BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

L. FUCHS

Sur des fonctions de deux variables provenant de l'inversion des intégrales de deux fonctions données

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 52-88

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_52_0>

© Gauthier-Villars, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉLANGES.

SUR DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES PROVENANT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DE DEUX FONCTIONS DONNÉES;

PAR M. L. FUCHS, à Heidelberg.

(Mémoire présenté à la Soc. roy. des Sciences de Gœttingue, le 8 janvier 1881.)

Traduit par M. STEPHANOS.

Dans une Communication publiée dans les *Nachrichten* de la Société royale des Sciences de Gœttingue (février 1880, p. 170 et suiv.), j'ai défini des fonctions de plusieurs variables, lesquelles doivent leur origine à l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires homogènes. J'ai présenté en ce lieu, et avec plus de développements dans le *Journal de Borchardt*, t. 89, p. 151 et suiv. [1], un exemple de pareilles fonctions, en introduisant certaines restrictions pour le cas des équations différentielles du second ordre. Plus tard j'ai dressé, dans les *Nachrichten* de la Société royale des Sciences de Gœttingue (juin 1880, p. 445 et suiv.) [2], le Tableau des équations différentielles remplissant ces restrictions, et donné en même temps les intégrales de ces équations différentielles.

Ayant porté par la suite mes efforts à trouver les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre pour qu'elles puissent donner lieu, par l'inversion mentionnée, à deux fonctions de deux variables indépendantes, telles que toute fonction symétrique de ces fonctions soit une fonction uniforme des deux variables, je suis parvenu à une généralisation du problème, et cela en prenant, au lieu des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, certaines fonctions présentant un ensemble de caractères particuliers. C'est la solution de ce problème, pour les fonctions ainsi caractérisées, que je me permets de présenter dans ce qui suit.

---

(1) *Voir* la traduction de ce Mémoire dans ce *Bulletin*, IV_1, 278.

(2) Cette Note a aussi paru, en traduction, dans ce *Bulletin*, IV_1.

Parmi ces fonctions sont comprises entre autres les solutions des équations différentielles linéaires d'*ordre quelconque* (et par conséquent aussi les fonctions algébriques, lesquelles satisfont toujours à des équations différentielles linéaires), de sorte que dans ce qui suit est contenue aussi la résolution de ce problème particulier : *Trouver de quelle nature doivent être ces solutions pour que, par l'inversion de leurs intégrales, on arrive à des fonctions de deux variables dont les fonctions symétriques soient uniformes.*

I.

Soient $f(z)$, $\varphi(z)$ deux fonctions de z dont le quotient ne soit pas une constante et lesquelles, pour chaque valeur de la variable indépendante, prennent un nombre limité ou illimité de valeurs *déterminées*, tandis que pour chaque valeur $z = a$ de cette variable, pour laquelle elles deviennent infinies ou subissent une ramification, de même que pour $z = \infty$, elles admettent des développements procédant respectivement suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ ou de $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ (n étant un nombre entier positif), et ne présentant qu'un nombre limité de puissances négatives et de produits de telles puissances par des puissances entières positives (et dont les exposants ne surpassent pas un nombre fini) de $\log(z-a)$ ou de $\log\frac{1}{z}$ respectivement. Nous ajouterons encore la restriction que les plus petits exposants des puissances de $z-a$ ou de $\frac{1}{z}$, multipliées par des facteurs logarithmiques, ne doivent surpasser respectivement l'unité négative ou l'unité positive. Les valeurs a seront appelées, dans la suite, *points singuliers* des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$.

Lorsque z accomplit un nombre illimité de circuits, le quotient $\zeta = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ peut atteindre une valeur indépendante de z. Ces valeurs de ζ seront désignées, par la suite, par la lettre γ. Nous supposerons qu'alors une au moins des fonctions $\int f(z)dz$, $\int \varphi(z)dz$ devient, après le parcours de tous ces circuits, infinie pour toute valeur de z. Si de plus, après l'accomplissement d'un nombre limité de circuits, il arrive que, pour une valeur $z = b$, ζ prend une des valeurs γ, il faudra de même qu'alors une au moins des fonctions $\int f(z)\,dz$, $\int\varphi(z)\,dz$ devienne infinie pour $z = b$.

