+x)^x}\,dx.$$

Cailletet et *Hautefeuille.* — Recherches sur la liquéfaction des mélanges gazeux. (901).

Lockyer. — Sur les raies du fer dans le Soleil. (904).

Poincaré (*H.*). — Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes. (913).

Partant de deux fonctions abéliennes quelconques, l'auteur montre qu'on peut former des équations différentielles linéaires du troisième ordre dont les coefficients sont des fonctions algébriques de x et de un ou trois paramètres arbitraires, et qui s'intègrent au moyen des fonctions abéliennes proposées; il s'occupe ensuite de former les *groupes* des équations à coefficients rationnels qui peuvent s'intégrer par ce procédé, c'est-à-dire le groupe des substitutions linéaires que subissent les intégrales quand x décrit un contour quelconque.

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur les formules de représentation des fonctions. (915).

L'auteur traite des intégrales *représentantes* $\int_0^a \Phi(\alpha, h)\,d\alpha$ qui, comme $\int_0^a \frac{\sin \alpha h}{\alpha}\,d\alpha$, ont pour h croissant à l'infini une valeur limite indépendante de a; il en résulte, pour $0 < a < b$,

$$\lim \int_a^b \Phi(\alpha, h)\, d\alpha = 0.$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire, on a les équations

$$\text{(A)} \qquad \lim \int_a^b f(\alpha)\Phi(\alpha, h)\, d\alpha = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \lim \int_0^a f(\alpha)\Phi(a, h)\, d\alpha = f(0) \lim \int_0^a \Phi(\alpha, h)\, d\alpha.$$

La formule (A) suppose seulement l'intégrabilité de $f(x)$.

La formule (B) a certainement lieu si la fonction $\Phi(x, h)$ est telle que

$$\lim \int_0^a \operatorname{mod} \Phi(\alpha, h)\, d\alpha$$

soit finie, si en outre $f(x)$ est intégrable et si $f(0) = \lim\limits_{x+0} (x)$ est déterminé.

En dehors de ces conditions générales, on peut rechercher des conditions collectives pour des classes d'intégrales représentantes.

L'égalité (B) subsistera toujours et pour toutes les fonctions $\Phi(x, h)$ remplissant la condition qui a servi à les définir si les différences $f(x)$ ne changent pas de signe entre $x = 0$ et $x = \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le veut : l'égalité (B) aura donc lieu si

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

les différences de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ étant constamment non positives entre $x = 0$ et $x = \varepsilon$. Sous l'hypothèse que $f(x)$ a une dérivée intégrable $f'(x)$, cette condition équivaut à celle de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon \operatorname{mod} f'(\alpha)\, d\alpha.$$

L'intégration par parties appliquée à l'intégrale $\int_0^a f(\alpha)\Phi(\alpha, h)\, d\alpha$ conduit au résultat suivant : $x\Phi(x, h)$ s'annulant avec x et ne dépassant pas des limites finies pendant que h croît à l'infini, (B) aura toujours lieu quand l'intégrale

$$J = \int_0^\varepsilon d\alpha \operatorname{mod} \left[\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\beta f(\beta) \right]$$

est convergente. Cette condition contient la condition relative aux différences de $f(x)$. L'examen de cette intégrale conduit en outre au théorème suivant :

En supposant $\lim\limits_{x=0} x\Phi(x, h) = 0$, $\lim\limits_{h=\infty} x\Phi(x, h)$ *finie*, $f(x)$ *intégrable et l'intégrale*

$$\int_0^\varepsilon \frac{d\alpha}{\alpha} \operatorname{mod}[f(a) - f(0)]$$

convergente, l'égalite (B) *sera vraie.*

En faisant

$$f(x)-f(o)=\frac{\lambda(x)}{\rho(x)},$$

on peut déterminer $\rho(x)$ en sorte que cette fonction devienne infinie pour $x=o$ avec des différences constamment négatives et que $\lim\lambda(x)$ ne soit ni l'infini ni zéro.

La fonction $\rho(x)$ est ce que M. P. du Bois-Reymond appelle le degré de continuité de la fonction $f(x)$ pour $x=o$.

L'égalité

$$j=\int_o^\iota \frac{d\alpha}{\alpha}\bmod[f(\alpha)-f(o)]=\int_o^\iota d\alpha\,\frac{\bmod\lambda(\alpha)}{\alpha\rho(\alpha)}$$

montre que, si l'intégrale $\int_o^\iota \frac{d\alpha}{\alpha\rho(\alpha)}$ est finie, il suffit que $\lambda(x)$ soit intégrable, et que, si elle est finie, $\lambda(x)$ devra osciller de manière à rendre l'intégrale j convergente.

Enfin l'auteur ajoute quelques mots sur ses recherches relatives à la représentation par les formules de Fourier des fonctions $f(x)$ de la forme $\frac{\cos\psi(x)}{\rho(x)}$, $\rho(x)$ étant le degré de continuité pour $x=o$ et $\psi(x)$ devenant infinie pour $x=o$ [*Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln* (*Abhandl. d. Bayer. Akad. d. W.*, II. Cl., XII. Bd., II. Abth.)].

N° 16; 18 avril.

Gyldén. — Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. (942).

Brioschi. — Sur la surface de Kummer à seize points singuliers. (944).

L'auteur expose quelques-uns des résultats contenus dans un Mémoire qu'il fait imprimer, relatifs à l'expression des coordonnées de la surface de Kummer en fonctions de deux paramètres.

Bresse. — Rapport sur un Mémoire de M. S. Périssé, intitulé : « Des causes qui tendent à gauchir les poutres des ponts en fer, et des moyens de calculer ces poutres pour résister aux efforts gauchissants ». (948).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (957).

Poincaré. — Sur les fonctions abéliennes. (958).

Généralisation des résultats dus à M. Picard concernant la réduction de certaines fonctions abéliennes à des fonctions elliptiques et d'autres résultats dus à M. Appell sur la décomposition de certaines fonctions abéliennes en éléments simples.

Appell. — Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce. (960).

x et y étant deux variables liées par une équation algébrique $F(x,y)=0$ d'ordre m et de genre p, l'auteur considère des fonctions du point analytique (x,y) qui n'ont sur toute la sphère d'autres pointe singuliers que des pôles et des points critiques algébriques, à savoir les points critiques de la fonction y de x; de plus ces fonctions se reproduisent multipliées par un faisceau constant quand le point (x,y) décrit un cycle quelconque.

M. Appell montre comment ces fonctions peuvent s'exprimer au moyen des fonctions Θ et donne, pour elles, une formule de décomposition en éléments analogue à celle que M. Hermite a donnée pour les fonctions doublement périodiques.

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur les formules de représentation des fonctions. (962).

Draper. — Sur la Photographie stellaire. (964).

N° 17; 23 avril.

Faye. — Sur une question de métrologie ancienne; origine du *mile* anglais. (975).

Léauté. — Théorie générale des transmissions par câbles métalliques; règles pratiques.

Appell. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (1005).

Soit une équation linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

dont les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ sont des fonctions uniformes doublement périodiques de x n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point ∞. Supposons que l'intégrale générale n'ait elle-même d'autre point singulier essentiel que le point ∞; de plus, en désignant par α un point quelconque où certains des coefficients p deviennent infinis, supposons que les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à ce point soient des nombres commensurables ayant des différences entières, mais que les éléments d'un système fondamental ne contiennent pas de logarithmes dans le voisinage de $x = a$; ces conditions étant remplies pour tous les points singuliers, on peut obtenir l'intégrale générale de l'équation.

Par exemple, l'équation de Lamé

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

pour

$$n = \frac{1}{2}, \quad h = -\frac{1+k^2}{4},$$

a pour intégrales les fonctions $\sqrt{\operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x}$, $\sqrt{k' \operatorname{sn} x + \operatorname{dn} x}$.

Croullebois. — Production normale des trois systèmes de franges des rayons rectilignes. (1008).

Gaiffe. — Causes perturbatrices des transmissions téléphoniques. (1009).

N° 18; 2 mai.

Faye. — Sur une propriété de l'indicatrice relative à la courbure moyenne des surfaces convexes. (1019).

Jamin. — Sur la force électromotrice inverse de l'arc électrique. (1021).

Gyldén. — Sur les inégalités à longues périodes dans les mouvements des corps célestes. (1033).

Bigourdan. — Observations de la comète f 1880 (Pechüle), faites à l'Observatoire de Paris. (1045).

Le Paige (C.). — Sur une propriété des formes trilinéaires. (1048).

Lippmann. — Sur le principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. (1050).

N° 19; 9 mai.

Faye. — Réponse à quelques critiques relatives à la Note du 21 février sur la parallaxe du Soleil. (1072).

Sylvester. — Sur les diviseurs des fonctions des périodes des racines primitives de l'unité. (1084).

Soit p un nombre premier égal à $ef+1$; la fonction du $e^{\text{ième}}$ degré dans les racines sont les e périodes entre lesquelles on peut distribuer les ef $p^{\text{ièmes}}$ racines primitives de l'unité en ce que l'auteur désigne comme la fonction à e périodes par rapport à p.

On sait (Bachmann, *Kreistheilung*, etc.) que p et un $e^{\text{ième}}$ résidu quelconque par rapport à p sont toujours diviseurs de cette fonction. Tout autre diviseur est dit exceptionnel; M. Sylvester énonce la proposition suivante :

1° *Si le nombre des périodes e est un nombre premier de la forme* $2^{2^x}+1$, *le nombre* 2 *ne peut pas être un diviseur exceptionnel.*

2° *Si e est un nombre premier, un faisceau exceptionnel* K (*s'il en existe*) *doit entrer à la seconde puissance au moins comme facteur dans e* — 1.

Dewulf. — Du déplacement d'une figure de forme invariable dans son plan. (1091).

Baillaud (*B.*). — Observations des satellites de Saturne, faites à Toulouse en 1879 et 1880.

Bigourdan. — Observations, éléments et éphémérides de la comète *a*. (1881).

Halphen. — Sur un système d'équations différentielles. (1101).

Il s'agit du système

$$\frac{d(u_1+u_2)}{d\alpha}=u_1u_2,\quad \frac{d(u_2+u_3)}{d\alpha}=u_2u_3,\quad \frac{d(u_3+u_1)}{d\alpha}=u_3u_1.$$

En posant

$$\beta=\frac{a\alpha+b}{a'\alpha+b'},$$

où a, b, a', b' sont des constantes, puis

$$u_s=-\frac{2a'}{a'\alpha+b'}+\frac{ab'-ba'}{(a'\alpha+b')^2}v_s,\quad (s=1,2,3),$$

le système transformé se déduit du proposé en remplaçant les u par les v.

Une intégrale particulière conduit donc à l'intégrale complète. Or, en prenant $\alpha=\log q$, on a une solution en choisissant, pour u_1, u_2, u_3, les dérivées logarithmiques par rapport à α des trois fonctions $\Theta^4(\mathrm{K})$, $\Theta^4(0)$, $\mathrm{H}^4(\mathrm{K})$.

Le Paige (*C.*). — Sur les formes trilinéaires. (1103).

Puiseux (*P.*). — Sur quelques mesures actinométriques faites dans les Alpes en 1880. (1105).

N° 20; 16 mai.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal M. *G.-B. Airy*) et à l'Observatoire de Paris pendant le premier trimestre de l'année 1881. (1125).

Stephan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (1126).

Tresca. — Rapport sur un Mémoire de M. Graeff, relatif à une série d'expériences faites au réservoir du Furens sur l'écoulement des eaux. (1135).

Borrelly. — Comète découverte par M. Swift le 30 avril 1881. Observations faites à l'Observatoire de Marseille. (1146).

Laguerre. — Sur la séparation des racines des équations numériques. (1146).

Soit, en désignant par ω une quantité positive quelconque et par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$ des quantités réelles quelconques rangées par ordre croissant ou décroissant de grandeur,

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{\mathrm{A}_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(x-\alpha_{n-1})^\omega}.$$

Cela posé, ξ désignant une quantité quelconque comprise entre α_i et α_{i+1}, le nombre des racines de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$, qui sont comprises entre ξ et α_{i+1}, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{\mathrm{A}_{i+1}}{(\xi-\alpha_{i+1})^\omega} + \frac{\mathrm{A}_{i+2}}{(\xi-\alpha_{i+2})^\omega} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_i}{(\xi-\alpha_i)^\omega}.$$

(L'auteur entend par nombre des alternances d'une suite $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\ldots$ le nombre des variations des termes A, $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$, ..., nombre qui ne peut surpasser le nombre des variations des termes A, B, C, D, ...).

Si ω est une quantité positive quelconque, l'équation

$$a + bx + cx(x-\omega) + dx(x-\omega)(x-2\omega) + \ldots = 0$$

a au moins autant de racines positives que l'équation

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = 0.$$

a désignant une quantité arbitraire, considérons la suite

$$f(x) + f'(x)(a-x) + f''(x)\frac{(a-x)^2}{1.2} + \ldots.$$

Soient V_α, V_β le nombre d'alternances que présente cette suite quand on y remplace successivement x par α et par β; le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre α et β est au plus égal à la somme des nombres V_α et V_β si a est compris entre α et β, et au plus égal à leur différence dans le cas contraire.

Le cas particulier de $x = a$ conduit à un énoncé remarquablement simple.

N° 21; 23 mai.

Lesseps (de). — Sur l'ancien Observatoire du Caire. (1181).

Stéphan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (1183).

Stéphanos. — Sur la géométrie des sphères. Rapprochement entre les « semi-plans » et « semi-sphères » de M. Laguerre et les recherches de M. Lie [*Ueber complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe* (*Math. Ann.*, t. V; p. 164-188; 1872)].

Poincaré (H.). — Sur les fonctions fuchsiennes (1198).

Posant

$$\frac{z_1-\alpha_1}{z_1-\beta_1}=e^{i\lambda_1}\frac{z-\alpha_1}{z-\beta_1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{z_{n+1}-\alpha_{n+1}}{z_{n+1}-\beta_{n+1}}=e^{i\lambda_{n+1}}\frac{z-\alpha_{n+1}}{z-\beta_{n+1}},$$

où l'on suppose que chacun des angles $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ est une partie aliquote de 2π, satisfaisant à l'inégalité

$$\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+\dots+2\lambda_n+\lambda_{n+1}<2\pi(n-1),$$

il existe une infinité de fonctions $F(z)$ uniformes en z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, méromorphes à l'intérieur de ce cercle et telles que l'on ait

$$F(z)=F(z_1)=F(z_2)=\dots=F(z_n)=F(z_{n+1}).$$

Toutes ces fonctions, dites fuchsiennes, peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de l'une d'entre elles; si, de plus, on pose

$$x=F(z),\quad y=\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction algébrique de x.

Si, en outre, on impose à la fonction $F(z)$ les conditions suivantes :

1° Elle est une des fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement;

2° On a

$$F(\alpha_1)=0,\quad F(\alpha_2)=1,\quad F(\alpha_3)=\infty;$$

il en résultera que φ est rationnel en x et que les points singuliers de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y\varphi(x)$$

seront

$$F(\alpha_1),\quad F(\alpha_2),\quad \dots,\quad F(\alpha_n),\quad F(\alpha_{n+1}).$$

Tous ces points singuliers sont réels. Pour $n=2$ cette équation se réduit à l'équation hypergéométrique et $F(z)$ se réduit à une fonction particulière, sur laquelle M. Poincaré a déjà appelé l'attention (14 février 1881), et que M. Halphen a étudiée (4 avril).

Dans le cas où n est quelconque, on parvient, par cette méthode, à l'intégration de toutes les équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, et dont tous les points singuliers sont réels.

Turquan. — Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (1200).

L'auteur indique une méthode qui ramène la recherche de l'intégrale complète de l'équation

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

à l'intégration d'un système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires entre les huit variables x, y, z, p, q, r, s, t.

Wolf (*C.*). — Les étalons de poids et mesures de l'Observatoire de Paris et les appareils qui ont servi à les construire; leur origine, leur histoire et leur état actuel. (1202).

N° 22; 30 mai.

Stéphan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (1260).

Gyldén. — Sur la théorie du mouvement des corps célestes. (1262.)

Système de formules pour calculer la position d'un corps céleste dans le plan de son orbite.

Bigourdan. — Observations et éléments de la comète *a* 1881 (Swift). (1272).

Poincaré (H.). — Sur les fonctions fuchsiennes. (1274).

Généralisant la méthode exposée par lui dans une précédente Communication, l'auteur énonce, sous forme dubitative, cette proposition : *Toutes ces équations linéaires à coefficients algébriques s'intègrent par les transcendantes fuchsiennes et zétafuchsiennes.* La démonstration de cette proposition, d'une si haute généralité, est ramenée par lui à la démonstration de l'existence d'une solution réelle pour un système de $2n-4$ équations.

Rouyaux. — Relations algébriques entre les sinus supérieurs d'un même ordre. (1277).

West. — Sur les sinus d'ordre supérieur. (1279).

N° 23; 6 juin.

Faye. — Sur les ascensions droites de la Lune, observées à Alger. (1306).

Todd. — La parallaxe solaire déduite des photographies américaines du passage de Vénus de 1874. (1328).

Fuchs. — Sur les fonctions de deux variables qui naissent de l'inversion des intégrales de deux fonctions données. (1330).

Conclusion du Mémoire présenté à la Société Royale de Göttingue (t. XXVII), dont la traduction a paru dans le *Bulletin* (2e série, t. V; Ire Partie, p. 52).

Picard (E.). — Sur les expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre. (1332).

M. Poincaré a montré dans diverses Communications que, pour une infinité de courbes algébriques, les coordonnées d'un point pouvaient être exprimées sous formes de fonctions fuchsiennes d'un paramètre, laissant d'ailleurs dans le doute la réponse à cette question : un tel mode d'expression est-il possible pour toutes les courbes algébriques?

Dans la présente Communication, M. Picard indique une marche à suivre pour répondre à la question suivante :

Étant donnée l'équation

$$F(u, v) = 0$$

d'une courbe algébrique, reconnaître si l'on peut exprimer les coordonnées u, v d'un quelconque de ses points par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre correspondant à un groupe fuchsien donné.

Poincaré (*H.*). — Sur une propriété des fonctions uniformes.

Un *groupe* d'une infinité de fonctions

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_i(z),\quad \ldots$$

est *discontinu* si l'on peut diviser le plan ou une partie du plan en régions R_0, R_1, ..., R_i, ..., telles que $f_i(z)$ parcoure R_i, quand z parcourt R_0, et la fonction uniforme $F(z)$ admettra ce groupe, si l'on a identiquement

$$F[f_i(z)] = F(z).$$

Cela posé, soit un groupe discontinu quelconque; envisageons les deux séries

$$\Theta(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m,$$

$$\Theta_1(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H_1[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m;$$

dans ces deux séries m est un entier plus grand que 1; H et H_1 sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles quelconques.