Nous pouvons, sans atteindre à la généralité, admettre que, pour chaque point singulier a et pour $z = \infty$, les fractions qui entrent respectivement en exposants dans les diverses puissances de $z - a$ ou de $\frac{1}{z}$ aient un dénominateur commun, et le même pour les deux fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, puisque, si le contraire avait lieu, on pourrait prendre pour dénominateur n le moindre commun multiple des divers dénominateurs.

Un exemple de telles fonctions est fourni par les solutions des équations différentielles linéaires homogènes de l'espèce que j'ai caractérisée dans mon Mémoire publié dans le *Journal de Borchardt*, t. 66, p. 146, éq. (12).

Nous allons maintenant nous proposer la question de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions z_1, z_2 des variables indépendantes u_1, u_2, définies par les équations

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{\delta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1,\\ &\int_{\delta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2,\end{aligned}\right.$$

— où δ_1, δ_2 sont des constantes arbitraires pour lesquelles les quantités $f(\delta_1)$, $f(\delta_2)$, $\varphi(\delta_1)$, $\varphi(\delta_2)$ admettent des valeurs déterminées, et où les intégrations prises entre les mêmes limites doivent être effectuées le long d'un même chemin —, soient les racines d'une équation quadratique dont les coefficients sont des fonctions uniformes des variables u_1, u_2 aux environs de tous les couples de valeurs finies de ces variables.

II.

Soient, aux environs de $z_1 = \delta_1$, $z_2 = \delta_2$,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} f(z_1) &= \alpha_0 + \alpha_1(z_1 - \delta_1) + \ldots,\\ \varphi(z_1) &= \alpha'_0 + \alpha'_1(z_1 - \delta_1) + \ldots,\\ f(z_2) &= \beta_0 + \beta_1(z_2 - \delta_2) + \ldots,\\ \varphi(z_2) &= \beta'_0 + \beta'_1(z_2 - \delta_2) + \ldots;\end{aligned}\right.$$

les équations (A) donnent alors

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_0(z_1-\delta_1)+\beta_0(z_2-\delta_2)+\ldots=u_1, \\ \alpha'_0(z_1-\delta_1)+\beta'_0(z_2-\delta_2)+\ldots=u_2. \end{cases}$$

Puisque δ_1, δ_2 représentent des quantités arbitraires, et que $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ n'a pas, d'après l'hypothèse, une valeur constante, on peut supposer que la quantité $\alpha_0\beta'_0-\alpha'_0\beta_0$ soit différente de zéro. On obtient alors (Jacobi, *Journal de Crelle*, t. 6, p. 274), pour $z_1-\delta_1$, $z_2-\delta_2$, des développements procédant suivant les puissances positives de u_1, u_2, valables pour les environs de $u_1=0$, $u_2=0$. Ces développements servent alors à définir les fonctions z_1, z_2 dans ce voisinage. En faisant maintenant parcourir aux u_1, u_2 des chemins arbitraires et indépendants entre eux et partant de o, o, les fonctions z_1, z_2 décrivent des chemins correspondants en restant holomorphes dans le voisinage des valeurs de u_1, u_2 parcourues, tant qu'aucune des quantités z_1, z_2 ne devient infinie ou ne coïncide avec quelqu'un des points singuliers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, et aussi tant qu'aucun des quotients $\zeta_1=\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\zeta_2=\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ n'atteint une des valeurs γ, et enfin tant que les z_1, z_2 n'obtiennent des valeurs satisfaisant à l'équation

$$(\mathrm{B})\qquad \Delta=\begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2) \end{vmatrix}=0.$$

Car, en considérant des valeurs $z_1=b_1$, $z_2=b_2$ soumises aux restrictions précédentes et auxquelles correspondent des valeurs $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, on démontrerait, de la même façon que pour le voisinage de $u_1=0$, $u_2=0$, que z_1-b_1, z_2-b_2 peuvent être développées aux environs de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ suivant les puissances entières et positives de u_1-v_1, u_2-v_2.

Puisque u_1, u_2 sont des variables indépendantes entre elles, on n'aura à soumettre à une discussion particulière les positions de $u_1=v_1$, u_2-v_2, pour lesquelles il arrive soit qu'une des quantités z_1, z_2 coïncide avec quelqu'un des points singuliers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, parmi lesquels se range dans certaines circonstances le point à l'infini, soit qu'une des quantités ζ_1, ζ_2 atteint une des valeurs γ, soit enfin que les z_1, z_2 satisfont à l'équation (B), que *dans* *le cas seulement* où les z_1, z_2 arrivent aux valeurs précitées sans qu'il soit nécessaire de supposer quelque relation entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 parviennent à v_1, v_2.

Lorsque, au contraire, aucune des valeurs indiquées de z_1, z_2 ne peut être atteinte pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ sans qu'une relation soit supposée entre les derniers éléments des chemins des variables u_1, u_2, les fonctions z_1, z_2 des variables indépendantes u_1, u_2 doivent prendre en ces positions d'autres valeurs à côté des valeurs exceptionnelles dont nous avons parlé: elles restent donc uniformes tout autour de ces positions tant que u_1, u_2 demeurent indépendantes entre elles, tandis qu'elles deviennent indéterminées pour ces positions mêmes.

Pour éviter toute prolixité, nous remarquons que l'on pourra supposer par la suite que, dans les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ relatifs au voisinage d'un point singulier de ces fonctions, ou d'un point non singulier, ou enfin du point à l'infini, les exposants des plus petites puissances soient les mêmes, et que, lorsque ζ coïncide avec une des valeurs γ, $\int f(z)\,dz$, $\int\varphi(z)\,dz$ deviennent simultanément infinies. En effet, si cela n'avait point lieu, on pourrait prendre

$$f_1(z) = \gamma_{11} f(z) + \gamma_{12}\varphi(z),$$
$$\varphi_1(z) = \gamma_{21} f(z) + \gamma_{22}\varphi(z),$$

$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ étant des quantités arbitraires. En posant alors

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} w_1 &= \gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2,\\ w_2 &= \gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2,\end{aligned}\right.$$

les équations (A) deviennent

$$(\mathrm{A}')\qquad \left\{\begin{aligned} \int_{\delta_1}^{z_1} f_1(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f_1(z)\,dz &= w_1,\\ \int_{\delta_1}^{z_1} \varphi_1(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi_2(z)\,dz &= w_2.\end{aligned}\right.$$

Les fonctions $f_1(z)$, $\varphi_1(z)$ ont maintenant, parce que $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{22}$ sont quelconques, la propriété requise, et les fonctions symétriques de z_1, z_2 seront uniformes au voisinage de valeurs déterminées de u_1, u_2, lorsque ces mêmes fonctions sont uniformes au voisinage des valeurs correspondantes de w_1, w_2, et lorsque, d'autre part, les derniers éléments des chemins suivant lesquels w_1, w_2 arrivent à certaines valeurs w'_1, w'_2 dépendent l'un de l'autre; par là s'établissent aussi des relations déterminées entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 atteignent les valeurs correspondant à w'_1, w'_2.

III.

On a tout d'abord la proposition :

I. *Les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne doivent pas s'annuler pour une même valeur finie de z.*

Considérons en effet, d'abord, une valeur $z = b$, ne coïncidant pas avec un point singulier des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ et pour laquelle ces fonctions s'annulent, et supposons que l'on ait, aux environs de $z = b$,

$$(1)\qquad \begin{cases} f(z) = \alpha_k(z-b)^k + \alpha_{k+1}(z-b)^{k+1} + \ldots, \\ \varphi(z) = \alpha'_k(z-b)^k + \alpha'_{k+1}(z-b)^{k+1} + \ldots, \end{cases}$$

k étant un nombre entier positif.