Ces séries, qui convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes, définissent deux fonctions uniformes de a, jouissant de la propriété suivante :

$$\Theta\,[f_i(z)] = \Theta\,(z)\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m,$$

$$\Theta_1[f_i(z)] = \Theta_1(z)\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m,$$

La fonction $\dfrac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)} = \mathrm{F}(z)$ sera uniforme et jouira de la propriété

$$\mathrm{F}[f_i(z)] = \mathrm{F}(z);$$

elle admettra donc le groupe proposé.

« Il existe donc une infinité de fonctions uniformes admettant un groupe discontinu donné. »

N° 24; 13 juin.

Brioschi. — Sur un système d'équations différentielles. (1389).

Halphen. — Sur certains systèmes d'équations différentielles. (1404).

Les Communications des deux géomètres concernent le système

$$\frac{d(u_r + u_s)}{dx} = u_r u_s + \varphi(x) \quad (r, s = 1, 2, 3),$$

analogue au système étudié par M. Halphen (9 mai) et déjà rencontré par M. Darboux (*Annales de l'École Normale,* 2e série, t. VII, p. 149).

M. Brioschi traite directement les équations et montre leur liaison avec l'équation hypergéométrique. M. Halphen montre qu'elles peuvent être ramenées, par un changement de variables, à celles qu'il avait déjà étudiées, et que la même propriété (comme aussi celle de l'invariance) subsiste pour le système plus général

$$\frac{du_r}{dx} = \Psi_r(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \varphi(x) \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

où les symboles Ψ_1, Ψ_2, Ψ_n désignent des formes quadratiques à n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, dont les coefficients sont tels que, si l'on y fait

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \mathrm{U},$$

on ait

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial u_1} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial u_2} = \cdots = \frac{\partial\Psi_n}{\partial u_n} = 2\lambda\mathrm{U},$$

et que, en même temps, les autres dérivées du premier ordre soient toutes nulles.

Alors, en déterminant $f(x)$ par l'équation

$$f'(x) = \lambda f^2(x) + \varphi(x),$$

en posant

$$2\lambda f(x) = [\log \mathrm{F}(x)]',$$

puis effectuant le changement de variables

$$\beta = \int F(\alpha)\alpha\alpha, \quad u_r = f(\alpha) + v_r F(\alpha),$$

on retombe sur des équations analogues aux proposées, où le v remplace les u et où le terme $\varphi(\alpha)$ manque.

Examinant plus particulièrement le cas où $n = 3$, M. Halphen montre que les équations différentielles s'intègrent alors par les fonctions hypergéométriques X, Y, Z définies dans sa Communication du 4 avril.

Fuchs. — Sur les fonctions des deux variables qui naissent de l'inversion de deux fonctions données. (1401).

N° 25; 20 juin.

Jordan (*C.*). — Observations sur la réduction simultanée de deux formes bilinéaires. (1438).

Réponse à une critique formulée par M. Kronecker.

N° 26; 27 juin.

Mouchez. — Observation de la comète *b* 1881 (comète de 1807) à l'Observatoire de Paris, par MM. Bigourdan, Wolf et Thollon.

Poincaré (*H.*). — Sur les fonctions fuchsiennes. (1484).

L'auteur donne l'analyse d'un nouveau Mémoire qu'il a présenté à l'Académie sur ce sujet; nous en détachons le passage suivant :

« Soient $2n$ cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$, qui sont extérieurs l'un à l'autre ou se touchent extérieurement; tout groupe dérivé de n substitutions linéaires dont la $i^{\text{ième}}$ change la partie du plan extérieure à C_i en la partie intérieure à C'_i sera discontinu. Cela arrivera en particulier si les $2n$ cercles se touchent deux à deux de manière à circonscrire un polygone curviligne limité par des arcs de cercles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$, appartenant respectivement aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$, et si la $i^{\text{ième}}$ substitution change α_i en α'_i.

» Il existe des fonctions qui ne sont pas altérées par les substitutions de ce groupe et que je propose d'appeler *fonctions kleinéennes*, puisque c'est à M. Klein qu'on en doit la découverte. Il y aura aussi des fonctions thétakleinéennes et zétakleinéennes, analogues aux fonctions thétafuchsiennes et zétafuchsiennes.

» ... Les fonctions kleinéennes intègrent un grand nombre d'équations linéaires à coefficients algébriques, et entre autres des équations à intégrales irrégulières. »

Saint-Loup. — Influence des variations de la pression atmosphérique sur la durée des oscillations d'un pendule. (1490).

Tresca. — Observations relatives à la Communication précédente. (1490).

Flammarion (*C.*). — Observations sur la comète, et principalement sur l'aspect physique du noyau et de la queue. (1491).

Darboux (G.). — Sur la surface à seize points singuliers.

L'auteur commence par reconnaître les droits de priorité de M. Rohn sur une partie des propositions relatives à la surface de Kummer qu'il a signalées dans une Communication précédente. [Voir le Mémoire de M. Rohn, *Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche* (*Mathematische Annalen*, t. XV, p. 315)]. Il indique ensuite une méthode pour développer les relations entre la surface de Kummer et les fonctions Θ, méthode applicable à d'autres surfaces du quatrième ordre à points singuliers.

Considérons une surface du quatrième ordre admettant un point singulier; une droite mobile passant par ce point rencontre la surface en deux points; si l'on détermine cette droite par le point où elle rencontre un plan fixe, on aura *représenté la surface sur un plan double*. La *courbe de passage* sera en général une courbe du sixième ordre, aura des points multiples ou se décomposera dans certains cas spéciaux : dans le cas de la surface de Kummer, elle se réduira à six droites tangentes à une même conique (K). Mettons l'équation de cette conique sous la forme

$$y^2 - xz = 0;$$

une tangente aura une équation de la forme

$$xm^2 + 2ym + z = 0,$$

et un point quelconque du plan poura être déterminé par les valeurs ρ, ρ_1 du paramètre m relatives aux deux tangentes issues de ce point; alors le point de la surface de Kummer correspondant au point ρ, ρ_1 du plan de représentation sera défini par les formules

$$\begin{aligned}\lambda x &= (a-\rho)(a-\rho_1),\\ \lambda y &= (b-\rho)(b-\rho_1),\\ \lambda z &= (c-\rho)(c-\rho_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda t(\rho-\rho_1) &= \sqrt{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)(d-\rho_1)(e-\rho_1)(f-\rho_1)}\\ &= \sqrt{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)(d-\rho)(e-\rho)(f-\rho)},\end{aligned}$$

x, y, z, t désignant les coordonnées homogènes du point et λ un facteur de proportionnalité; a, b, c, d, e, f sont les paramètres des six tangentes à la conique qui, prises ensemble, constituent la courbe de passage.

En remplaçant, pour abréger, $a-\rho$, $a_1-\rho$; $b-\rho$, $b-\rho_1$; ... par a, a', b, b', les équations de la forme

$$\frac{(\alpha-\rho)\sqrt{abc'd'e'f'}\mp(\alpha-\rho_1)\sqrt{a'b'cdef}}{\rho-\rho_1}=0,$$

où α est un paramètre variable, représentent les courbes de contact d'un système de quadriques et de la surface. On obtient ainsi quinze systèmes; les quinze autres sont représentés par des équations un peu plus compliquées.

Le lieu des points pour lesquels l'une des coordonnées ρ, ρ_1 est constante est une section plane de la surface, section passant par un des points singuliers et enveloppant le cône des tangentes en ce point.

Picard. — Sur les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres.

L'auteur considère des surfaces n'ayant pas d'autres singularités que des courbes doubles, le long desquelles les deux plans tangents à la surface sont distincts. Le *genre* d'une surface d'ordre n est, d'après Clebsch, le nombre des coefficients restant arbitraires dans une surface d'ordre $n-4$ passant par la courbe double.

M. Picard montre que, si une telle surface jouit de cette propriété, que les coordonnées de l'un quelconque de ses points puissent s'exprimer par des fonctions abéliennes de deux paramètres, son genre est au plus égal à l'unité; il étend par là aux surfaces une propriété bien connue des courbes planes, propriété dont il donne d'ailleurs une démonstration nouvelle extrêmement simple.

Dillner (*G.*). — Sur un moyen général de déterminer les relations entre les constantes contenues dans une solution particulière, et celles que contiennent les coefficients rationnels de l'équation différentielle correspondante. (1498).

Tome XCIII; 1881, 2e semestre.

N° 1; 4 juillet.

La séance est levée, en signe de deuil, à cause de la mort de M. Henri Sainte-Claire Deville.

N° 2; 11 juillet.

Faye. — Sur la formation des queues des comètes. (11).

Villarceau (*Y.*). — Théorie de la flexion plane des solides, et conséquences relatives tant à la construction des lunettes astronomiques qu'à la réglementation de ces appareils, pour les affranchir des déviations de l'axe optique produites par la flexion. (14).

Janssen. — Note sur les photographies de la comète *b* 1881 et sur les mesures photométriques prises sur cet astre. (28).

Cruls. — Sur la comète de 1881, observée à l'Observatoire impérial de Rio-Janeiro. (32).

Trépied (*C.*). — Observations de la comète *b* 1881, faites à l'Observatoire d'Alger. (34).

Wolf (*C.*). — Observations de la comète *b* 1881. (36).

Thollon. — Observations spectroscopiques de la comète *b* 1881. (37).

Picart (*A.*). — Essai d'explication des queues de comètes. (39).

Prazmowski. — Sur la polarisation de la lumière des comètes. (41).

Gruey. — Nouvelle méthode pour déterminer certaines constantes du sextant. (41).

Poincaré (*H.*). — Sur les groupes kleinéens. (44).

L'auteur montre comment ses recherches sur les groupes fuchsiens et kleinéens se relient à la géométrie pseudo-sphérique de Lobatchefsky.

Dillner (*G.*). — Sur un moyen général de déterminer les relations entre les constantes contenues dans une solution particulière et celles que renferment les coefficients rationnels de l'équation différentielle correspondante. (47).

Brassine. — Sur les trois axes centrifuges. (49).

N° 3; 18 juillet.

Tisserand et *Bigourdan.* — Observations de la comète *b* 1881 faites à l'Observatoire de Paris. (106).

Villarceau (*Y.*). — Théorie de la flexion plane des solides, et conséquences relatives tant à la construction des lunettes astronomiques qu'à la réglementation de ces appareils, pour les affranchir des déviations de l'axe optique produites par la flexion. (107).

Jordan (*C.*). — Sur la réduction des formes quadratiques. (113).

Dans trois Communications successives (18 juillet, 25 juillet, 1er août), l'auteur traite de la réduction des formes quadratiques, de leur équivalence, et de la représentation d'un nombre ou d'une forme quadratique par une autre forme quadratique.

Voici d'abord son point de départ :

Une substitution

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n \end{vmatrix}$$

de déterminant δ est réduite si l'on a identiquement

$$\begin{aligned} &N(\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n) + \ldots + N(\alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n) \\ &\quad = \mu_1 N(x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \ldots + \varepsilon_{1n}x_n) + \mu_2 N(x_2 + \varepsilon_{22}x_3 + \ldots) + \ldots + \mu_n N(x_n), \end{aligned}$$

$N(x)$ représentant la norme de x, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ étant des quantités positives satisfaisant aux relations

$$\mu_{k+1} \overset{=}{>} \frac{1}{2}\mu_k, \quad \mu_1\mu_2\ldots\mu_n = N(\delta),$$

et $\varepsilon_{12}, \ldots, \varepsilon_{n-1,n}$ des quantités complexes dont la norme ne surpasse pas $\frac{1}{2}$.

Toute substitution, multipliée par une substitution convenable à coefficients entiers, donne une substitution réduite.

Une forme G, algébriquement équivalente à une forme F, sera dite réduite par rapport à F si, parmi les substitutions qui transforment F en G, il en est une qui soit réduite.

Soient maintenant F une forme quadratique à n variables, à coefficients quelconques et de discriminant $\Delta \gtrless 0$, et G une forme quadratique à coefficients entiers complexes, de même déterminant, et qui soit la transformée de F par la substitution réduite S; M. Jordan montre que deux cas peuvent se présenter : ou bien tous les coefficients de la réduite G sont limités (les réduites de cette sorte sont dites *ordinaires*); ou bien certains coefficients cessent d'être limités, et en revanche d'autres coefficients sont nécessairement nuls (réduites singulières).

Une fois cette étude faite, le problème : *Étant données deux formes quadratiques* F, G *à n variables et de même discriminant* $\Delta \gtrless 0$, *reconnaître si elles sont équivalentes, et déterminer les substitutions à coefficients entiers qui transforment* F *en* G, se trouve résolu par le théorème suivant :

Toute substitution à coefficients entiers qui transforme F *en* G *est un produit de substitutions à coefficients entiers et limités* (*en fonction des coefficients de* F *et de* G), *dont la première transforme* F *en* G, *chacune des suivantes transformant* G *en elle-même.*

Enfin le problème général de la transformation d'une forme quadratique en une autre de même nombre de variables et celui de la recherche des représentations d'une forme à m variables par une forme à n variables ($m < n$) se ramènent immédiatement au cas de l'équivalence dont le théorème précédent donne la solution.

Gyldén. — Sur l'intégration d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre dont dépend l'évection. (127).

Il s'agit d'une équation de la forme

$$\frac{d^2\rho}{dv_0^2} + \rho(1 + \Psi'_1) = \Psi'_0 + \Psi'_2\rho^2 + \ldots,$$

qu'on veut intégrer pour les petites valeurs de ρ, les Ψ' étant des séries de la forme

$$\beta_0 + \beta_1\cos(\lambda_1 v_0 + b_1) + \beta_2\cos(\lambda_2 v_0 + b_2) + \ldots;$$

l'auteur montre comment l'intégration, par approximation, dépend de l'intégration d'une équation de Lamé.

Flammarion. — Sur les queues des comètes. (135).

André (C.). — Sur la vision des étoiles à travers les comètes. (137).

Poincaré. — Sur une fonction analogue aux fonctions modulaires. (138).

Considérant l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y\left[\sum_{i=0}^{i=n}\frac{B_i}{x-a_i} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{(x-a_i)^2}\right],$$

où

$$\sum B_i = \sum a_i b_i - \frac{n-1}{4} = \sum a_i^2 B_i - \frac{1}{2}\sum a_i = 0,$$

et où

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

l'auteur définit une suite de fonctions qui jouent, par rapport aux intégrales de l'équation différentielle, le même rôle que les fonctions modulaires par rapport aux intégrales elliptiques.

N° 4; 25 juillet.

Mouchez. — Sur la comète b de 1881. (173).

Lœwy et Périgaud. — Détermination de la flexion horizontale, de la flexion latérale et de la flexion de l'axe instrumental du cercle méridien de Bischoffsheim, à l'aide du nouvel appareil. (174).

Jordan (C.). — Sur l'équivalence des formes quadratiques. (181).

Sylvester. — Sur les covariants irréductibles du quantic binaire du huitième ordre. (192).

Dans cette Communication et dans une Communication postérieure (22 août) M. Sylvester cherche à établir que, pour la forme binaire du huitième ordre, nul covariant irréductible du *degré-ordre* 10.4 ne peut exister : M. Von Gall avait rencontré un tel covariant qu'il n'avait pas réussi à décomposer. (*Math. Annalen,* 1880 et 1881).

Bigourdan (G.). — Éléments paraboliques de la comète *b*, 1881. (197).

Bigourdan (G.). — Observation de la comète *c* 1881 (découverte par M. Schaeberle à Ann-Arbor), faite à l'Observatoire de Paris. (198).

Henry. — Observation de la comète Schaeberle (*c* 1881), faite à l'équatorial ouest du jardin de l'Observatoire de Paris. (199).

Picart (A.). — Considérations sur les forces de la nature. Inadmissibilité de l'hypothèse proposée par M. Faye pour l'explication des queues des comètes. (199).

Callandreau (O.). — Remarques sur le calcul des perturbations relatives, d'après la méthode de M. Gyldén. (201).

N° 5; 1er août.

Faye. — Seconde Note sur la formation des queues des comètes. (229).

Jordan (C.). — Sur la représentation d'un nombre ou d'une forme quadratique par une autre forme quadratique. (234).

Bigourdan (G.). — Éléments et éphémérides de la comète *c* 1881 (Schaeberle). (258).

Thollon. — Observations spectroscopiques sur les comètes *c* et *b* 1881. (259).

Tacchini. — Sur les spectres des comètes Cruls et Schaeberle. (261).

Prazmowski. — De la constitution des comètes. (262).

Le Paige (*C.*). — Sur la théorie des formes trilinéaires. (264).

Sur la liaison entre la théorie de ces formes et celle des cubiques.

N° 6; 8 août.

Wolf. — Les étalons de poids et mesures de l'Observatoire et les appareils qui ont servi à les construire; leur origine, leur histoire et leur état actuel. (297).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (301).

L'auteur est parvenu à cette conclusion, que les Communications précédentes avaient fait pressentir :

Toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes.

Les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire.

Bjerknes. — Sur l'imitation, par la voie hydrodynamique, des actions électriques et magnétiques. (303).

N° 7; 16 août.

Jamin. — Sur les apparences cométaires.

N° 8; 22 août.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes et de la comète *b* de 1881, faites à l'Observatoire de Paris pendant le deuxième trimestre de l'année 1881. (357).

Faye. — Remarques au sujet d'une Note de M. Jamin sur les comètes. (362).

Faye. — Sur l'analyse spectrale appliquée aux comètes. (361).

Faye. — Sur la nature de la force répulsive exercée par le Soleil. (362).

Sylvester. — Sur les covariants irréductibles du quantic binaire du huitième ordre.

Schwedoff (*Th.*). — Sur les lois de la formation des queues cométaires. (373).

Willotte. — Sur un cas particulier de la théorie du mouvement d'un solide invariable dans un milieu résistant. (376).

Tacchini. — Observations solaires faites à l'Observatoire royal du Collège Romain, pendant le premier trimestre de 1881. (380).

Tacchini. — Observations des taches et des facules solaires, du mois d'avril au mois de juillet 1881. (382).

Thollon. — Études spectroscopiques sur les comètes *b* et *c* 1881. (383).

Égoroff. — Recherches sur les raies telluriques du spectre solaire. (385).

N° 9; 29 août.

Faye. — Note accompagnant la présentation du premier Volume de son « Cours d'Astronomie à l'École Polytechnique ». (397).

Govi (G.). — Sur une très ancienne application de l'hélice comme organe de propulsion. (400).

N° 10; 5 septembre.

Zenger. — Le spectroscope à vision directe appliqué à l'Astronomie physique. (429).

Coggia. — Observations de la comète de Schaeberle (*c* 1881), faites à l'Observatoire de Marseille à l'aide d'un équatorial de $0^m,26$ d'ouverture. (436).

Tempel. — Observations de la comète d'Encke. (438).

Lœwy. — Remarques sur des observations de la même comète, faites par M. Otto Struve, par M. Winnecke et par M. Hartwig. (438).

Respighi. — Sur la lumière des comètes. (439).

Cruls. — Sur les observations des météores du 25 juillet au 30 juillet 1881. (440).

N° 11 ; 12 septembre.

Villarceau (*Y.*). — Remarques à l'occasion du Mémoire de MM. Lœwy et Périgaud sur la flexion des lunettes. (449).

N° 12; 19 septembre.

Thomson (*W.*). — Sur les résistances relatives que l'on doit donner, dans les machines dynamo-électriques, aux bobines actives, aux électro-aimants inducteurs et au circuit intérieur. (474).

Melsens. — Sur le passage des projectiles à travers les milieux résistants, sur l'écoulement des solides et sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles. (485).

N° 13; 26 septembre.

Le Paige. — Sur les formes trilinéaires. (509).

Suite des recherches de l'auteur sur la liaison entre la théorie des formes trilinéaires et celle des cubiques circonscrites à un triangle; formules qui conduisent à l'expression des coordonnées d'un point de la cubique au moyen des fonctions elliptiques.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

Tome LXXXIX; 1880.

Weierstrass (*K.*). — Recherches sur les fonctions $2r$-uplement périodiques de $2r$ variables. (1-8).

Ce Mémoire se rattache à la publication, faite par le regretté M. Borchardt, des Leçons de M. Liouville sur les fonctions doublement périodiques. Insistons sur ces deux théorèmes :

« Soit $f(u_1, \ldots, u_r)$ une fonction quelconque $2r$-uplement périodique; supposons qu'au nombre de ses systèmes de périodes il se trouve aussi tous les systèmes des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r$ (des mêmes variables et qui forment un système de r fonctions $2r$-uplement périodiques appartenant à la même classe et indépendantes les unes des autres) : cela étant, il subsiste entre f et $f_1, f_2, \ldots, f_r$ une équation irréductible dont le degré par rapport à f est égal à m ou à un diviseur de m (où m est un nombre préalablement défini). »

« Au nombre des fonctions $2r$-uplement périodiques de la classe à laquelle f_1, $f_2, \ldots, f_r$ appartiennent, il y en a une infinité qui sont liées avec $f_1, f_2, \ldots, f_r$ par une équation irréductible de $m^{\text{ième}}$ degré; soit f_{r+1} une quelconque d'entre elles : toute fonction $f(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ qui jouit de la propriété signalée dans le théorème précédent est rationnellement exprimable par les $r+1$ fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r, f_{r+1}$. »

Hermite (*Ch.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. (Extrait d'une Lettre adressée à M. E. Heine). (9-18).

La Lettre s'occupe de la question que M. Heine avait adressée à M. Hermite : comment l'intégrale de l'équation de Lamé

$$D_\xi y = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\xi + h]y$$

peut se déduire, dans le cas limite du module égal à l'unité, de la solution que M. Hermite en a donnée au moyen des fonctions elliptiques. Cette solution est représentée par la formule $y = \mathrm{CF}(\xi) + \mathrm{C'F}(-\xi)$ où $\mathrm{F}(\xi)$, est une fonction doublement périodique de seconde espèce; il s'agit donc, si l'on introduit la variable $x = \operatorname{sn}\xi$, de voir quelle transformation analytique se trouve amenée par la supposition de $k = 1$. C'est cette recherche que M. Hermite fait en se plaçant à un point de vue moins particulier et en considérant en général les fonctions uniformes possédant la propriété caractéristique de $\mathrm{F}(\xi)$, à savoir :

$$\mathrm{F}(\xi + 2\mathrm{K}) = \mu \mathrm{F}(\xi), \quad \mathrm{F}(\xi + 2i\mathrm{K}') = \mu' \mathrm{F}(\xi),$$

où μ et μ' sont des facteurs constants.

Heine (*E.*). — Quelques applications du calcul des résidus de Cauchy. (19-39).

I. *Sur les intégrales eulériennes.* — M. Heine étudie une fonction $\mathrm{G}(a)$ définie par l'équation

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx = \frac{1}{\mathrm{G}(a)},$$

où a est un nombre complexe à partie réelle positive. L'équation

$$\mathrm{G}(a) = a\mathrm{G}(a+1),$$

à laquelle elle satisfait pour les nombres a à partie réelle positive, sert à la définir pour les autres valeurs de a.

II. *Sur les fonctions coniques.* — Pour faciliter le traitement de problèmes sur le potentiel d'un cône, M. Mehler a introduit des fonctions dont il a découvert certaines transformations importantes pour leur applicatiou et déduites par lui au moyen de différentes méthodes. (*Voir* à ce sujet : Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen,* I, § 70.) Ces transformations s'obtiennent sans beaucoup de calcul par un procédé uniforme, à savoir par la méthode de Cauchy mise à profit comme dans le premier numéro.

III. *La formule d'interpolation de Lagrange.* — Sur la possibilité de remplacer l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \psi(x)\,dx$ par l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$ si $\varphi(x)$ est la fonction donnée par la formule d'interpolation de Lagrange.

IV. *Développement en séries des fonctions d'une variable.* — Il s'agit de développer une fonction quelconque $f(\xi)$ suivant une espèce donnée de fonctions $\theta(\alpha, \xi)$ [par exemple $\cos(\alpha\xi)$, $\sin(\alpha\xi)$, $J_{,}(\alpha\xi)$, ...] qui contient un paramètre α qu'on a à remplacer par toutes les racines d'une équation transcendante donnée $\varpi(\alpha) = 0$ (par ex., $\sin\alpha\pi = 0$, ...).

Dans tous les cas connus on peut trouver le développement même, pourvu qu'on en ait démontré la possibilité et que la série cherchée converge uniformément. Mais Heine fait voir que ces théorèmes ont une telle liaison avec les théorèmes de Cauchy que, pour un certain nombre de fonctions, il en résulte la possibilité de les développer suivant les fonctions $\theta(\alpha, \xi)$.

Frobenius (*G.*). — Contribution à la théorie de la transformation des fonctions thêta. (40-46).

Signalons ces deux théorèmes : « D'une substitution qui transforme une forme bilinéaire alternée au déterminant 1 dans le n-uple d'elle-même, on obtient toutes les formes équivalentes, en la composant avec deux substitutions qui changent cette forme en elle-même. » — « Si deux substitutions transforment une forme bilinéaire unimodulaire de ν paire de variables dans le n-uple d'une autre forme unimodulaire, le produit du $a^{\text{ième}}$ invariant de l'une et du $(\nu - \alpha + 1)^{\text{ième}}$ invariant de l'autre est égal à n.

Hunyady (*E.*). — Contribution à la théorie des surfaces du second ordre. (47-69).

Le Mémoire étudie les différentes formes analytiques de la condition qui exprime que dix points sont situés sur une surface du second ordre; en particulier, M. Hunyady développe la dépendance mutuelle qui subsiste entre les équations de condition et qui est souvent difficile à démêler en présence de déterminants à un nombre excessif de termes.

Hunyady (*E.*). — Sur les critères donnés par Moebius dans la théorie des sections coniques. (70-78).

Démonstration, à l'aide des méthodes de Géométrie analytique, des critères donnés par Moebius dans son ouvrage « *Der barycentrische Calcul* » et qui font reconnaître : 1° si une parabole peut être tracée passant par quatre points donnés; 2° si cinq points donnés déterminent une ellipse ou une hyperbole, 3° si cinq tangentes données enveloppent une ellipse ou une hyperbole.

Quelques erreurs qui se sont glissées dans cette Note ont été signalées par M. Durège (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, juin 1880).

Hunyady (*E.*). — Le théorème de Desargues concernant des triangles perspectifs. (79-81).

Borchardt (*C. W.*). — Remarque relative au Mémoire de M. Sylvester sur les déterminants composés. (82-85).

Voir *Bulletin*, 2e sér., V_2, p. 102.

Fürstenau (*E.*). — Contributions à la théorie des déterminants. (86-88).

Königsberger (*Leo*). — Sur la réduction d'intégrales abéliennes à des formes d'intégrales moins élevées, en particulier à des intégrales elliptiques. (89-126).

D'abord M. Königsberger établit ce théorème qui s'attache à une formule de réduction préalablement développée : « Toute intégrale elliptique de première espèce qui appartient à une des intégrales elliptiques de la formule de réduction doit être égale à une des intégrales abéliennes de première espèce qui appartient à l'intégrale abélienne en question, ou bien il faut qu'il subsiste la relation

$$\int^{\zeta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int^{x_1} \mathrm{F}(x, y)\,dx,$$

où ζ est une fonction rationnelle de x_1 et y_1, si y_1 désigne la valeur de y pour $x = x_1$ et où l'irrationnelle $\eta = \sqrt{(1-\zeta^2)(1-c^2\zeta^2)}$ est, de même, rationnellement exprimable par x_1 et y_1. » Ainsi la question de la réduction générale des intégrales abéliennes se trouve réduite à celle de la réduction d'une intégrale de première espèce à une intégrale elliptique de première espèce. Un autre théorème donne les conditions nécessaires pour la réduction : « Pour une fonction algébrique déterminée par une équation

$$\mathrm{F}_0(x)\mathrm{Y}^{km} + \mathrm{F}_m(x)\mathrm{Y}^{(k-1)m} + \mathrm{F}_{2m}(x)\mathrm{Y}^{(k-2)m} + \ldots + \mathrm{F}_{km}(x) = 0,$$

l'intégrale de première espèce $\mathrm{Y}\,dx$ ne peut être réductible à une intégrale elliptique que lorsque m est égal à 2, 3, 4, 6, et alors les intégrales de réduction elliptiques seront dans les trois derniers cas :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t(t^3-1)}}. \text{ »}$$

Puis M. Königsberger étudie les conditions suffisantes pour la solution du problème; cette recherche se fait séparément et au long pour les valeurs différentes de m. Enfin la dernière Partie du Mémoire est consacrée à une généralisation des recherches antérieures.

Petersen (*Julius*). — La solution steinérienne du problème de Malfatti. (127-135).

La solution du problème de Malfatti, publiée par Steiner en 1826 au Tome I du même Journal, sans analyse et sans démonstration, a été démontrée pour la première fois par M. Schroeter en 1873, t. 77 du Journal, à l'exclusion d'autres moyens que les considérations qui précèdent chez Steiner la communication de sa solution.

Mais la déduction de M. Schroeter n'est guère plus simple. C'est pourquoi l'auteur fait part aux lecteurs du Journal de deux méthodes pour déduire, par la voie de la Géométrie synthétique, la solution steinérienne. L'une de ces méthodes était déjà contenue dans le Recueil de problèmes de M. Petersen : « Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques ». (Voir *Bulletin*, V_1, p. 265), tandis que l'autre n'a pas encore été publiée jusque-là

Milinowski. — Sur la théorie des polaires des courbes et surfaces du troisième ordre. (136-150).

M. Sturm a établi (t. 88 du Journ., *Bulletin* V_2, p. 107) ce théorème : « La surface satellite d'un point P par rapport à une surface de troisième ordre touche la première surface polaire de ce point suivant une section conique située dans le plan polaire de P. » En coupant par un plan les surfaces nommées, on obtient le théorème suivant : « La section conique coordonnée d'un point P par rapport à une surface du troisième ordre touche la première polaire de ce point dans ses points de rencontre avec la deuxième polaire. »

La déduction de M. Sturm pour les surfaces cubiques ne se prête pas à la démonstration du théorème dans le plan. M. Cremona l'a démontré par le calcul dans son livre *Introduzione,* etc. M. Milinowski déduit actuellement la proposition par des considérations toutes nouvelles et qui ne sortent pas du plan; en même temps il parvient à établir ainsi les propriétés principales des polaires et des centres des moyennes harmoniques.

Fuchs (L.). — Sur une classe de fonctions à plusieurs variables qui doivent leur naissance à l'inversion de solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (151-169).

C'est le Mémoire cité par M. Fuchs dans les Notes qui ont paru au *Bulletin,* 2e sér., t. IV_1, p. 328. Voici comment il annonce le but qu'il a eu en vue :

« Les fonctions de plusieurs variables, qu'on nomme *abéliennes,* doivent leur naissance aux intégrales de fonctions algébriques, où l'on conçoit, d'après Jacobi, les limites supérieures de p intégrales d'une fonction algébrique convenable comme étant des fonctions de la somme de ces intégrales et de $p-1$ autres sommes formées d'une manière semblable. De même une nouvelle classe de fonctions de plusieurs variables prend naissance lorsqu'on parle des intégrales qui forment les solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. J'ai posé d'abord le problème de rechercher la propriété des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène de $m^{\text{ième}}$ ordre si les m équations

$$\sum_1^m {}_i\int_{\zeta_i}^{z_i} f_a(z)\,dz = u_a,\quad (a=1,2,\ldots,m),$$

[où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ désignent des constantes, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ un système fondamental de solutions de l'équation différentielle] servent à définir z_1, $z_2 \ldots, z_m$ comme fonctions analytiques de $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

» J'ai achevé ce problème pour les équations différentielles du second ordre et je me permets de publier les résultats auxquels je suis parvenu. »

Stahl (Hermann). — Sur la solution du problème d'inversion de Jacobi (170-184).

Le problème consiste, d'après Riemann, à représenter dans les équations

$$v_k = \sum_1^p {}_i\int_{c_i}^{(s_i z_i)} du_k,\quad (i,k=1,2,\ldots,m)$$

des quotients simples des $\mathfrak{S}$ aux arguments $v_1, v_2, \ldots, v_g$, augmentés de parties fractionnaires de systèmes de périodes ayant le dénominateur m d'une manière algébrique et symétrique par les coordonnées (s_i, z_i) des limites supérieures. — La solution simple et symétrique de M. Stahl correspond exactement aux équations finales de M. Weierstrass pour les intégrales hyperelliptiques et pour $m = 2$. Une idée de Riemann et cette façon des équations du problème d'inversion dont MM. Prym et Weber se sont servis ont montré à M. Stahl le chemin qu'il fallait prendre pour obtenir la fonction algébrique symétrique dans les coordonnées des limites supérieures.

§ 1. Relations entre les fonctions $\mathfrak{S}$ et les fonctions radicales. — § 2. Relations algébriques entre des fonctions radicales. — § 3. La solution du problème d'inversion.

Frobenius (*G.*). — Sur le théorème d'addition des fonctions $\mathfrak{S}$ de plusieurs variables. (185-220).

§ 1. Définitions. — Caractéristique est le nom d'un système de 2ρ nombres entiers

$$A = \begin{bmatrix} \nu_1, & \nu_2, & \nu_\rho \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_\rho \end{bmatrix}$$

rangés en deux lignes et ρ colonnes. Une caractéristique s'appelle *paire* ou *impaire*, suivant que l'expression $|A| = \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \ldots + \mu_\rho\nu_\rho$ est paire ou impaire. Deux caractéristiques sont nommées *égales* si leurs nombres correspondants sont égaux; *congrues* si ces nombres sont congrus (mod. 2), etc. — § 2. Systèmes göpéliens de caractéristiques. — § 3. Le théorème d'addition. — Soient donnés un système göpélien de $r = 2^\rho$ caractéristiques et les fonctions $\mathfrak{S}_\alpha(u)$ qui leur correspondent $(\alpha = 0, 1, \ldots, r-1)$. Cela étant, chacun des r produits

$$\mathfrak{S}_g(u+v).\mathfrak{S}_\lambda(u+w)$$

est rationnellement exprimable par les quantités $\mathfrak{S}_\alpha(u+v+w)$, $\mathfrak{S}_\alpha(v+w)$, $\mathfrak{S}^\alpha(u)$, $\mathfrak{S}_\alpha(v)$, $\mathfrak{S}_\alpha(w)$, $\mathfrak{S}_\alpha(0)$. En appliquant ce théorème à la déduction donnée par M. Weber dans son travail sur la théorie de la transformation des fonctions thêta, on trouve que chacune des r fonctions transformée Θ peut être représentée comme fonction entière du degré k des r fonctions $\mathfrak{S}_\alpha$ (où k est le degré de la transformation). En même temps on obtient le théorème analogue sur la multiplication sans qu'on ait besoin de la composer de deux transformations supplémentaires. — § 4. Conséquences du théorème d'addition. — § 5. Systèmes fondamentaux de caractéristiques. — § 6. — Le théorème d'addition. — Les deux derniers paragraphes s'occupent de la formule établie par M. H. Stahl (*Journ.*, t. 88, p. 177) et désignée par ce géomètre comme théorème d'addition des fonctions $\mathfrak{S}$.

Hettner (*G.*). — Contribution à la théorie de la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments (221-246).

L'auteur développe, par une méthode qui lui est particulière et qui est en quelque sorte plus générale que celle de Borchardt, le résultat principal de cette théorie.

Pasch. — Sur certains déterminants qui se produisent dans la théorie des sections coniques. (247-251).

Pasch. — Une proposition algébrique avec ses applications géométriques. (252-256).

Soit $G(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ une fonction entière de x du degré n et soit $\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_m \, (m < n)$ un diviseur de $G(x)$ du degré m : il s'évanouira tous les déterminants du degré $n - m + 2$ pris dans le système de $n - m + 2$ lignes :

$$\begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_m & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{matrix}$$

Radicke (A.). — Sur la théorie des nombres d'Euler. (257-261).

Les formules récurrentes, connues depuis longtemps pour les nombres de Bernoulli, exigeaient, pour le calcul de la valeur d'un quelconque d'entre eux, la connaissance de la valeur de tous ceux qui précèdent. MM. Seidel et Stern en ont découvert d'autres qui ne demandent que la connaissance de quelques-uns des nombres de Bernoulli qui précèdent immédiatement. M. Radicke montre qu'il existe des formules récurrentes analogues à celles-ci pour les nombres d'Euler ainsi que pour les sommes des puissances de tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à un nombre quelconque x.

Frobenius (G.). — Sur la série de Leibnitz (262-264).

Soit S_n une quantité dépendant de n; supposons que, n croissant indéfiniment, le quotient $\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$ tende à une limite finie déterminée; alors, si x tend en croissant continuellement vers 1, $(1 - x), (S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \ldots)$ convergera vers la même limite.

Killing (W.). — Le calcul dans les formes non euclidiennes de l'espace. (265-287).

Outre la formule euclidienne de l'espace, il faut distinguer celle de Lobatchefsky où la droite est infinie et la somme des angles d'un triangle différente de deux angles droits ; celle de Riemann où la droite est fermée et le plan sépare l'espace ; et la troisième appelée par M. Killing la forme polaire de l'espace de Riemann et qui n'est pas séparée par le plan. Les procédés qui ont fait découvrir ces trois formes ne tranchent pas la question de savoir si les quatre formes connues sont les seules qui satisfassent aux hypothèses d'Euclide, à l'exception des deux derniers axiomes, ou si l'on peut en trouver de nouvelles. M. Killing démontre que, pour le domaine du réel, il n'existe que ces quatre formes, mais que, dans la Géométrie de Lobatchefsky, plusieurs possibilités sont imaginables pour un domaine idéal qui se lie avec le réel à l'infini.

Introduction. — Formes de l'espace à deux dimensions. — Formes de l'espace à trois dimensions. — Appendice.