Désignons par $z = c$ une valeur arbitraire de z non singulière et au voisinage de laquelle on ait

$$(1^a)\qquad \begin{cases} f(z) = \beta_0 + \beta_1(z-c) + \ldots, \\ \varphi(z) = \beta'_0 + \beta'_1(z-c) + \ldots, \end{cases}$$

et soient $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ les valeurs de u_1, u_2 correspondant à $z_1 = b$, $z_2 = c$. Il s'ensuit alors des équations (A)

$$(2)\qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = \dfrac{\alpha_k}{k+1}(z_1-b)^{k+1} + \beta_0(z_2-c) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\alpha_{k+1}}{k+2}(z_1-b)^{k+2} + \dfrac{\beta_1}{2}(z_2-c)^2 + \ldots, \\ u_2 - v_2 = \dfrac{\alpha'_k}{k+1}(z_1-b)^{k+1} + \beta'_0(z_2-c) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\alpha'_{k+1}}{k+2}(z_1-b)^{k+2} + \dfrac{\beta'_1}{2}(z_2-c)^2 + \ldots. \end{cases}$$

Si maintenant $z_1 - b$ et $z_2 - c$ deviennent infiniment petits, de manière que l'on ait

$$(3)\qquad z_2 - c = \xi(z_1-b)^{k+1} + \eta,$$

ξ étant une quantité quelconque et η une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur à celui de $(z_1 - b)^{k+1}$, on pourra déterminer ξ de manière que la quantité

$$u_2 - v_2 - \lambda(u_1 - v_1)$$

(où λ désigne une quantité donnée arbitraire) soit infiniment petite d'un ordre supérieur à celui de $(z_1 - b)^{k+1}$. Cette valeur de ξ est donnée, en effet, par l'équation

$$(4) \qquad \xi(\beta'_0 - \lambda\beta_0) + \frac{\alpha'_k - \lambda\alpha_k}{k+1} = 0.$$

Puisque $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ n'est pas une constante, on peut déterminer $z_2 = c$ de manière qu'aucune des équations

$$\beta'_0 - \lambda\beta_0 = 0, \quad \alpha'_k\beta_0 - \alpha_k\beta'_0 = 0$$

ne soit vérifiée. Si λ a une valeur finie, ξ sera alors une quantité finie, et les quantités

$$\beta_0\xi + \frac{\alpha_k}{k+1}, \quad \beta'_0\xi + \frac{\alpha'_k}{k+1}$$

seront différentes de zéro. Par conséquent, $u_1 - v_1$ et $u_2 - v_2$ représentent alors des quantités infiniment petites du même ordre que $(z_1 - b)^{k+1}$, tandis que $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ prend la valeur arbitrairement donnée λ. Il résulte de là d'abord que z_1, z_2 acquièrent respectivement les valeurs b, c si les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 arrivent à v_1, v_2 sont indépendants entre eux.

D'autre part, on obtient des équations (2)

$$(u_2 - v_2)\beta_0 - (u_1 - v_1)\beta'_0 = \frac{1}{k+1}(\alpha'_k\beta_0 - \alpha_k\beta'_0)(z_1 - b)^{k+1},$$

à un infiniment petit d'ordre supérieur près. Puisque le coefficient de $(z_1 - b)^{k+1}$ dans cette équation n'est point nul, on en tire

$$(5) \qquad z_1 - b = \sqrt[k+1]{\frac{(u_2 - v_2)\beta_0 - (u_1 - v_1)\beta'_0}{\alpha_k\beta_0 - \alpha_k\beta'_0}(k+1)},$$

ce qui montre que z_1 acquiert $k+1$ valeurs différentes de c lorsque

u_1, u_2 circulent respectivement autour de v_1, v_2. Il résulte de là que $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ ne sont pas uniformes aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ pour $k \geqq 1$, d'où il s'ensuit que *$f(z)$ et $\varphi(z)$ ne doivent pas s'annuler simultanément pour une valeur b non singulière de z.*