Voigt (W.). — Théorie du point lumineux. (288-321).

Examinant l'admissibilité de la théorie des phénomènes de diffraction d'après

Fresnel, M. Voigt s'est trouvé amené à traiter, à l'aide de la théorie de l'élasticité, la loi suivant laquelle un point lumineux propage ses vibrations en tous sens. — En tirant avec Fresnel ordinairement de la loi de vibration $f(t)$ d'un point lumineux celle qui subsiste pour un endroit à la distance r, à savoir $\frac{c}{r}\cdot f\left(t-\frac{a}{r}\right)$, où a désigne la vitesse de propagation, on emploie un procédé qui n'est presque point fondé : c'est ce qu'on voit déjà en considérant que cette formule n'a pas égard à la position mutuelle de r et de la direction du mouvement. Toutefois cette direction doit nécessairement être d'une grande influence, surtout quand, en Optique, on suppose le milieu comme incompressible. Dans ce cas, on est même aisément porté à penser que pour les directions différentes le mouvement pourrait se propager non seulement avec des intensités différentes, mais encore avec des vitesses différentes, par exemple avec une vitesse infiniment grande dans la direction du déplacement même.

Le problème traité par M. Voigt a été énoncé par lui comme il suit : « Dans un milieu illimité, élastique, mais incompressible (éther) qui, pour le temps $t = 0$, ne possède nulle part ni déplacements ni vitesses, une sphère fait des oscillations, selon une loi donnée, mais indépendante de la longitude géographique sur elle. Les molécules de l'éther contiguës à la sphère lui adhèrent fortement. Déterminer l'état du milieu entier à une période quelconque. » On a supposé que les molécules voisines se meuvent avec la sphère, pour pouvoir appliquer les résultats au cas, bien imaginable pour un point lumineux, qu'une partie globiforme de l'éther même ait un mouvement donné. La méthode d'intégration dont l'auteur s'est servi a été inventée par Riemann et se trouve dans son Mémoire sur la propagation d'ondes planes de l'air à amplitude finie d'oscillations (*Œuvres complètes*, p. 145).

I. Propagation de vibrations tordantes. — La sphère rigide exécute des oscillations tordantes données auxquelles se conforment complètement les parties immédiatement contiguës du milieu. Déterminer l'état du milieu en un endroit quelconque à une période quelconque. — II. Propagation d'oscillations rectilignes. 1. Construction des équations différentielles et séparation des inconnues. 2. Intégration générale des équations pour λ et φ. 3. Déterminations de $\overline{\varphi_g}$, $\overline{\frac{\partial\varphi_g}{\partial e}}$ et de λ par les grandeurs données. 4. Calcul des quantités cherchées ρ et ω au moyen des quantités trouvées φ et λ.

Voigt (*W.*). — Sur la théorie de la diffraction de Fresnel. (322-331).

La théorie de Fresnel (*Mém. de l'Acad.*, t. V) fournit des résultats qui conviennent complètement avec l'expérience, eu égard aux intensités de la lumière, mais elle entraîne un paradoxe eu égard à la phase de la lumière propagée, puisqu'elle la laisse indéterminée à un multiple quelconque de $\frac{\pi}{2}$ près. Cette circonstance a été pleinement discutée par M. Voigt (t. III des *Annales de Wiedemann*) et en même temps il a prouvé que nulle hypothèse auxiliaire qui laisse subsister l'idée fondamentale de Fresnel ne permet de réparer la faute ; de plus il a développé des formules qui donnent les mêmes intensités que celles de Fresnel, mais aussi la phase véritable. Depuis la publication de ces recherches, qui partaient des équations différentielles d'élasticité, M. Voigt a découvert un chemin beaucoup plus court que celui dont il s'était alors servi pour parvenir aux équations du problème, et cette nouvelle méthode fait l'objet du Mémoire que nous avons sous les yeux. — M. Voigt insiste encore sur l'origine de la faute commise par Fresnel; il la trouve dans la méthode employée par Fresnel, pour calculer l'effet d'une surface lumineuse, ou plus généralement dans la disconvenance du principe de la coexistence de petits mouvements comme base universelle de l'Optique.

Mertens (*F.*) — Contribution à la théorie des formes quadratiques à déterminant positif. (332-338).

Nouvelle démonstration de la proposition, qui est fondamentale dans la théorie des formes binaires quadratiques à déterminant positif, non carré, que deux formes réduites de déterminants égaux ne peuvent être proprement équivalentes que quand elles appartiennent à la même période.

Laguerre (*E.*). — Sur quelques théorèmes de M. Hermite; extrait d'une Lettre adressée à M. Borchardt. (339-342).

Stieltjes. — Note sur un nouvel algorithme. (343-344).

E. Lampe.

ÖFVERSIGT af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar (1).

Tome XXXIII; 1876.

Edlund (*E.*). — Remarques touchant la dilatation galvanique. (N° 1, 5-16).

Bjorling (*C.-F.-E.*). — Sur les lignes réciproques des foyers. (N° 1, 17-24).

On donne dans un plan une courbe algébrique réelle du $n^{\text{ième}}$ ordre $C_n = 0$, en même temps qu'un point O, dont les coordonnées rectangulaires sont $x = h$, $y = k$. Si I, J sont les points circulaires à l'infini, et que les points où les lignes OI, OJ coupent la courbe soient respectivement désignés par

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n;\quad j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_n,$$

l'auteur appelle les n^2 lignes

$$\begin{array}{l} i_1 j_1,\ i_2 j_2,\ \ldots.\ i_1 j_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ i_n j_1,\ i_n j_2,\ \ldots,\ i_n j_n, \end{array}$$

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 71.

les lignes réciproques des foyers, ou les lignes F de la courbe C_n par rapport à O.

Dunér (N.-C.). — Recherches sur le noyau et sur les parties les plus voisines du noyau de la grande comète de 1874. (N° 1, 25-28).

Gyldén (H.). — Transformation d'une expression contenant des transcendantes elliptiques, et application de cette transformation au développement de la fonction perturbatrice. (N° 2, 3-9).

Jäderin (E.). — Détermination de lieux géographiques dans l'expédition suédoise à la Novaïa Zemlia et à la mer de Kara en 1875. (N° 2, 39-56).

Gyldén (H.). — Sur l'influence des inégalités à longues périodes sur l'expression des perturbations absolues des comètes périodiques. (N° 3, 5-19).

Björling (C.-F.-E.). — Sur les covariants simultanés de quatrième ordre et de quatrième classe relatifs à deux coniques. (N° 3, 21-27).

Mittag-Leffler (G.). — Méthode pour représenter analytiquement une *fonction de caractère rationnel,* qui reste toujours infinie seulement en quelques *points d'infini* désignés d'avance, dont *les constantes* sont données à volonté. (N° 6, 3-16).

Mittag-Leffler (G.). — Méthode pour déduire, dans la théorie des fonctions elliptiques, les doubles produits infinis des formules de multiplication. (N° 6, 17-25).

Nyström (C.-A.). — Comparaison quantitative entre l'électricité de frottement et l'électricité galvanique, au point de vue de la tension. (N° 6, 61-65).

Daug (H.-Th.). — Sur la marche des changements qu'éprouve une surface lorsqu'on la déforme. (N° 8, 3-7).

L'auteur tire des méthodes de Gauss le résultat suivant :

« *Dans la déformation d'une surface, chaque tangente conserve sa place dans le plan tangent, et au point de contact et dans son voisinage immédiat toutes les courbes qui ont une tangente commune se touchent sur une seule et* *même sphère, dont la grandeur varie par suite de la déformation, mais dont le centre reste toujours situé sur la normale à la surface, tandis qu'en même temps chaque courbe en particulier se transporte sur sa sphère spéciale, dont le rayon est constant, et dont le centre est situé dans le plan tangent à la surface.* »

Thiele (*T.-N.*). — Quelques théorèmes géométriques se rapportant à un problème d'Astronomie théorique. (N° 9, 3-6; danois).

Il s'agit du problème connu de la détermination de l'orbite elliptique d'un corps céleste, supposé se mouvant autour du Soleil suivant les lois de Kepler, lorsqu'on connait deux lieux héliocentriques et les époques correspondantes t_1, t_2.

Lindman (*C.-F.*). — Remarques sur les *Tables d'intégrales définies* du Dr Bierens de Haan (Amsterdam, 1858). (N° 9, 7-27).

Indication d'un certain nombre de fautes qui s'étaient glissées dans la première édition de cet important ouvrage.

Dahlander (*G.-R.*). — Expériences sur le refroidissement des corps dans les liquides. (N° 9, 29-57).

L'auteur résume ainsi les résultats de son travail :

La vitesse avec laquelle un corps se refroidit dans un liquide est à peu près indépendante de sa profondeur au-dessous de la surface du liquide; elle est toutefois plutôt moindre que plus grande, lorsque le corps est situé tout près de la surface.

La nature de la surface du corps plongé n'exerce qu'une minime influence sur la vitesse du refroidissement. Si l'on revêt la surface d'un enduit, le refroidissement se ralentit, tandis que la résistance au passage de la chaleur augmente.

La vitesse de refroidissement v pour un excès de température x au-dessus de la température ambiante peut s'exprimer, au moins approximatixement, par la formule

$$v = ax + bx^2,$$

a et b étant indépendants de x, mais dépendants au contraire de la nature du fluide environnant et de la température, ainsi que de la forme du corps qui se refroidit. D'après cela, l'excès de température au bout du temps t peut être représenté par la formule

$$x = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0} + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}}.$$

Ces formules sont applicables au moins jusqu'à un excès de température de 60°.

La vitesse de refroidissement pour un même corps et un même fluide, avec un même excès de température, croît très rapidement avec la température du fluide.

Le mercure, les circonstances étant les mêmes, refroidit un corps plus vite que l'eau, et celle-ci plus vite que l'alcool.

Tome XXXIV; 1877.

Edlund (*E.*). — Réponse à quelques remarques qui ont été présentées contre la théorie des phénomènes électriques. (N° 1, 3-16).

Il s'agit des articles publiés par C. Neumann (*Poggendorff's Annalen,* t. CLV et CLIX), et par Chwolson (*Ibid.,* Ergänzungsband 8, p. 140).

Mittag-Leffler (*G.*). — Additions à la représentation analytique des fonctions d'un caractère rationnel. Ire Partie. (N° 1, 17-32).

« Si une fonction *entière* et *rationnelle* de la variable x, du degré n, prend, aux points

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1},$$

les valeurs

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, y_{n+1},$$

cette fonction, comme on sait, pourra être représentée analytiquement par la formule d'interpolation de Lagrange,

$$\sum_{1}^{n+1}{}_r\, y_r \prod_{1}^{n+1}{}^{r}_{r'} \frac{(x - x_{r'})}{(x_r - x_{r'})}.$$

» On peut se poser la question de savoir jusqu'à quel point on peut généraliser cette formule, de manière qu'elle subsiste lors même que n devient *infiniment grand,* ou que la fonction *entière* de la variable x se change en une fonction de cette variable ayant un *caractère entier*. L'étude de cette question a conduit l'auteur à une généralisation fondamentale du problème qu'il a traité dans le Mémoire intitulé : *Méthode pour représenter analytiquement une fonction d'un caractère rationnel, qui devient infinie, toujours et seulement alors, en certains points d'infini désignés, dont les constantes sont désignées d'avance* (1).

» Une *fonction de caractère rationnel* peut, dans le voisinage d'un infini a, s'exprimer au moyen d'une série contenant des puissances négatives, en nombre fini. L'auteur a donné précédemment aux coefficients de ces puissances négatives le nom de *constantes de l'infini a,* nom qu'il remplace ici par celui de *coefficients du développement d'indice négatif correspondant à l'infini a.*

» Dans le précédent travail, l'auteur a donné la représentation complète de la fonction, tous les *infinis* et tous les *coefficients correspondants d'indice négatif* étant connus d'avance. Dans le travail actuel, on admet seulement que pour

(1) *Öfversigt,* etc., t. XXXIII, 1876, n° 6, p. 3-16.

chaque infini, outre tous les *coefficients d'indice négatif,* on connaît un certain nombre des coefficients d'indice positif. »

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique d'une fonction de caractère rationnel, ayant un *point-limite* arbitrairement choisi. (N° 1, 33-43).

Une fonction de *caractère rationnel* perd en général ce caractère pour prendre un caractère entier, lorsque la variable indépendante *croît à l'infini,* ou lorsqu'elle passe par le point $x = \frac{1}{0}$. Par une simple substitution, on peut faire en sorte que la fonction conserve son caractère rationnel pour $x = \frac{1}{0}$, mais qu'elle le perde pour une valeur *finie* arbitrairement désignée de cette variable. Cette valeur a reçu de M. Weierstrass le nom de *point-limite.*

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation d'une fonction de caractère rationnel avec un nombre *fini* de points-limites arbitrairement désignés. (N° 2, 31-41).

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la question de la représentation analytique d'une *fonction de caractère rationnel par le quotient de deux séries convergentes de puissances.* (N° 3, 5-13).

Björling (*C.-F.-E.*). — Sur le lieu des centres de courbure des surfaces du second degré, exprimé sous la forme d'un contravariant simultané de deux formes quadratiques quaternaires. (N° 4, 3-7).

Forssman (*L.-A.*). — Sur l'induction unipolaire par l'action des solénoïdes. (N° 4, 15-19).

Edlund (*E.*). — Sur la liaison entre l'induction unipolaire et les phénomènes électromagnétiques de rotation. (N° 7, 3-12).

Åstrand (*J.-J.*). — Nouvelle méthode pour la résolution des équations trinômes. (N° 7, 49-56).

Lorsqu'une équation peut se ramener à la forme trinôme

$$x^n \pm (+ ax^p) \pm b = 0,$$

on commence par la ramener, à l'aide de substitutions très simples, à la forme

$$y^q \pm y \pm P = 0.$$

On peut ensuite développer les racines de cette équation, sous forme de radicaux continus, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (\mp P \mp y)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\mp P \mp (\mp P \mp y)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\{\mp P \mp \left[\mp P \mp (\mp P \mp y)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pm y_2 &= \mp P - y^q \\
&= \mp P - (\mp P - y^q)^q \\
&= \mp P - [\mp P - (\mp P - y^q)^q]^q \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

$$
y_3 = \left(\mp 1 \mp \frac{P}{y}\right)^{\frac{1}{q-1}} = \ldots
$$

$$
y_4 = \frac{\mp P}{\pm 1 + y^{q-1}} = = \frac{\mp P}{\pm\left(1 + \frac{\mp P}{\pm 1 + y^{q-1}}\right)^{q-1}} = \ldots.
$$

En s'aidant des logarithmes, on parviendra souvent, par cette méthode de calcul, à déterminer au moins une partie des racines, ce qui facilite la détermination des autres.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique de fonctions de caractère rationnel, de plusieurs variables indépendantes. (N° 10, 3-13 et 17-31).

Tome XXXV; 1878.

Lindman (*C.-F.*). — Remarques sur les *Tables d'intégrales définies* du Dr Bierens de Haan. (Amsterdam, 1858). *Suite*. (N° 1, 3-46).

Petterson (*O.*) et *Hedelius* (*Em.*). — Sur la chaleur spécifique du fer et du mercure. (N° 2, 35-51).

Petterson (*O.*). — Sur la chaleur latente de l'eau à des températures au-dessous de 0°, avec quelques remarques sur la formation des glaces dans la mer. (N° 2, 53-61).

Edlund (*E.*). — Remarques sur la force électromotrice qui se produit dans l'écoulement des liquides à travers un tube. (N° 3, 5-9).

Hamberg (*H.-E.*). — Sur le degré variable de la transparence de l'air à Upsal. (N° 3, 87-103).

Cronstrand (*Baltz.*). — Journal météorologique d'un voyage dans l'Égypte, l'Arabie et la Nubie pendant les années 1836-1837. (N° 4, 15-45).

Gyldén (*H.*). — Lois de la rotation d'un corps solide dont la surface est recouverte d'un fluide. (N° 7, 3-18).

« Le problème traité dans ce Mémoire, en vertu de la nature même des données, n'est pas complètement déterminé, et partant n'est pas susceptible de solution sans l'établissement de quelque hypothèse. » Il en serait tout autrement si l'on indiquait la constitution du corps solide, c'est-à-dire sa figure extérieure et la distribution intérieure de la masse, ou, en d'autres termes, son potentiel par rapport aux points situés sur la surface ou dans son voisinage, ainsi que la quantité et la pesanteur spécifique du fluide.

Dans le cas qui intéresse le plus les physiciens, c'est-à-dire dans la question de la rotation de la Terre, de pareilles déterminations sont impossibles. On connaît certainement avec une assez grande exactitude la valeur de la différence entre les moments d'inertie, dans l'hypothèse toutefois de l'égalité de deux de ces moments; mais, sur la nature de la fonction potentielle relative à la surface, il règne encore une grande incertitude, si l'on ne veut pas se contenter d'admettre que la masse terrestre soit un ellipsoïde de révolution homogène. Cette supposition n'est pas non plus applicable ici, puisque l'eau des océans n'est pas, de fait, distribuée symétriquement par rapport à l'axe de rotation. Ajoutons à cela, ce qui est d'une importance capitale pour notre objet, que l'on n'est en aucune sorte autorisé à admettre que la constitution de la surface terrestre a été toujours identique, même approximativement.

Il est au contraire tout à fait vraisemblable qu'elle n'a acquis que successivement et dans les dernières périodes de son développement sa forme actuelle, qui correspond assez exactement à sa figure d'équilibre, et cela par suite de l'action de l'eau et de l'atmosphère sur ses parties solides. L'action simultanée d'autres circonstances sur la configuration de la surface terrestre est une conséquence indubitable de la présence des continents et des hautes chaînes de montagnes.

On peut très bien s'imaginer une transformation des vallées, des continents et des Océans, dans les limites de leurs différences de hauteur actuelles, telle que le moment d'inertie actuel du solide terrestre ait éprouvé des variations essentielles dans sa grandeur et dans sa direction, d'où il serait résulté alors un changement de position de l'axe de rotation de la masse de la Terre. Nous ne pouvons donc nous représenter autrement la forme de la surface terrestre dans les périodes antérieures, qu'en admettant qu'elle n'a jamais été très différente d'une sphère. A mesure que la position de l'axe de rotation dans l'intérieur de la masse terrestre est devenue plus constante, la forme ellipsoïdale s'est dessinée; mais rien ne nous force à admettre que cette forme ait toujours été aussi nettement accusée qu'elle l'est maintenant. Les influences exercées sur la position de l'axe de rotation dans le solide terrestre et dans l'espace par les changements de direction et de grandeur des axes des moments d'inertie ont été étudiés par l'auteur dans un Mémoire intitulé *Recherches sur la rotation de la Terre*, Upsal, 1871.

« Le rapport entre les masses solides et fluides du globe terrestre peut certainement s'évaluer avec approximation; rien ne dit cependant que ce rapport ait toujours été le même. D'une part, l'eau peut avoir été chimiquement combinée avec la masse solide; d'autre part, une portion considérable des particules d'eau peut avoir été séparée du globe terrestre par la force centrifuge, tandis que la masse des particules solides a pu être accrue par la chute de corps recueillis dans l'espace. Mais lors même que le rapport entre les parties solides et liquides de la masse serait fixé avec toute la certitude désirable, ce serait encore un problème très difficile que celui de déterminer la variation de la direction des axes principaux et des moments d'inertie, qui aurait lieu par suite d'un changement de position de l'axe de rotation dans l'intérieur du globe terrestre. Il est évident toutefois que, si la masse solide de la Terre était une sphère homogène, la grandeur des moments d'inertie resterait invariable, tandis que leurs axes suivraient l'axe de rotation, et cela de telle manière que l'un des axes principaux coïncidât toujours avec l'axe de rotation. Si, au contraire, la fonction potentielle du globe terrestre était de telle nature que les différences entre les composantes des forces fussent infiniment grandes par rapport aux produits de la force centrifuge et au rapport de la masse des eaux à la masse solide de la Terre, la distribution des eaux serait évidemment la même, quelque position que prît l'axe de rotation relativement aux axes principaux. »

Björling (*C.-F.-E.*). — Sur les équivalents aux singularités d'ordres supérieurs des courbes algébriques planes. (N° 7, 33-44).

Möller (*Ax.*). — Éléments et éphéméride pour le retour de la comète de Faye en 1880. (N° 7, 45-52).

Petterson (*O.*). — Sur la variabilité de la chaleur spécifique du mercure avec la température. (N° 9, 3-16).

Backlund (*J.-O.*). — Sur une formule de la théorie des perturbations. (N° 9, 35-41).

A l'aide d'une formule donnée par M. Gyldén dans son *Recueil de Tables*, l'auteur montre comment on peut obtenir, avec une merveilleuse facilité, le développement de la fonction perturbatrice.

Tome XXXVI; 1879.

Gyldén (*H.*). — Lois de la rotation d'un corps solide, dont la surface est recouverte d'un fluide. Seconde Communication. (N° 3, 5-15).

« Le résultat de cette étude peut se résumer brièvement comme il suit. Un corps solide animé d'un mouvement de rotation, et dont la surface est recouverte d'un fluide, tend, en vertu du frottement des particules fluides contre les particules solides, à prendre un état d'équilibre, dans lequel l'axe instantané de rotation coïnciderait avec un axe principal. Avant que cet état d'équilibre soit atteint, la rotation s'effectue suivant la même loi que celle qui a lieu pour un corps solide, avec cette différence toutefois que le coefficient μn a une autre signification que dans le cas d'un corps entièrement solide, et de plus que les quantités a, n et r, ainsi que le module k, dépendant de a et de n, ne sont plus des constantes, mais des fonctions du temps, dont il a été trouvé, dans ce qui précède, des expressions approchées. »

Mittag-Leffler (*G.*). — Intégration d'une classe d'équations différentielles linéaires. (N° 3, 17-40).

Si l'on considère une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad y^{(n)} = f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + f_n(x)y,$$

l'auteur examine d'abord à quelles conditions doivent satisfaire les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ pour que chaque intégrale de l'équation soit de caractère rationnel.

Cette question étant résolue, l'auteur, considérant que toute fonction de caractère rationnel peut toujours se mettre sous la forme normale d'un quotient de deux séries convergentes de puissances, se pose le problème suivant :

Les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ étant supposées satisfaire aux conditions obtenues, construire un système fondamental de n intégrales particulières de l'équation (1), *qui soit tel que chacune des intégrales particulières soit le quotient de deux séries de puissances, procédant suivant les puissances entières et positives de la variable x, et absolument convergentes pour toutes les valeurs finies de cette variable.*

Pettersson (*O.*) et *Larsson* (*H.*). — Sur la dilatation de la glace. (N° 3, 65-74).

Möller (*Ax.*). — Nouveaux éléments de la planète Pandore, déduits des observations de 16 oppositions, 1858-1877. (N° 4, 3-40).

Wenström (*J.*). — Contribution à la théorie de la chaleur rayonnante. (N° 4, 41-48).

Gyldén (*H.*). — Détermination des rapports différentiels de l'anomalie vraie et du rayon vecteur dans une orbite elliptique relativement à l'excentricité. (N° 6, 3-8).

Lindman (*C.-F.*). — Réduction de quelques intégrales définies aux intégrales elliptiques. (N° 6, 9-15).

Fagerholm (*J.-A.*). — Nivellement et recherches sur les hauteurs au-dessus du niveau de la mer d'une partie des phares de la Suède, exécutés dans l'été de 1878. (N° 7, 21-37).

Rosén (*P.-G.*). — Sur la hauteur du pôle à Stockholm. (N° 8, 3-17).

Les résultats obtenus sont les suivants :

Hauteur du pôle, 1° pour la tour de l'Observatoire de l'État-Major,

$$59°20'35'',96 \pm 0'',145;$$

2° pour le cercle méridien de l'Observatoire,

$$59°20'32'',93 \pm 0'',145.$$

Eneström (*G.*). — Un critérium de convergence du commencement du XVIII^e siècle. (N° 9, 71-84).

Il s'agit d'un critérium de convergence donné par Stirling dans son Traité intitulé : *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum* (Londini, 1730, p. 37-39). Ce critérium est non seulement le plus ancien que l'on connaisse, mais il a l'avantage de s'appliquer immédiatement aux produits infinis.

Jäderin (*Edv.*). — Méthode pour la mesure géodésique d'une base à l'aide d'un ruban d'acier. (N° 9, 103-126).

Eneström (*G.*). — Sur la découverte de la formule sommatoire d'Euler. (N° 10, 3-17).

Cette formule a porté, depuis sa découverte, tantôt le nom d'Euler, tantôt celui de Maclaurin, ces deux grands géomètres l'ayant trouvée chacun de leur côté. Mais jusqu'ici on n'avait pas fait de recherches assez complètes pour décider auquel des deux appartient réellement la priorité. M. Eneström s'est occupé de cette question historique, et il est parvenu à établir que la première publication de cette formule est due à Euler, qui l'a fait paraître, en 1738, dans les *Mémoires de Pétersbourg*, tandis que le *Treatise on Fluxions* de Maclaurin n'a vu le jour que *quatre ans plus tard*, en 1742. C'est donc à tort que, suivant les indications de Jacobi, on avait attaché à cette série le nom du géomètre écossais à la place de celui d'Euler, qui avait prévalu jusque-là.

Tome XXXVII; 1880.

Lindman (*C.-F.*). — Sur quelques équations différentielles. (N° 1, 3-8).

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur l'intégration de certaines classes d'équations différentielles linéaires et homogènes. (N° 6, 59-77).

Intégration de l'équation de Brioschi,

$$y'' = \left[\frac{n(n+2)}{4}k^2 \operatorname{sn}^2 x + h\right] y.$$

Edlund (*E.*). — Sur la détermination quantitative du développement de chaleur d'un courant galvanique. (N° 8, 3-6).

Edlund (*E.*). — Sur la dépendance entre la force électromotrice provenant de l'écoulement d'un fluide à travers un tube et le rayon de ce tube. (N° 9, 3-11).

Lindman (*C.-F.*). — Quelques intégrales définies. (N° 9, 13-31).

Gyldén (*H.*). — Sur l'orbite d'un point qui se meut dans le plan de l'équateur d'un sphéroïde sous l'influence d'une force attractive suivant la loi de Newton. (N° 10, 5-22).

« En général, les différents corps du système solaire sont à de telles distances les uns des autres, par rapport à leurs dimensions propres, que l'on peut, dans le calcul de leur attraction mutuelle, les considérer comme des points matériels. Il y aurait toutefois exception pour les cas où une telle hypothèse sur la figure des corps attirants ne serait pas compatible avec la précision qui doit être poursuivie dans les calculs de cette nature. Dans la théorie de la Lune, par exemple, la Terre ne saurait être considérée comme une sphère homogène, ce qui reviendrait à considérer toute sa masse comme condensée en son centre de gravité; l'influence de son aplatissement se fait sentir, au contraire, dans le mouvement lunaire d'une manière si remarquable que Laplace a pu calculer cet aplatissement en se fondant sur les observations de la Lune. On constate une action encore plus sensible de l'aplatissement très considérable de la planète principale dans le système de Jupiter, et le même phénomène se reproduit aussi dans le système de Saturne.

» En dehors de l'intérêt mathématique que peut présenter le problème, objet de ce Mémoire, il est encore, comme cela résulte des considérations précédentes, d'une importance très grande au point de vue astronomique. L'ancienne manière de traiter cette question, telle qu'on la trouve dans la *Mécanique céleste,* et dont Hansen lui-même, dans sa Théorie de la Lune, ne s'est pas essentiellement écarté, peut être très suffisante pour le calcul numérique de l'influence de l'aplatissement terrestre sur le mouvement de la Lune, mais elle n'éclaire en rien sur la nature de cette influence. A plus forte raison, lorsqu'il est question des théories des systèmes de Jupiter et de Saturne, une étude plus rigoureuse de la nature du problème devient-elle d'absolue nécessité. C'est particulièrement en vue de ces considérations que l'auteur a entrepris cette étude. »

Berger (*Alex.*). — Démonstration élémentaire de quelques formules du calcul des différences. (N° 10, 39-53).

§ 1. Introduction. — § 2. Les nombres de Bernoulli. — § 3. Sur la somme $\sum_{k=1}^{k=x} k^m$, m étant un nombre entier et positif. — § 4. Sur la somme $\sum_{k=1}^{k=x} k^\mu$, pour $-\infty < \mu < +1$. — § 5. Sur la somme $\sum_{k=1}^{k=x} \log k$.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS PURE AND APPLIED, Editor in chief J.-J. SYLVESTER, Baltimore (¹).

Tome III; 1879.

Stringham (*W.-I.*). — Des figures régulières dans un espace à n dimensions. (1-14).

M. Stringham généralise d'abord pour les polyèdres d'un espace à n dimensions la formule d'Euler relative aux polyèdres de l'espace à trois dimensions. Si l'on désigne respectivement par $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ les nombres des sommets, arêtes, faces à deux dimensions,..., faces à $n-1$ dimensions du polyèdre, la relation dont il s'agit est

$$\Phi = 1 - N_0 + N_1 - \ldots \pm N_{n-1} \mp N_n = 1 - \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k N_k = 0,$$

où l'on doit prendre $N_n = 1$ si la figure considérée n'est pas composée de plusieurs figures simples.

Dans tous les espaces, d'un nombre n de dimensions, on retrouve les trois types de corps réguliers suivants :

1° Le type $(n-1)$ édroïde, pour lequel

$$\Phi = (1-1)^{n+1}, \quad N_k = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!};$$

2° Le type $(2n)$ édroïde, pour lequel

$$\Phi = 1 - (2-1)^n, \quad N_k = \frac{2^{n-k} n!}{k!(n-k)!};$$

3° Le type (2^n) édroïde, pour lequel

$$\Phi = (1-2)^n \mp 1, \quad N_k = \frac{2^{k+1} n!}{(k+1)!(n-k+1)!}.$$

Les corps de l'espace à trois dimensions qui appartiennent à ces trois types sont respectivement le tétraèdre régulier, le cube et l'octaèdre régulier.

Le polyèdre 3° est toujours le *réciproque* du polyèdre 2°, c'est-à-dire qu'il est formé par les centres des faces à $n-1$ dimensions du polyèdre 2°. Les points où n diamètres mutuellement perpendiculaires d'une sphère de l'espace à n dimensions percent cette surface forment les sommets d'un polyèdre régulier 3°.

Pour la détermination de tous les corps réguliers de l'espace à quatre dimensions, M. Stringham procède comme il suit. Il remarque d'abord que les faces à trois dimensions d'un corps régulier adjacentes à un sommet constituent autour de ce sommet un angle solide régulier, qu'on obtient en projetant de ce sommet une des cinq figures régulières de l'espace à trois dimensions. Mais

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 155.

comme ces faces à trois dimensions sont elles-mêmes des figures régulières, le nombre de ces faces qui sont adjacentes à un même sommet du polyèdre est limité par le nombre des corps réguliers égaux qu'on peut disposer autour d'un même point dans l'espace à trois dimensions, de manière qu'ils n'empiètent pas les uns sur les autres.

On trouve ainsi que dans l'espace à quatre dimensions les seuls corps réguliers possibles sont ceux dont les angles solides sont formés respectivement par quatre tétraèdres, quatre cubes, huit tétraèdres, six octaèdres, quatre dodécaèdres, vingt tétraèdres. Les premiers des corps ainsi constitués appartiennent aux trois types précédemment définis et sont appelés *pentaédroïde, octaédroïde, décaexaédroïde.* Les trois derniers ont respectivement, pour caractéristiques N_0, N_1, N_2, N_3, les nombres

$$24,\ 96,\ 96,\ 24;\quad 120,\ 720,\ 1200,\ 600;\quad 600,\ 1200,\ 720,\ 120;$$

et sont appelés *icosatétraédroïde, hexacosiaédroïde, hécatonicosaédroïde.*

En procédant de même pour les espaces à un plus grand nombre de dimensions, M. Stringham trouve que pour tous ces espaces il n'y a que trois corps réguliers possibles, ceux qui appartiennent aux trois types 1°, 2°, 3°.

Peirce (C.-S.). — Sur l'algèbre de la logique. (15-57).

M. Peirce expose dans ce travail ses recherches sur les applications de notations symboliques à la logique, et présente en même temps des considérations nouvelles sur plusieurs points de cette science. Plusieurs résultats de ce travail avaient déjà été publiés par M. Peirce, soit en anglais (*Classification of Arguments,* 1867; *On an Improvement in Boole's Calculus of Logic,* 1867; *Logic of Relatives,* 1870), soit en français (dans la *Revue Philosophique*).

Dans la première partie de ce travail, M. Peirce traite de la *syllogistique.* Pour dénoter l'inférence de P au C on emploie le symbole P.·.C. Si l'on fait attention à la légitimité de cette inférence on doit écrire $P < C$ (P implique C). On écrira $P \overline{<} C$ (P n'implique point C), si l'inférence de P au C n'est pas toujours légitime. Les signes $<$ et $\overline{<}$ sont employés par M. Peirce non seulement lorsqu'il s'agit de passer d'un antécédent (ou une prémisse) P à un conséquent (ou une conclusion) C, mais aussi pour exprimer le passage du sujet au prédicat d'une proposition. Il identifie ainsi en quelque sorte la proposition avec l'inférence, et le terme avec la proposition.

Si l'on désigne par $\overline{B}$ la négation de B, $A < \overline{B}$ signifiera que B ne subsiste pas en même temps que A.

La *copule* $<$ donne lieu à une algèbre, dans laquelle on a

$$x < x,\ [x < (y < z)] = [y < (x < z)], \ldots.$$

Le syllogisme *Barbara* est exprimé par

$$x < y,\quad y < z,\quad \therefore x < z.$$

De même on arrive à

$$\begin{array}{llll} M < P, & M < P, & S < M, & \ldots, \\ S \overline{<} \overline{M}, & S \overline{<} P, & S \overline{<} P, & \ldots, \\ \therefore S \overline{<} \overline{P}, & \therefore S \overline{<} M, & \therefore M \overline{<} P, & \ldots, \end{array}$$

qui représentent respectivement les syllogismes *Darii, Baroco, Bocardo,* etc.

Dans la seconde partie, M. Peirce traite de la *logique des termes non relatifs.* Si l'on a deux classes d'objets a et b, on peut représenter par $a+b$ la classe qui comprend tous les objets de ces deux classes et par $a\times b$ la classe formée par les objets communs aux classes a et b. M. Peirce appelle les deux opérations $a+b$ et $a\times b$, *addition* et *multiplication non relatives*, et il en donne les définitions suivantes :

$a+b$ est tel que si $a<x$ et $b<x$ on a $a+b<x$; et réciproquement si $a+b<x$ on a $a<x$ et $b<x$	$a\times b$ est tel que si $x<a$ et $x<b$ on a $x<a\times b$; et réciproquement si $x<a\times b$ on a $x<a$ et $x<b$.

L'algèbre des termes non relatifs a été donnée par Boole (*Mathematical Analysis of Logic,* Cambridge, 1847; *An investigation of the Laws of Thought on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities,* 1854); mais l'addition de Boole diffère de la précédente, puisqu'il prend $a+a=2a$ au lieu de $=a$. Les opérations d'addition et de multiplication, comme elles sont traitées par M. Peirce, ont été présentées par De Morgan (*On the Syllogisme,* n° III; *Cambridge Philos. Transactions,* 1858), Stanley Jevons (*Formal Logic,* 1864) et Peirce. Ces opérations ont été aussi étudiées par MM. Robert Grassmann (*Die Formenlehre oder Mathematik,* 1872), Schröder (*Der Operationskreis des Logikkalkuls,* 1877), Hugh McColl (*Calculus of Equivalent Statements* dans les *Proceed. of the London Mathematical Society,* 1877).

Dans la troisième partie, M. Peirce traite de la *Logique des relatifs.* Le signe d'une certaine relation entre A et B est :, de sorte que, si A désigne *acheteur* et B *cheval*, A : B signifiera *acheteur du cheval.*

A chaque relatif $l=(\mathrm{A}:\mathrm{B})$ correspond un autre, converse du premier,

$$k\text{-}l=(\mathrm{B}:\mathrm{A}).$$

Le symbole k représente lui-même un relatif

$$k=[(\mathrm{A}:\mathrm{B}):(\mathrm{B}:\mathrm{A})].$$

On a pour ce symbole

$$k\text{-}k\text{-}l=l,\quad k\text{-}k=1.$$

Il y a quatre opérations diverses pour la composition des relatifs :

$a(|\,|\,|)e=ae$ multiplication relative ou extérieure,
$a(|\text{-}\text{-})e={}^ae$ involution régressive,
$a(\text{-}|\text{-})e=e^a$ involution progressive,
$a(\text{-}\text{-}|)e=a\circ e$ transaddition.

Les trois premières de ces opérations ont été considérées par De Morgan (*On* *the Syllogism,* n° IV). M. Peirce présente l'exemple suivant pour illustrer ces opérations.

Si a désigne *amant,* et e *servante,*

ae signifiera tout amant d'une servante de —,

a^e tout amant de chaque servante de —,

${}^e a$ tout amant de quelque servante,

$a \circ e$ toute personne qui n'est un non-amant que seulement d'une servante de —, etc.

Ces opérations satisfont entre autres aux lois suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)c = ac + bc, & a(b+c) = ab + ac \\
(a \times b)^c = a^c \times b^c, & a^{b+c} = a^b \times a^c \\
{}^{a+b}c = {}^a c \times {}^b c, & {}^a(b+c) = {}^a b \times {}^a c \\
(a \times b) \circ c = (a \circ c) + (b \circ c); & a \circ (b+c) = (a \circ b) + (a \circ c).
\end{array}
$$

Sylvester (J.-J.). — Sur certaines équations ternaires de forme cubique. Sur la dérivation rationnelle de points sur une cubique. (58-88).