Considérons maintenant un point singulier a tel que l'on ait

$$f(a) = 0, \quad \varphi(a) = 0.$$

D'après les suppositions du § I, les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ pour le voisinage du point a ne contiennent pas de logarithmes dans ce cas. Si ces développements procèdent suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{n}}$, posons

$$(z - a)^{\frac{1}{n}} = t.$$

Soient, au voisinage de $z = a$,

$$\left\{\begin{array}{l} f(z) = \alpha_k t^k + \alpha_{k+1} t^{k+1} + \ldots, \\ \varphi(z) = \alpha'_k t^k + \alpha'_{k+1} t^{k+1} + \ldots. \end{array}\right. \tag{6}$$

En supposant que, lorsque z_1 prend la valeur a, z_2 arrive à un point quelconque non singulier c, et en désignant de nouveau par v_1, v_2 les valeurs correspondantes de u_1, u_2, on établirait, de la même manière que pour le cas où z_1 parvenait à un point non singulier b, cas que nous venons de traiter, que $t_1 = (z_1 - a)^{\frac{1}{n}}$ acquiert aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $k + n$ valeurs différentes de c. *Par conséquent, $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ ne sont pas uniformes aux environs de ces valeurs si $f(z)$ et $\varphi(z)$ s'annulent simultanément pour $z = a$.*

Ainsi se trouve démontrée la proposition énoncée au commencement de ce paragraphe.

Si, dans l'équation (6), on a

$$k + n > 0,$$

$z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ ne pourront être uniformes aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ que si l'on a

$$k + n = 1 \quad \text{ou} \quad k = -(n - 1).$$

On obtient ainsi la proposition :

II. *L'exposant de la plus petite puissance de* $z-a$, *dans les développements de* $f(z)$, $\varphi(z)$ *relatifs au voisinage d'un point singulier* a, *est un nombre négatif, lequel ou ne surpasse pas l'unité négative ou bien a la valeur* $-\frac{n-1}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

Supposons que le plus petit exposant dans les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$, relatifs au voisinage de $z=\infty$, soit plus grand que l'unité positive. Ces développements ne doivent pas contenir alors des logarithmes, d'après le § I. Si ces développements procèdent suivant les puissances entières de $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$, posons

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}=t,$$

et soit

$$(7)\qquad \begin{cases} f(z)=\alpha_k t^k+\alpha_{k+1}t^{k+1}+\ldots, \\ \varphi(z)=\alpha'_k t^k+\alpha'_{k+1}t^{k+1}+\ldots. \end{cases}$$

Supposons que z_1 devienne infini, tandis que z_2 vient à coïncider avec un point c arbitraire non singulier, et désignons de nouveau les valeurs correspondantes de u_1, u_2 par v_1, v_2. On prouverait alors, comme pour le cas d'une valeur finie singulière, que $t_1=\left(\frac{1}{z_1}\right)^{\frac{1}{n}}$ prend, aux environs de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, $k-n$ valeurs différentes de c, et par suite que z_1+z_2, z_1z_2 ne sont pas uniformes aux environs de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, si $k-n>1$. Il s'ensuit de là que :

III. *L'exposant de la plus petite puissance de* $\frac{1}{z}$ *dans les développements de* $f(z)$, $\varphi(z)$, *relatifs au voisinage de* $z=\infty$, *est un nombre ne surpassant pas l'unité positive, ou bien il est égal à* $1+\frac{1}{n}$ (n étant un nombre positif).

IV.

Supposons maintenant que z_1, z_2 s'approchent de deux valeurs b_1, b_2, différentes l'une de l'autre, et ne constituant pas des points singuliers, mais satisfaisant à l'équation (B).