De même que la théorie de *résiduation* de M. Sylvester a pris naissance à l'occasion de recherches arithmétiques, de même la théorie remarquable exposée dans cet *Excursus* vient à propos de son Mémoire *sur certaines équations ternaires de forme cubique,* dont une partie a déjà paru dans ce Journal.

En partant d'un point arbitraire d'une cubique plane, on peut construire sur la courbe un système de points qui dérivent rationnellement du premier, en prenant les points tangentiels successifs du point considéré, ainsi que les points où une droite joignant deux des points ainsi obtenus va rencontrer de plus la courbe. On peut continuer cette dérivation par l'application de ces mêmes procédés. Les points auxquels on arrive ainsi peuvent être rangés en une seule *suite* ou *chaîne,* qui est en général infinie, mais qui, pour certaines positions du point initial, peut venir à s'arrêter, tandis que dans d'autres cas elle se replie sur elle-même et reproduit toujours un nombre limité de points.

En dénotant le point initial de la suite par 1, ses points tangentiels successifs par 2, 4, 8, ..., et en désignant par (m, n) le troisième point de la courbe situé en ligne droite avec les points m et n, on pose

$$1, 4 = 5; \quad 2, 5 = 7; \quad 1, 7 = 8; \quad 2, 8 = 10; \quad 1, 10 = 11; \quad 2, 11 = 13; \; \ldots.$$

Les points 1, 2, 4, 5, 7, 8, ... (où l'on n'a que des *indices* non divisibles par 3), sont les seuls qui entrent dans la formation de la suite.

On peut démontrer, en effet, que, si m et n sont deux nombres non divisibles par 3, le point (m, n) a pour indice celui des deux nombres $m+n$, $m-n$ qui n'est pas divisible par 3.

M. Sylvester démontre que les expressions des coordonnées de tout point p de cette suite sont d'un ordre égal au carré de l'indice p par rapport aux coordonnées du point initial 1. Cette proposition importante est désignée par lui sous le nom de la *loi des carrés.*

Citons ici une remarque très ingénieuse de M. Sylvester sur la nature de cette suite. Puisque le $3n^{\text{ième}}$ point où une courbe algébrique de degré n, passant par $3n-1$ points d'une cubique, coupe de plus cette cubique est déterminé par des constructions linéaires, il s'ensuit que, si les $3n-1$ points sont pris parmi les points de la suite considérée, le $3n^{\text{ième}}$ point appartiendra encore à cette suite. S'il y a donc des points qui dérivent rationnellement du point 1 autres que ceux contenus dans la suite considérée, on ne conçoit pas comment on pourra les obtenir ou même les définir; il y a donc une extrême probabilité que l'existence d'autres points dérivés rationnels de 1 est impossible.

La théorie de cette suite est complétée par l'adjonction d'un point d'inflexion I de la cubique. On est ainsi conduit à un groupe de points formé : 1° par le point I; 2° les points p de la première suite; 3° par les opposés p' des points p, c'est-à-dire par les points de la cubique situés sur une droite joignant I et p; 4° par les points $(1', 3i-1) = 3i$; 5° par les opposés $(3i)'$ de ces points. Tous les nombres entiers avec ou sans accent sont ainsi utilisés comme indices de points de la nouvelle suite. Ici encore les expressions des coordonnées d'un point de cette suite par rapport aux coordonnées du point initial sont d'un ordre égal au carré de l'indice du point considéré. L'indice p d'un point dérivé a encore cette signification géométrique, que le nombre des points initiaux ayant pour $p^{\text{ième}}$ dérivé un point donné est égal à p^2.

Vient ensuite l'étude des lois qui régissent la composition des dérivations. Ainsi, en désignant par « i de j » le $i^{\text{ième}}$ dérivé du point j considéré comme point initial, on a

$$m \text{ de } n = n \text{ de } m = m' \text{ de } n' = n' \text{ de } m' = mn,$$
$$m \text{ de } n' = n \text{ de } m' = m' \text{ de } n = n' \text{ de } m = (mn),$$

pour le cas où les nombres m, n sont à la fois divisibles par 3 ou non, ou que l'un de ces nombres est divisible par 3 tandis que l'autre est de la forme $3j+1$. De même on a dans le cas restant

$$m \text{ de } n = n \text{ de } m = m' \text{ de } n' = n' \text{ de } m' = (mn)',$$
$$m \text{ de } n' = n' \text{ de } m = m' \text{ de } n = n \text{ de } m' = mn.$$

Cette théorie est appliquée à la détermination du nombre des points « pertactiles » d'une cubique, c'est-à-dire des points de la cubique où viennent se réunir les $3n$ points d'intersection de la cubique avec une courbe de degré n.

La théorie est aussi appliquée à l'étude des polygones à la fois inscrits et circonscrits à la cubique.

Rowland (*H.-A.*). — Sur les équations générales de l'action électromagnétique avec application à la nouvelle théorie des attractions magnétiques et à la théorie de la rotation magnétique du plan de polarisation de la lumière. (89-113).

Craig (*Th.*). — Projection conforme de l'ellipsoïde sur la sphère. (114-127).

Gauss avait déjà traité comme exemple de sa théorie générale de la représentation orthomorphe des surfaces (avec conservation de la similitude des aires infiniment petites) la représentation d'un ellipsoïde de révolution sur une sphère. M. Craig entreprend l'étude de ce même problème pour le cas plus compliqué d'un ellipsoïde quelconque.

Son analyse conduit d'abord à l'intégration de l'équation des lignes de longueur nulle d'un ellipsoïde par le moyen des fonctions elliptiques. En passant ensuite à la représentation orthomorphe d'un ellipsoïde sur une sphère, il examine en particulier un cas bien remarquable de cette représentation dans lequel les lignes de courbure de l'ellipsoïde situées sur des hyperboloïdes homofocaux à deux nappes sont transformées en méridiens de la sphère, tandis que les lignes de courbure de l'ellipsoïde qui appartiennent au second système sont transformées en parallèles de latitude.

Franklin (*F.*). — Sur le calcul des fonctions génératrices et des tables des formes fondamentales pour les formes binaires. (128-153).

M. Franklin présente un exposé des récentes méthodes, dues à MM. Cayley et Sylvester, pour l'énumération des diverses formes fondamentales appartenant au système des covariants (et invariants) d'une ou plusieurs formes binaires. Il insiste surtout sur le côté calculatoire de ces méthodes.

Nous croyons répondre au désir de plusieurs lecteurs de ce Bulletin en donnant ici un résumé des principes de cette théorie d'après l'exposé de M. Franklin.

Le théorème fondamental de cette théorie, énoncé d'abord par M. Cayley et démontré rigoureusement par M. Sylvester (*Journal de Borchardt,* t. 85, p. 104, 1878; *Philosophical Magazine,* t. V, p. 178), consiste en ceci :

Si l'on dénote par $(i, j : g)$ *le nombre des manières dont on peut considerer le nombre* $w = \frac{ij-g}{2}$ *comme somme de* j *nombres de la suite* 0, 1, 2, ..., i (*les répétitions étant permises*), *le nombre* $n_{g,j}$ *des covariants linéairement indépendants d'ordre* g *et de degré* j *d'une forme binaire d'ordre* i *est égal à* $(i, j : g) - (i, j : g+2)$. *Ce nombre* $n_{g,j}$ *est donc égal au coefficient de* $a^j x^g$ *dans le développement de*

$$\varphi(x) = \frac{1-x^{-2}}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\ldots(1-ax^{-i+2})(1-ax^{-i})},$$

suivant les puissances ascendantes de a.

On utilise ce résultat pour la détermination du nombre des covariants fondamentaux des divers *ordres-degrés* (g, j) de la manière suivante. Supposons que l'on connaisse le nombre des covariants fondamentaux pour tous les ordres-degrés inférieurs à un ordre-degré déterminé (g, j). Soient α le nombre des covariants linéairement indépendants d'ordre-degré (g, j), et β le nombre des covariants de ce même ordre-degré qu'on peut composer avec des covariants d'ordres-degrés inférieurs. Si la différence $\alpha - \beta$ est positive ou nulle, elle doit être égale au nombre des covariants fondamentaux de l'ordre degré (g, j) considéré; mais si cette différence est négative $= -p$, il n'y a pas de covariants élémentaires de cet ordre-degré, mais en revanche il existe un nombre p de *syzygies* (c'est-à-dire d'identités) de cet ordre-degré entre covariants plus simples. Ces règles ne sont pas encore démontrées en toute rigueur, mais reposent sur ce postulat, établi par une forte induction, *qu'il n'y a jamais de covariants fondamentaux et de syzygies qui soient à la fois d'un même ordre-degré.*

Cette méthode primitive de l'énumération des covariants fondamentaux, désignée par M. Sylvester sous le nom de *tamisage*, n'offre aucune indication sur la limitation du système des covariants fondamentaux d'une forme. Mais on peut atteindre à ce but en maniant convenablement la *fonction génératrice* $\varphi(x)$.

Le développement de la fonction génératrice $\varphi(x)$ suivant les puissances ascendantes de a est composé d'une infinité de termes contenant des puissances tant positives que négatives de x. Mais pour le but actuel on ne doit retenir que les termes à puissances non négatives de x. Pour obtenir directement cette partie du développement de $\varphi(x)$ deux méthodes ont été proposées, la première par M. Sylvester, la seconde plus expéditive par M. Cayley (M. Sylvester a donné par la suite une autre méthode où la fonction génératrice est prise sous une tout autre forme). Par le moyen de ces méthodes on parvient à déterminer une fonction rationnelle

$$\psi(a, x) = \frac{X}{Y},$$

dont le développement suivant les puissances ascendantes de a coïncide avec la partie du développement de $\varphi(x)$ qui renferme les puissances non négatives de x.

Dans le cas où la forme binaire f, dont on considère les covariants, est d'ordre pair $i = 2n$, le dénominateur Y de ψ est égal à

$$(1-a^2)^2(1-a^3)(1-a^4)\ \ldots\ (1-a^{2n-1})(1-ax^2)(1-ax^4)\ \ldots\ (1-ax^{2n}),$$

tandis que dans le cas où l'ordre de f est impair, $i = 2n+1$, le dénominateur Y est égal à

$$(1-a^2)(1-a^4)(1-a^6)\ \ldots\ (1-a^{4n})(1-ax)(1-ax^3)\ \ldots\ (1-ax^{2n+1}).$$

Dans l'un et dans l'autre de ces deux cas le degré de X par rapport à x est moindre de deux unités que celui de Y; de même le degré de X par rapport à a est moindre de $i+1$ unités que celui de Y. Mentionnons ce fait que, dans les cas où $i = 3, 5, 7, 9, 4, 8$, le facteur $1-a^2$ se présente aussi bien dans X que dans Y; il n'en est pas de même dans les cas où $i = 2, 6, 10$.

Considérons maintenant la fonction $L = \Sigma m_{j,g} a^j x^g$, où $m_{j,g}$ est le nombre des covariants linéairement indépendants de l'ordre-degré $(g.j)$. Il est aisé de voir que, si V est covariant d'ordre-degré (s, r), le nombre des covariants d'ordre-degré (g, j) qui ne contiennent pas V comme facteur est égal au coefficient de $a^j x^g$ dans la forme $(1-a^r x^s)L$. Le facteur $(1-a^r x^s)$ est appelé *représentant* du covariant (s, r).

De même, si l'on a k covariants $V_1, V_2, \ldots, V_k$ d'ordres-degrés (s_1, r_1), (s_2, r_2), $\ldots$, (s_k, r_k) respectivement, le nombre des covariants d'ordre-degré (g, j) qui ne contiennent comme facteur aucun des covariants V, est égal au coefficient de a^j, x^g dans la fonction

$$\Lambda = (1-a^{r_1}x^{s_1})(1-a^{r_2}x^{s_2})\ \ldots\ (1-a^{r_k}x^{s_k})L,$$

étant supposé qu'il n'y a pas de syzygie de l'ordre-degré (g, j) entre covariants composés de $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

Quoi qu'il en soit, on peut arriver à la détermination du nombre des covariants fondamentaux de l'ordre-degré (g, j) en appliquant le procédé du *tamisage* à l'indication fournie par la fonction A. Si l'on est conduit par là à un nombre positif ou nul, ce nombre sera bien égal au nombre des covariants fondamentaux cherchés; autrement on sera sûr qu'il n'y a que des syzygies de cet ordre-degré.

On voit maintenant que, si l'on peut choisir les covariants $V_1, V_2, \ldots$, de telle manière que la multiplication de $L = \psi(a, x)$ par

$$(1 - a^{r_1}x^{s_1})(1 - a^{r_2}x^{s_2}), \ldots$$

amène la disparition de tous les facteurs du dénominateur de ψ, la fonction

$$A = (1 - a^{r_1}x^{s_1})(1 - a^{r_2}x^{s_2})\ldots \psi,$$

à laquelle on sera ainsi conduit, sera formée par un nombre limité de termes. Cette fonction A pourra servir par conséquent à la détermination complète du *système limité* des covariants fondamentaux considérés.

Ce résultat peut être atteint *en général* effectivement. Voici de quelle manière. En multipliant d'abord les deux termes de la fraction ψ par des facteurs convenables, on peut remplacer chaque facteur $(1 - ax^\lambda)$ du dénominateur de ψ par le représentant $(1 - a^2x^{2\lambda})$ du seul covariant d'ordre-degré $(2\lambda, 2)$. De même chaque facteur $(1 - a^\lambda)$ du dénominateur de ψ peut être remplacé *en général* par le représentant $(1 - a^{\mu\lambda})$ d'un covariant d'ordre-degré $(0, \mu\lambda)$, (invariant de degré $\mu\lambda$). Tous les facteurs du dénominateur de ψ étant ainsi transformés en représentants de covariants $V_1, V_2, \ldots$, on voit que l'on peut prendre pour fonction A le numérateur de cette forme particulière de ψ. L'application du procédé du tamisage aux indications fournies par cette forme A conduira à la détermination complète de tous les covariants fondamentaux autres que $V_1, V_2, \ldots$.

La méthode précédente a été aussi appliquée avec de légères modifications à l'énumération des divers covariants du système de plusieurs formes binaires.

Faà de Bruno. — Notes sur l'Algèbre moderne. (154-163).

1. Démonstration de cette proposition :

Si C_m *est le dernier coefficient d'un covariant* Φ *de la forme*

$$f = (a_0, a_1, \ldots)(x, y)^m,$$

le covariant Φ *est égal à ce que devient* C_m *lorsqu'on y remplace*

$$\begin{aligned} &a_0 \text{ par } A_0 = a_0, \\ &a_1 \text{ par } A_1 = a_1 + a_0 x, \\ &a_2 \text{ par } A_2 = a_2 + 2a_1 x + a_0 x^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2. Applications diverses de ce fait que, lorsqu'on a un déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A, & \Delta A, & \Delta' A, & \ldots, & \Delta^n A \\ B, & \Delta B, & \Delta^2 B, & \ldots, & \Delta^n B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

dont les éléments de chaque colonne sont déduits des éléments correspondants de la précédente par le moyen de l'opération Δ, et que l'on suppose

$$\Delta^{n+1} A = \Delta^{n+1} B = \ldots = 0,$$

on a $\Delta D = 0$.

3 et 4. Démonstration et application d'une formule de Clebsch (*Theorie der binären Formen*, p. 119) sur le carré du déterminant fonctionnel de deux formes binaires.

5. Sur la résolution de la quartique.

6. Sur la résolution de la quintique dans le cas où son invariant gauche du dix-huitième degré est nul.

Hammond (*J.*). — Sur la dérivation à indices quelconques. (164-173).

En adoptant la relation

$$(1) \qquad D^n x^m = \frac{f(m+1)}{f(m-n+1)} x^{m-n},$$

pour définir la *dérivée à l'indice quelconque n*, on est conduit à autant de *systèmes de dérivation* qu'il y a de fonctions f satisfaisant à l'équation

$$(2) \qquad f(m+1) = mf(m).$$

Peacock admet $f(m) = \Gamma(m)$. Cependant la relation (2) est satisfaite par toute fonction $f(m) = C^m \Gamma(m)$, pourvu que l'on ait $C_{m+1} = C_m$.

Ainsi la formule de M. Liouville

$$D^n x^m = (-1)^n \frac{\Gamma(-m+n)}{\Gamma(-m)} x^{-n}$$

correspond à

$$f(m) = (-1)^{m-1} \frac{\sin m\pi}{\pi} \Gamma(m) = (-1)^{m-1} \frac{1}{\Gamma(1-m)}.$$

La dérivée $D_x^n.0$, dans le cas où n est un nombre entier positif, est égale à 0; elle est égale à un polynôme de degré $p-1$ en x, dans le cas où n est un entier négatif $-p$.

En admettant $f = \Gamma(m)$, on a dans tous les cas

$$D^n.0 = \frac{A_1 x^{-1-n}}{\Gamma(-n)} + \frac{A_2 x^{-2-n}}{\Gamma(-1-n)} + \frac{A_3 x^{-3-n}}{\Gamma(-2-n)} + \ldots.$$

On obtient une expression analogue lorsque f a la valeur correspondante à la formule de M. Liouville.

M. Hammond examine les valeurs de $D^n \log x$, $D^n e^{ax}$, $D_x^n (x+y)^m$. Il remarque à l'égard de $D^n e^{ax}$ qu'on ne peut pas prendre en général

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax},$$

mais qu'on peut déterminer la fonction *complémentaire* $D^n.0$ de manière à avoir

$$D^{n+1} e^{ax} = a D^n e^{ax} \quad \text{et} \quad D^n e^{ax} = C_n a^n e^{ax},$$

où $C_{n+1} = C_n$, $C_0 = 1$. Il trouve ainsi pour le cas de $f(m) = \Gamma(m)$,

$$D^n e^{ax} = \frac{x^{-n}}{\Gamma(1-n)} + \frac{ax^{-1-n}}{\Gamma(2-n)} + \frac{a^2 x^{-2-n}}{\Gamma(3-n)} + \ldots + D^n.0,$$

où

$$D^n.0 = \frac{a^{-1} x^{-1-n}}{\Gamma(-n)} + \frac{a^{-2} x^{-2-n}}{(\Gamma - 1 - n)} + \frac{a^{-2} x^{-2-n}}{\Gamma(-2-n)} + \ldots.$$

On a en particulier

$$D^n e^x = \frac{e^x}{\Gamma(n)} \int_0^x e^{-x} x^{n-1}\, dx + D^{-n}.0.$$

Mc Clintock (Emory). — Note sur un théorème relatif au développement d'une fonction de fonction. (173).

M. Mc Clintock fait remarquer que le théorème sur le développement des fonctions donné par lui dans le vol. II de ce journal est dû à M. S. Roberts (*Quarterly Journal,* vol. IV, p. 195).

Loudon (James). — Notes sur le mouvement relatif. (174-178).

Formules diverses concernant le mouvement d'un point rapporté à des axes de coordonnées mobiles. Expression des divers éléments du mouvement d'un corps solide rapporté à des axes fixes ou mobiles par rapport à ce corps.

Sylvester (J.-J.). — Sur certaines équations ternaires de forme cubique. (174-189).

Digressions relatives au Chapitre I de ce Mémoire.

M. Sylvester présente d'abord une méthode simple pour obtenir les équations de la trisection et quadrisection des racines de l'unité correspondant à un nombre premier p. Cette méthode repose sur le principe suivant, dont la seconde partie est nouvelle :

Une fonction rationnelle et entière d'un système de périodes des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité ayant pour coefficients des nombres entiers et dont la valeur ne change pas lorsqu'on permute entre elles les périodes est égale à un nombre entier. De plus si une pareille fonction, tout en conservant sa valeur absolue, change de signe pour certaines substitutions circulaires effectuées sur les périodes, elle est nécessairement égale à un nombre entier multiple de $\sqrt{p}$ ou de $\sqrt{-p}$ suivant que $\frac{p-1}{2}$ est un nombre pair ou impair.

Vient ensuite une nouvelle rédaction de la démonstration de la *loi des carrés,* donnée dans ce même volume, p. 81-86, et dont nous avons parlé plus haut.

Glashan (J.-C.). — Sur le changement de la variable indépendante. (190-191).

Soient

$$u = f(y), \quad x = \varphi(y),$$

et

$$x_n = \frac{1}{n!} D_y^n x, \quad u_n = \frac{1}{n!} D_y^n u.$$

Si l'on désigne par S_m^n la somme des termes de poids m dans le développement de

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)^n,$$

on aura (d'après Cauchy)

$$u_n = S_n^1 D_x u + S_n^2 \frac{D_x^2 u}{2!} + \ldots + S_n^n \frac{D_x^n u}{n!}.$$

Quant aux valeurs de

$$D_n, \quad \frac{1}{2!} D_x^2 u, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n!} D_x^n u,$$

on aura

$$D_x u = \frac{u_1}{x_1}, \quad \frac{1}{2!} D_n^2 u = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix}}{x_1 . x_1^2}, \ldots$$

$$\frac{1}{n!} D_x u = \frac{\begin{vmatrix} S_1^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_1 \\ S_2^1 & S_2^2 & 0 & \ldots & 0 & u_2 \\ S_3^1 & S_3^2 & S_3^3 & \ldots & 0 & u_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-1}^1 & S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & \ldots & S_{n-1}^{n-1} & u_{n-1} \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 & \ldots & S_n^{n-1} & u_n \end{vmatrix}}{x_1 . x_1^2 . x_1^3 \ldots x_1^{n-1} . x_1^n}.$$

Franklin (*F.*). — Note sur l'intersection de deux courbes. (192).

Démonstration de ce théorème : *Si, parmi les mn intersections de deux courbes planes d'ordres m et n, il y en a np situées sur une courbe d'ordre p ($m > n$, $n > p$), par les $n(n-p)$ points d'intersection restants, on peut faire passer une courbe d'ordre $m-p$.*

Newcomb (*Simon*). — Une méthode de développement de la fonction perturbatrice dans le mouvement planétaire. (193-209).

L'objet de ce travail est de présenter une nouvelle méthode pour le développement de la fonction perturbatrice suivant les puissances des excentricités, méthode qui offre aussi un grand intérêt au point de vue du calcul des opérations.

La fonction à développer est

$$R = (r^2 - 2rr' \cos V - r'^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r}{r'^2} \cos V,$$

où r et r' sont les rayons vecteurs des deux planètes et V l'angle formé par les deux rayons vecteurs. La partie essentielle du problème consiste à développer le premier terme de l'expression R, terme que nous dénoterons dans la suite aussi par R.

Notations employées :

a et a' sont les valeurs moyennes de r et r',
v et v' les distances angulaires des deux planètes à leur nœud commun,

λ et λ' les valeurs moyennes de v et v',
e et e' les excentricités,
g et g' les anomalies moyennes.

S'il s'agissait d'orbites circulaires ($e = e' = 0$), on aurait pour R le développement

$$R = \Sigma_\mu \Sigma_\nu A_{\mu,\nu} \cos(\mu\lambda + \nu\lambda'),$$

où μ et ν prennent toutes les valeurs de $-\infty$ et ∞ en restant cependant toujours de même parité. Les coefficients A de ce développement sont homogènes et de degré -1 par rapport aux a, a', mais ils dépendent aussi de l'inclinaison des deux orbites.

Pour passer au développement de R pour le cas où l'on a $e' = 0$ (e étant quelconque), on fait dans le développement précédent

$$v = \lambda + \varphi(e, g), \quad \rho = \alpha + \psi(e, g),$$

où $\rho = \log r$, $\alpha = \log a$. Le calcul de cette transformation est fondé sur l'emploi des formules

$$\frac{dR}{de} = \frac{dv}{de}\frac{dR}{d\lambda} + \frac{d\rho}{de}\frac{dR}{d\alpha},$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}R}{de^{n+1}} = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{dv}{de}\frac{d^nR}{de^n} + \binom{n}{1}\frac{d^2v}{de^2}\frac{d^{n-1}R}{de^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^3v}{de^3}\frac{d^{n-2}R}{de^{n-2}} + \ldots\right] \\ + \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{d\rho}{de}\frac{d^nR}{de^n} + \binom{n}{1}\frac{d^2\rho}{de^2}\frac{d^{n-1}R}{de^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^3\rho}{de^3}\frac{d^{n-2}R}{de^{n-2}} + \ldots\right].\end{aligned}$$

On arrive ainsi à un développement qui est égal à une somme de termes de la forme

$$e^n . \Pi_j^n A_{\mu,\nu} . \cos(\mu\lambda + \nu\lambda' + jg),$$

où Π_j^n est un symbole opératoire équivalant à une combinaison linéaire des symboles D^0, D^1, ..., D^n où $D = \dfrac{d}{d\alpha}$.

Ainsi l'on a par exemple :

$$\Pi_0^0 = 1,$$

$$\Pi_1^1 = \mu - \frac{1}{2}D,$$

$$\Pi_{-1}^1 = -\mu - \frac{1}{2}D,$$

$$\Pi_2^2 = \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{5}{8}\mu + \left(-\frac{1}{2}\mu - \frac{3}{8}\right)D + \frac{1}{8}D^2,$$

....

De même le développement de R suivant les puissances de e', dans le cas où $e = 0$, est égal à une somme de termes de la forme

$$e'^{n'} . \Pi'^{n'}_{j'} A_{\mu,\nu} . \cos(\mu\lambda + \nu\lambda' + jg'),$$

$\Pi'^{n'}_{j'}$ étant une fonction entière du symbole $D' = \frac{d}{da'}$, égale à ce que devient $\Pi^{n'}_{j'}$ si l'on y change μ en ν, D en D'.

Maintenant *le développement complet de* R *suivant les puissances des excentricités e et e', se trouve être égal à une somme de termes de la forme*

$$e^n e'^{n'} \Pi^{n,n'}_{j,j'} A_{\mu,\nu}. \cos(\mu\lambda + \nu\lambda' + jg + j'g'),$$

où le symbole opératoire $\Pi^{n,n'}_{j,j'}$ *est égal au produit des deux symboles* Π^n_j *et* $\Pi'^{n'}_{j'}$.

Il est à remarquer que le coefficient complet de

$$\cos(\mu\lambda + \nu\lambda' + jg + j'g')$$

dans ce développement est égal à

$$e^j e'^{j'}(\Pi^j_j + e^2\Pi^{j+2}_j + e^4\Pi^{j+4}_j + \ldots)$$
$$\times (\Pi'^{j'}_{j'} + e'^2\Pi'^{j'+2}_{j'} + e^4\Pi^{j'+4}_{j'} + \ldots) A_{\mu,\nu}.$$

Ladd (*Miss Christine*). — Sur l'extension des opérations algébriques due à De Morgan. (210-225).

Miss Ladd s'occupe de l'algèbre des symboles, dans laquelle « les diverses opérations et symboles n'ont pas nécessairement une signification déterminée », mais « sont définies simplement par les lois de leur combinaison ». Les opérations cependant considérées dans cette étude sont susceptibles d'une signification bien précise dans la science des quantités.

On part d'une première opération, représentée par le symbole + et dont l'inverse est représentée par le symbole —. On définit le symbole *log* par l'équation

$$\log\ (a + a + a\ldots,\ \text{à}\ b\ \text{termes}) = \log a + \log b.$$

Au lieu de log log a, on écrit $\log^2 a$, au lieu de log $\log^2 a$, on écrit $\log^3 a$, et ainsi de suite. Le symbole $\log^{-n}$ est défini par la propriété $\log^{-n}(\log^{+n} a) = a$.

En ne faisant usage que des symboles =, +, —, log, on peut arriver à une série indéfinie d'opérations, considérée d'abord par De Morgan (*Cambridge Philos. Transactions*, t. VII et VIII), et contenant comme premiers représentants les opérations de l'Algèbre ordinaire.

On a d'abord l'opération

$$a \underset{1}{+} b = (a + a + \ldots,\ \text{à}\ b\ \text{termes}) = ab,$$

puis cette autre

$$a \underset{2}{+} b = (a \underset{1}{+} a \underset{1}{+} a \underset{1}{+} \ldots,\ \text{à}\ \log b\ \text{termes}) = a^{\log b},$$

désignée sous le nom d'*involution*, et en général l'opération

$$a \underset{n+1}{+} b = (a \underset{n}{+} a \underset{n}{+} a \underset{n}{+} \ldots,\ \text{à}\ \log^n b\ \text{termes}).$$

Les propriétés les plus importantes de ces opérations sont exprimées par les relations

$$a \underset{n+1}{+} b = \log^{-1}(\log a \underset{n}{+} \log b),\quad a \underset{n}{+} b + \log^{-n}(\log^{n} a + \log^{n} b).$$

En procédant en sens inverse on obtient, avec de Morgan, une série descendante d'opérations :

$$a \underset{-n}{+} b = \log^{n}(\log^{-n} a + \log^{-n} b).$$

L'opération $a \underset{-1}{+} b$ a par rapport à l'addition, la même relation que l'addition par rapport à la multiplication

De même que dans l'opération $\underset{0}{+}$ (addition) on a $a \underset{0}{+} o = a$, de même la quantité $\log^{-n} o$ a dans l'opération $\underset{n}{+}$ la propriété

$$a + \log^{-n} o = a.$$

Cette quantité $\log^{-n} o$ a pour valeur $e^{e^{\cdot^{\cdot^{e}}}}$, où le nombre des e est égal à $n - 1$.

Plus généralement la quantité $\log^{-n} a$ a pour valeur $e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^{a}}}}}$, où le nombre des e est égal à n.

Toutes ces opérations sont assujetties aux lois de commutation

$$a \underset{n}{+} b = b \underset{n}{+} a,$$

et d'association

$$(a \underset{n}{+} b) \underset{n}{+} c = a \underset{n}{+} (b \underset{n}{+} c),.$$

lois que l'auteur réunit dans une seule exprimée par

$$(a \underset{n}{+} b) \underset{n}{+} c = a \underset{n}{+} (c \underset{n}{+} b),$$

et qu'il désigne sous le nom de loi de *distribution*. On a encore

$$(a \underset{n}{+} b) \underset{n+1}{+} c = (a \underset{n+1}{+} c) \underset{n}{+} (b \underset{n+1}{+} c).$$

Trois opérations successives de cette série infinie présentent des propriétés tout à fait analogues à celle de l'addition, multiplication et involution. Miss Ladd, en complétant une proposition énoncée par de Morgan (*Trigonometry and double Algebra*, p. 166), fait voir que tous les théorèmes de l'Algèbre ordinaire (relatifs à l'addition, à la multiplication et à l'involution) subsistent pour trois opérations $\underset{n+1}{+}$, $\underset{n}{+}$, $\underset{n+1}{+}$, pourvu qu'on y remplace les nombres à ajouter et à multiplier par les inverses de leurs $n^{\text{ièmes}}$ logarithmes ($\log^{-n}$), et les exposants numériques par les inverses de leurs $(n+1)^{\text{ièmes}}$ logarithmes.

Ainsi que la fonction $5 + 4b^{3}$ a pour correspondante cette autre

$$\log^{-n} 5 \underset{n}{+} [\log^{-n} 4 \underset{n+1}{+} (\log^{-(n+1)} 3 \underset{n+2}{+} b)].$$

Rowland (*H.-A.*). — Sur le mouvement d'un fluide incompressible quand il n'y a pas de corps solide en présence. (226-268).

Craig (*Th.*). — Sur certains cas possibles du mouvement dans un fluide doué de viscosité. (269-293).

Mitchell (*O.-H.*). — Sur les congruences binômes, comprenant une extension des théorèmes de Fermat et de Wilson et un théorème dont les deux précédents sont des cas particuliers. (294-315).

M. Mitchell examine d'abord les solutions de la congruence $x^2 \equiv x \mod k$. Il démontre que si i est le nombre des facteurs premiers inégaux de k, la congruence $x^2 \equiv x \mod k$ admet 2^i racines distinctes $x = R_s$, correspondant aux 2 produits s qu'on peut former avec des facteurs premiers inégaux de k. Chacune de ces racines R_s a la propriété de ne contenir que ceux des facteurs de k qui divisent s. Ces nombres R_s satisfont aussi à la congruence $R_s^n \equiv R_s \mod k$, et sont appelés pour cette raison *répétants* du module k.

En étendant les propriétés de l'unité ($= R_1$) à ces nombres R_s, on obtient d'abord la généralisation suivante du théorème de Fermat pour des modules composés :

Si $\tau_s(k)$ est le nombre des entiers X_s moindres que k, ayant en commun avec k tous les facteurs de s et ceux-là seulement, on a

$$X_s^{\tau_s(k)} \equiv R_s \mod k.$$

On a de même la généralisation suivante du théorème de Wilson :

Le produit $\Pi_s(k)$ des $\tau_s(k)$ entiers X_s (considérés dans l'énoncé précédent) *est congru à R_s suivant le module k, toutes les fois que le quotient de k par le produit σ des facteurs de k représentés dans s n'est pas une puissance d'un nombre premier impair, soit le produit d'une pareille puissance par 2, soit enfin $= 4$. Le quotient $\frac{\sigma}{s}$ est en même temps un nombre impair, toutes les fois que l'on a $\Pi_s(k) \equiv - R_s \mod k$.*

M. Mitchell s'occupe ensuite de diverses propriétés des congruences binômes $x^m \equiv D \mod k$ et généralise plusieurs propositions connues, de manière à les rendre applicables à tout nombre k. Il examine aussi tour à tour la périodicité que présente la série des résidus D lorsque n va en augmentant, le nombre des racines de $X^n - R_s \equiv 0 \mod k$, et plus généralement de $X^n \equiv D \mod k$, et le nombre des résidus $n^{\text{ièmes}}$ relatifs à k. Il parvient enfin à une proposition qui comprend comme cas particuliers les deux généralisations précédentes des théorèmes de Fermat et de Wilson.

Freeland (*Frank-T.*). — Systèmes articulés pour x^m. (316-319, 1 pl.).

Description de divers systèmes articulés pour x^m obtenus en combinant des réciprocateurs (donnant $\frac{1}{x}$, étant connu x) avec des bissecteurs.

Johnson (*W.-W.*). — Les strophoïdes. (320-325).

Examen de quelques propriétés des courbes engendrées par l'intersection de deux droites d'un plan tournant uniformément autour de deux points. Parmi ces courbes sont comprises en particulier celles qu'on désigne ordinairement sous le nom de *strophoïdes*.

Stone (*Ormond*). — Sur le rapport entre le secteur et le triangle dans l'orbite d'un corps céleste. (326-328).

Le rapport entre l'aire d'un secteur de l'orbite d'un corps céleste et celle du triangle correspondant à ce secteur est donné par la formule

$$\frac{1}{2} = \frac{rr' \sin(v - v')}{\tau\sqrt{p}} = \frac{\sin 2\theta}{\theta},$$

en négligeant la masse du corps et en désignant par r et r' les deux rayons vecteurs, par v et v' les anomalies vraies correspondantes et par τ le produit du temps écoulé entre les deux positions par la constante du système solaire.

Une première valeur approchée de θ est fournie par la formule

$$2\theta = \frac{2^{\frac{3}{2}}\tau}{(r + r')^{\frac{3}{2}}}.$$

On atteint une approximation encore plus grande par la formule

$$\theta = \theta_0 \frac{\cos\theta}{\cos\gamma},$$

où

$$\theta_0^2 = \frac{2\tau^2}{(r + r')^3}, \quad \cos\gamma = \frac{2\sqrt{rr'}}{r + r'} \cos\frac{1}{2}(v' - v).$$

Hyde (*E.-W.*). — Centres de gravité des surfaces et des solides de révolution. (329-331).

Détermination, au moyen du calcul des quaternions, du centre de gravité des surfaces et des volumes de révolution.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur un point de la théorie des fractions ordinaires. (332-335).

Un nombre quelconque Q, moindre que l'unité, peut être représenté d'une seule manière par une série

$$\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots,$$

dans laquelle les u_i sont des entiers déterminés de manière que la différence

$$Q - \left(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_{i-1}}\right)$$

soit comprise entre $\frac{1}{u_{i-1}}$ et $\frac{1}{u_i}$. Une pareille série, que M. Sylvester appelle un *sorite*, ne peut avoir un nombre illimité de termes que si Q est incommensurable.

Deux éléments consécutifs u_{i+1}, u_i d'un sorite sont liés par la relation

$$u_{i+1} > u_i^2 - u_i.$$

La série limite $\sum_{i=j}^{i=\infty} \frac{1}{u_i}$, dans laquelle $u_{i+1} = u_i^2 - u_i + 1$ a pour somme $\frac{1}{u_j - 1}$.

Roberts (*Samuel*). — Sur la généralisation immédiate des théorèmes relatifs à des lieux dans lesquels le point générateur divise un segment linéaire variable dans un rapport constant. (336-343).

Lorsqu'un segment variable se meut dans un plan, les points qui divisent ce segment dans un rapport constant décrivent des courbes qui sont en général du même ordre m et du même genre g. Maintenant si l'on construit sur le segment mobile comme base un triangle mobile semblable à un triangle donné, le troisième sommet de ce triangle décrira une courbe qui sera en général de l'ordre m et du genre g. M. Roberts démontre l'égalité de l'ordre de ces courbes en faisant voir qu'à chaque point à l'infini des courbes décrites par les points de la base du triangle correspond un point situé à l'infini sur la courbe décrite par le sommet considéré.

Whitcom (*A.-W.*). — Sur le développement de $\varphi(x+h)$. (344-355).