Soient aux environs de $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$, respectivement,

$$(1) \quad \begin{cases} f(z_1) = \alpha_0 + \alpha_1(z_1 - b_1) + \alpha_2(z_1 - b_1)^2 + \ldots, \\ \varphi(z_1) = \alpha'_0 + \alpha'_1(z_1 - b_1) + \alpha'_2(z_1 - b_1)^2 + \ldots, \\ f(z_2) = \beta_0 + \beta_1(z_2 - b_2) + \beta_2(z_2 - b_2)^2 + \ldots, \\ \varphi(z_2) = \beta_0 + \beta'_1(z_2 - b_2) + \beta'_2(z_2 - b_2)^2 + \ldots, \end{cases}$$

où, d'après la proposition I du paragraphe précédent, les α_0 et α'_0, de même que les β_0 et β'_0, ne doivent pas s'annuler simultanément. Ainsi nous pourrons admettre, d'après la remarque de la fin du § II, que $\alpha_0, \alpha'_0, \beta_0, \beta'_0$ soient tous différents de zéro. En supposant qu'à $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ correspondent les valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, on obtient, des équations (A),

$$(2) \quad \begin{cases} u_1 - v_1 = \alpha_0(z_1 - b_1) + \beta_0(z_2 - b_2) + \frac{\alpha_1}{2}(z_1 - b_1)^2 \\ \qquad + \frac{\beta_1}{2}(z_2 - b_2)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(z_1 - b_1)^3 + \frac{\beta_2}{3}(z_2 - b_2)^3 + \ldots, \\ u_2 - v_2 = \alpha'_0(z_1 - b_1) + \beta'_0(z_2 - b_2) + \frac{\alpha'_1}{2}(z_1 - b_1)^2 \\ \qquad + \frac{\beta'_1}{2}(z_2 - b_2)^2 + \frac{\alpha'_2}{3}(z_1 - b_1)^3 + \frac{\beta'_2}{3}(z_2 - b_2)^3 + \ldots. \end{cases}$$

D'après notre hypothèse, on a la relation

$$(3) \qquad \alpha_0\beta'_0 - \alpha'_0\beta_0 = 0.$$

Lorsque z_1, z_2 s'approchent respectivement des valeurs b_1, b_2 *sans que* l'équation

$$(4) \qquad \alpha_0(z_1 - b_1) + \beta_0(z_2 - b_2) = 0$$

ait lieu, il se trouve que $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ deviennent infiniment petits du même ordre avec celle des quantités infiniment petites $z_1 - b_1$, $z_2 - b_2$ qui est d'ordre inférieur. Supposons que $z_2 - b_2$ soit d'un ordre égal ou supérieur à celui de $z_1 - b_1$. En multipliant la première des équations (2) par β'_0, la seconde par β_0, et en faisant la soustraction, on trouve, en vertu de l'équation (3),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \beta'_0(u_1-v_1)-\beta_0(u_2-v_2) &= \frac{1}{2}(\alpha_1\beta'_0-\alpha'_1\beta_0)(z_1-b_1)^2 \\ &+\frac{1}{2}(\beta_1\beta'_0-\beta'_1\beta_0)(z_2-b_2)^2+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Le premier membre de cette équation est donc d'un ordre supérieur à celui de $u_1 - v_1$ ou $u_2 - v_2$, c'est-à-dire qu'on doit poser

$$(6)\qquad \beta'_0(u_1-v_1)-\beta_0(u_2-v_2)=0.$$

Par conséquent, quels que soient les derniers éléments des chemins suivant lesquels z_1, z_2 parviennent à b_1, b_2, pourvu qu'ils ne soient pas liés entre eux par la relation exprimée par l'équation (4), il arrivera que les derniers éléments des chemins correspondants de u_1, u_2 satisferont invariablement à la relation (6).

Les éléments des chemins de u_1, u_2 mentionnés en dernier lieu ne peuvent être indépendants entre eux que dans le cas où entre les quantités infiniment petites $z_1 - b_1$, $z_2 - b_2$ existe la relation (4), ou, ce qui revient au même, lorsque

$$(7)\qquad t=\alpha_0(z_1-b_1)+\beta_0(z_2-b_2)$$

est une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur à celui des quantités $z_1 - b_1$, $z_2 - b_2$ qui sont d'un ordre égal.