Le coefficient θ qui entre dans l'expression du reste

$$\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(n + \theta h)$$

du développement d'une fonction $\varphi(x+h)$ par la série de Taylor est une fonction égale à

$$\theta = \frac{1}{n+1} + h\left(\frac{d\theta}{dh}\right)_{h=0} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2\theta}{dh^2}\right)_{h=0} + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}\theta}{dh^{n-1}}\right)_{h=0} + \cdots,$$

où les

$$\left(\frac{d\theta}{dh}\right)_{h=0}, \quad \left(\frac{d^2\theta}{dh^2}\right)_{h=0}, \cdots$$

ont les valeurs

$$\left(\frac{d\theta}{dh}\right)_{h=0} = \frac{2(n+1)-(n+2)}{2(n+1)^2(n+2)}\,\frac{\varphi^{(n+2)}(x)}{\varphi^{(n+1)}(x)},$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dh^2}\right)_{h=0} = \frac{2.3(n+1)^2-(n+2)(n+3)}{3(n+1)^2(n+2)(n+3)}\,\frac{\varphi^{(n+3)}(x)}{\varphi^{(n+1)}(x)} - \frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)^3(n+2)}\left[\frac{\varphi^{(n+2)}(x)}{\varphi^{(n+1)}(x)}\right]^2,$$

....

Story (*W.*). — Sur la théorie de la dérivation rationnelle sur une cubique. (356-388).

Dans ce travail M. Story présente sous une forme plus systématique et complète la nouvelle théorie de M. Sylvester sur les séries de points d'une cubique plane qui dérivent rationnellement d'un point initial de la cubique, théorie dont nous avons rendu compte plus haut.

M. Story, guidé par la loi de l'attribution de paramètres aux points d'une cubique, apporte d'abord aux notations de M. Sylvester les changements suivants. Au lieu de désigner par des indices positifs tous les points qui dérivent rationnellement d'un point initial 1, il emploie tantôt des nombres positifs, tantôt des nombres négatifs, de manière que les indices de trois points situés en ligne droite aient toujours une somme égale à zéro. Cette règle est conservée même pour les points du groupe qu'on obtient par l'adjonction d'un point d'inflexion (point auquel on attribue l'indice 0).

De cette manière les points dérivés qui ne dépendent que du point 1 ont pour indices des nombres de la forme $3m+1$ (m étant un entier positif ou négatif), tandis que les points qui dépendent à la fois de 1 et de 0 ont pour indices des entiers de l'une et de l'autre des formes $3m-1$ et $3m$.

Ce système de notations suffit pour l'étude des propriétés d'une cubique cuspidale, qui n'a qu'un point d'inflexion. Mais pour les autres cubiques chaque point d'inflexion donne lieu à une série de points dérivés ayant pour indices des nombres de la forme $3m-1$ et $3m$, lesquelles séries se complètent par d'autres dont les indices sont encore de la forme $3m+1$.

Considérons trois points d'inflexion 0_0, 0_1, 0_2 d'une cubique, situés en ligne droite, désignons par a_0 les points à indice a qui dérivent d'un point $1=1_0$ et de l'inflexion 0_0, et attribuons les symboles $-a_1$ et $-a_2$ aux points de la cubique situés sur les droites qui joignent le point a_0 aux points 0_2 et 0_1 respectivement. Tous ces points forment un groupe. On a en effet pour les indices de trois points a_p, b_q, c_r situés en ligne droite

$$a+b+c=0 \quad \text{et} \quad p+q+r\equiv 0 \pmod 3.$$

En passant à la considération de neuf points d'inflexion de la cubique on commence par attribuer à ces points les symboles

$$0_{00},\ 0_{01},\ 0_{02},\quad 0_{10},\ 0_{11},\ 0_{12},\quad 0_{20},\ 0_{21},\ 0_{22}$$

de telle manière que l'on ait pour trois de ces points

$$0_{pq},\ 0_{rs},\ 0_{tu}$$

situés en ligne droite,

$$p+r+t\equiv o,\quad q+s+u\equiv o \pmod 3.$$

En désignant maintenant par o_{00}, o_{10}, o_{20}, a_{00}, a_{10}, a_{20} les points désignés précédemment par o_0, o_1, o_2, a_0, a_1, a_2, on peut attribuer les indices

$$a_{01},\ a_{11},\ a_{21};\quad a_{02},\ a_{21},\ a_{22}$$

aux troisièmes points de la cubique situés respectivement sur les droites qui joignent les points o_{02} et o_{01} aux points a_{00}, a_{20}, a_{10}. Tous ces nouveaux points forment encore un groupe. Trois points

$$a_{pq},\ b_{rs},\ c_{tu}$$

sont situés en ligne droite si l'on a

$$a+b+c=o,$$

$$p+r+t\equiv o,\quad q+s+u=o \pmod 3.$$

M. Story, en examinant les lois de la composition des dérivations, démontre que l'on a

$$a_{pq}\ \text{de}\ b_{rs}=(ab)_{tu},$$

où

$$p+ar\equiv t,\quad q+as=u \pmod 3.$$

Il est intéressant de savoir quels sont les sous-groupes contenus dans ce système si étendu de points dérivés. Citons, à côté des sous-groupes déjà indiqués, ceux formés par les points

$$(3m+1)_{pq},\quad (3m-1)_{rs},\quad (3m)_{tu},$$

où p, r, t, et q, s, t sont les nombres o, 1, 2 pris dans des ordres quelconques.

Si l'on a représenté les coordonnées des points d'une cubique plane comme fonctions elliptiques d'un paramètre μ, de manière qu'à un point d'inflexion corresponde la valeur $\mu=o$, les autres points d'inflexion correspondent, comme on sait, aux valeurs

$$\mu=\frac{1}{3}\omega,\quad \frac{2}{3}\omega,$$

$$\frac{1}{2}\omega',\quad \frac{1}{3}\omega+\frac{1}{3}\omega',\quad \frac{2}{3}\omega+\frac{1}{3}\omega',$$

$$\frac{2}{3}\omega',\quad \frac{1}{3}\omega+\frac{2}{3}\omega'.\quad \frac{2}{3}\omega+\frac{2}{3}\omega',$$

ω et ω' étant les deux périodes des fonctions considérées.

Tout point de la cubique dont le paramètre ne diffère d'un multiple entier du paramètre d'un point donné que par des multiples entiers des périodes $\left(\frac{1}{3}\omega\text{ et }\frac{1}{3}\omega'\right)$ des points d'inflexion est un dérivé rationnel du point donné. Dans ce sens la théorie des points qui dérivent rationnellement d'un point donné coïncide avec la théorie des paramètres commensurables.

M. Story applique cette théorie à la détermination des points qui coïncident avec leur dérivé a_{pq}, ainsi qu'à la détermination des polygones à la fois inscrits et circonscrits à la cubique.

Ce Mémoire est suivi d'une « *Note on Totients* » dans laquelle sont touchées diverses questions relatives aux *Arithmetical totics*, c'est-à-dire à la Science qui joue par rapport à la *Théorie des nombres* le même rôle que la *Géométrie énumérative* par rapport à la Géométrie.

Sylvester (*J.-J.*). — Addition à la Note sur les fractions ordinaires. (388-389).

M. Sylvester indique comment on peut reconnaître si un nombre entier p entre en facteur dans quelque nombre de la suite

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,$$

où u_0 entier et $u_{i+1} = u_i^2 - i_i + 1$, suite qu'il a eu à considérer dans sa Note « *On a Point in vulgar Fractions* » insérée dans ce même volume.

Sylvester (*J.-J.*). — Preuve instantanée d'un théorème de Lagrange sur les diviseurs de la forme $Ax^2 + By^2 + Cz^2$, avec une addition sur les diviseurs des fonctions qui divisent les racines primitives de l'unité. (390-392).

Démonstration simple de ce théorème de Lagrange que la congruence

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 \equiv 0 \pmod p$$

est toujours soluble.

M. Sylvester énonce aussi cette proposition :

Lorsqu'on a un nombre premier $p = ef + 1$, où e est un nombre premier tel que $e - 1$ ne contient aucun carré de nombre impair, tout diviseur autre que p de la fonction ayant pour racines les e périodes des $\gamma^{\text{ièmes}}$ racines primitives de l'unité est un résidu $e^{\text{ième}}$ de p.

C. St.

REVUE D'ARTILLERIE (¹).

Tome XVI; avril-septembre 1880.

Ce Volume a été déjà signalé au *Bulletin*, mais certaines applications, non indiquées dans un précédent article, nous ont paru mériter une mention spéciale.

(¹) Voir *Bulletin*, XI, 74, II_2, 127 et IV_2, 206.

Heintz (*A.*). — Mesure des distances dans les batteries de côte. (60-63, 1 pl. et p. 234, 1 fig.).

Certaines côtes possèdent une batterie haute et une batterie basse qui se correspondent et qui ont à peu près les mêmes vues. La batterie haute employant, pour la mesure des distances, un télémètre à dépression, l'auteur a recherché un moyen pratique de faire profiter la batterie basse des observations faites à l'autre batterie.

Les expériences exécutées en Italie donnent pour le télémètre Parravicino et l'autostadiomètre Plebani, une erreur moyenne de 9^m et de $11^m,9$ avec une base de 50^m, pour une distance de 1000^m. Il faut compter sur une approximation au moins double pour les batteries dont l'altitude dépasse 100^m.

La formule qui donne la distance du but à deux batteries peut se réduire en tables, ou être traduite par un graphique spéciale. La courbe qu'elle représente est une hyperbole équilatère, mais, pour éviter l'emploi de cette ligne, on peut lui substituer une circonférence qui représente le lieu de tous les points qui correspondent à une même abscisse, lorsque l'inclinaison de la ligne de visée prend toutes les valeurs possibles.

Brongniart (*P.*). — Exécution du tir en brèche à grande distance. (218-231, 4 fig.).

Détermination du point de l'escarpe le plus bas à atteindre.
(On trouve que ce point est au milieu de la hauteur).
Choix de la trajectoire moyenne.
Détermination de l'angle de chute.
Détermination de la charge et de l'angle du tir.
Exécution du tir d'essai et réglage du tir.
Cas particuliers suivant les profils d'escarpe.

Sebert. — Appareils balistiques. (599-620, 4 fig., 1 pl.).

Description de deux appareils enregistreurs destinés à faire connaître :

1° La loi du mouvement de recul d'une bouche à feu et celle du mouvement du projectile (vélocimètre);

2° La loi du mouvement d'un projectile soit dans l'âme d'une bouche à feu, soit dans un milieu résistant.

A l'égard du premier appareil, l'inventeur en attribue la précision à l'utilisation des récents perfectionnements d'appareils électriques dus à M. Marcel Deprez.

Tome XVII; octobre 1880-mars 1881.

Siacci (*F.*). — Balistique rationnelle et balistique pratique. (45-77, 1 fig.).

A quoi sert la Géométrie? Cette question, adressée à Galilée, provoqua une réponse qui pourrait fort bien être faite à qui demanderait : à quoi sert la Balistique? Mais si les artilleurs se gardent bien de faire une pareille question, toutefois on ne peut pas nier que la Balistique ne soit pas aussi employée dans la pratique qu'elle pourrait et devrait l'être.

Sur le champ de bataille, certaines théories balistiques, comme tant d'autres choses, si elles ne sont pas tout à fait inutiles, servent certainement fort peu. Mais l'utilité, la nécessité des choses ne doit pas être mesurée à cette aune. Les canons, la poudre, les projectiles et le reste ne se trouvent pas tout faits sur les champs de bataille; tout cela demande à être, à l'avance et mûrement, étudié, apprêté et éprouvé. C'est précisément dans cette préparation et dans ces études que la Balistique est appelée à rendre d'utiles et importants services.

Ces réflexions judicieuses, dont nous voudrions donner ici le développement, forment l'introduction du Mémoire de M. Siacci. L'auteur s'est proposé de présenter sous une forme accessible à tous, sous la forme d'une table numérique, tout ce que la Balistique peut, dans l'état actuel, offrir de plus pratique et de plus sûr.

Voici quelques-uns des problèmes que cette table permet de résoudre :

I. Un projectile de poids p(KG) et de diamètre a(M) doit être lancé à la distance x avec la vitesse initiale V. On demande la vitesse d'arrivée, l'angle de projection et l'angle de chute.

II. A quelle distance le même projectile aura-t-il une vitesse quelconque V?

III. Avec quelle vitesse doit être lancé un projectile pour que, à la distance x, il ait la vitesse V?

IV. On veut construire un projectile, de poids et de diamètre à déterminer, mais semblable à un autre de poids p et de diamètre a. Le nouveau projectile, lancé avec la vitesse V, doit avoir, à la distance x, la vitesse V.

Après avoir expliqué le mode d'emploi de cette table, l'auteur expose la base scientifique de ses recherches.

Percin (*A*.). — Essai sur le tir fusant des projectiles de campagne. (113-138, 6 fig.).

L'auteur se propose d'étudier les conditions et le réglage du tir fusant, c'est-à-dire du tir des projectiles explosifs. Il s'appuie sur les faits d'expérience suivants :

La gerbe d'éclatement est assimilable à un cône de révolution dont l'axe est à peu près dirigé suivant la tangente à la trajectoire, et dont la demi-ouverture est égale, en moyenne, à 18° ;

La gerbe est beaucoup plus dense vers son contour extérieur qu'en son milieu ;

Enfin, de toute la portion nourrie de la gerbe, la plus meurtrière est la nappe inférieure.

Gaudin (*A*.). — Effets de la poudre dans les bouches à feu. (224-241).

Considérations simples pouvant servir de guide pour l'emploi de la poudre dans les bouches à feu, et permettant d'arriver à des formules qu'on ne peut établir autrement qu'avec de grandes difficultés.

Chapel. — Calcul des éléments balistiques. (437-453, 1 fig.).

Dans les limites de vitesses utilisées par l'artillerie, la parabole $\rho = CV^3$ serre d'assez près la loi expérimentale de résistance, pour qu'on puisse chercher à la lui substituer dans la détermination des fonctions balistiques.

La substitution devient toute légitime si l'on détermine, pour chaque portée, le coefficient moyen c par la valeur expérimentale de l'angle φ correspondant.

Ainsi entendue, la substitution conduit, pour les angles de chute et les vitesses restantes, dans les limites où la comparaison peut se faire simplement, à des résultats peu différents de ceux que l'on obtiendrait en partant de la loi expérimentale de résistance.

Talayrach (*F.*). — Essai sur le tir fusant de campagne. (568-579, 5 fig.).

Dans le précédent travail de M. Percin sur le même sujet, il a été admis que l'on ne chercherait à utiliser que la nappe inférieure de la gerbe. L'artillerie allemande préconise plutôt la gerbe supérieure.

L'auteur du nouveau travail a cherché à déterminer la hausse et la durée à donner à la fusée de manière que tous les éclats viennent concourir au résultat.

Il admet, d'après des faits d'expérience, que la gerbe est comprise entre deux cônes de révolution ayant même axe et pour angles, au sommet, l'un 20 à 25°, l'autre 10 à 12°. En outre, la distance au sommet des cônes pour laquelle les éclats sont répartis à raison de 1 par mètre carré est d'environ 30 à 35^m. Il en résulte que la courbe des efficacités du tir diffère de la courbe de probabilités du tir, en ce que son tracé présente une sinuosité rentrante.

Le réglage du tir que l'on en déduit peut s'énoncer ainsi :

Conserver la hausse du tir percutant réglé à 3 coups longs contre 3 coups courts.

Placer le point d'éclatement moyen à 30^m environ en avant du but.

Tome XVIII; avril-septembre 1881.

Wuich (*N.*). — Tables de tir des mortiers rayés. (40-63).

Réduction, en tables, de diverses formules paraboliques.

Application au tir du mortier rayé de 220^mm et du canon de 24 de siège.

Labbez. — Télémètre à miroirs. (64-98, 2 fig.).

Description et mode d'emploi du télémètre à miroirs, inventé par M. Labbez, et adopté pour le service de l'infanterie.

Percin (*A.*). — Conduite du tir fusant. (173-182).

Modifications aux conclusions du premier travail de l'auteur, en tenant compte de nouvelles proportions attribuées à la gerbe d'éclatement et au rectangle enveloppe des éclats.

Silvestre. — Application de la méthode Siacci à divers projectiles. (236-248).

La méthode employée par M. Siacci pour la résolution des divers problèmes de Balistique présente au moins, sur toutes les méthodes connues, l'avantage de la rapidité et de la simplicité. Comme il n'a pas été fait, sur la résistance opposée par l'air au mouvement des nouveaux projectiles de l'artillerie française, d'expériences permettant d'établir une nouvelle table, la présente note a pour but d'indiquer un moyen d'utiliser, pour des projectiles de formes diverses, la table calculée par M. Siacci pour les projectiles de l'artillerie italienne.

De Barberin. — Considérations sur le tir indirect de campagne. (335-347, 7 fig.).

Examen des conditions les plus favorables pour l'application du tir indirect sur le champ de bataille.

Silvestre. — Étude théorique sur les shrapnels. (409-436, 2 fig.).

Dans un Mémoire du même auteur (p. 236) la méthode imaginée par M. Siacci, pour résoudre les problèmes de tir, avait été appliquée à des projectiles de formes diverses.

Le présent travail a pour objet l'application de la même méthode aux balles sphériques des shrapnels.

Chapel. — Table de logarithmes balistiques. (484-487).

Extension de celle qui a été publiée dans le travail de l'auteur sur le même sujet (t. XVII, p. 437).

Chapel. — Sur une percussion spéciale aux armes rayées. (497-503).

Si une bouche à feu était montée sur des colliers concentriques à l'âme, elle subirait pendant le tir, en même temps qu'un recul longitudinal, une sorte de recul de *rotation,* et elle prendrait un mouvement hélicoïdal dans ses colliers. L'appui des tourillons empêche ce mouvement d'être sensible, mais la *percussion de rotation* n'en existe pas moins.

Les effets de cette percussion sont devenus particulièrement sensibles avec les armes actuelles, à grandes vitesses initiales : ils s'étendent à toutes les parties du système, bouche à feu, affût, châssis, plate-forme.

Cette cause de dégradations dissymétriques s'est nettement manifestée dans de récentes expériences de Krupp, à Meppen.

D'intéressants extraits de divers rapports de commissions d'expériences de Tarbes, Calais, Bourges, etc., ont également confirmé l'importance de ces effets.

L'auteur se propose d'en indiquer la mesure théorique. Il établit que, dans une pièce rayée à gauche, le rapport des percussions exercées sur le tourillon de droite et sur celui de gauche a pour expression $\frac{\sin(\varphi+\eta)}{\sin(\varphi-\eta)}$, η désignant un angle auxiliaire convenablement choisi.

M. le colonel Hojel a établi, de son côté, que le rapport des impulsions de recul à droite et à gauche a pour expression $\frac{\cos(\varphi - \eta)}{\cos(\varphi + \eta)}$. Elle n'est pas à négliger, car elle explique le fait, bien connu, de la déviation vers la droite, de la crosse de l'affût, si la pièce est rayée à gauche.

H. B.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME CINQUIÈME.