En introduisant la notation de l'équation (7) et en posant

$$(8)\qquad -\frac{\alpha_0}{\beta_0}=\varepsilon,\quad \frac{\beta'_0}{\beta_0}=\frac{\alpha'_0}{\alpha_0}=\lambda,$$

les équations (2) deviennent

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} u_1-v_1 &= t+\frac{1}{2}[\alpha_1+\beta_1\varepsilon^2](z_1-b_1)^2 \\ &\quad -\frac{\beta_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t+\frac{1}{2}\frac{\beta_1}{\beta_0^2}t^2+\ldots, \\ u_2-v_2 &= \lambda t+\frac{1}{2}[\alpha'_1+\beta'_1\varepsilon^2](z_1-b_1)^2 \\ &\quad -\frac{\beta'_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t+\frac{1}{2}\frac{\beta'_1}{\beta_0^2}t^2+\ldots. \end{aligned}\right.$$

On peut supposer que t devient infiniment petit de manière que l'on ait

$$(10) \qquad t = \xi(z_1 - b_1)^2,$$

ξ étant une quantité arbitraire. Il suit alors des équations (9), à un infiniment petit près,

$$(11) \qquad \frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1} = \frac{\lambda\xi + \frac{1}{2}(\alpha'_1 + \beta'_1 \varepsilon^2)}{\xi + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 \varepsilon^2)}.$$

Lorsqu'on fait parcourir à ξ, par une variation continue, toutes les valeurs possibles, $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ prend aussi toute valeur possible, de sorte que les z_1, z_2 arrivent à b_1, b_2, quels que soient les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 parviennent à v_1, v_2, pourvu, toutefois, que l'équation

$$(12) \qquad \alpha'_1 + \beta'_1 \varepsilon^2 - \lambda(\alpha_1 + \beta_1 \varepsilon^2) = 0$$

ne soit pas satisfaite, car, autrement, le rapport de $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ dans l'équation (11) prend une valeur indépendante de ξ.

D'autre part, il résulte de l'équation (9) qu'en prenant arbitrairement le rapport $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ on a, à un infiniment petit d'ordre supérieur près,

$$(13) \quad u_2 - v_2 - \lambda(u_1 - v_1) = \frac{1}{2}[\alpha'_1 + \beta'_1 \varepsilon^2 - \lambda(\alpha_1 + \beta_1 \varepsilon^2)](z_1 - b_1)^2.$$

Cette équation donnerait ainsi, pour le voisinage de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, deux valeurs de z différentes de b_2, et, par conséquent, $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ ne pourraient pas être uniformes en ce voisinage sans que l'équation (12) eût lieu.

Par conséquent :

Pour que, la relation (4) étant satisfaite, les $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ soient uniformes, il faut que la relation (12) ait aussi lieu.

En posant

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z), \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \varphi'(z)$$

et

$$\varphi'(z)f(z) - \varphi(z)f'(z) = F(z), \tag{14}$$

l'équation (12) devient

$$F(b_1)f(b_2)^3 + F(b_2)f(b_1)^3 = 0. \tag{15}$$

Comme nous avons désigné par b_1, b_2 un couple de valeurs arbitraire satisfaisant à l'équation (B), on trouve que :

I. *Pour que* $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ *soient des fonctions uniformes de* u_1, u_2, *il faut que l'équation*

$$F(z_1)f(z_2)^3 + F(z_2)f(z_1)^3 = 0 \tag{C}$$

ait lieu pour tous les couples de valeurs z_1, z_2 *satisfaisant à l'équation* (B).

Définissons maintenant, par l'équation

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta, \tag{D}$$

z comme fonction de ζ. On en déduit

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{f(z)^2}{F(z)}. \tag{E}$$

Si z_1, z_2 appartiennent à deux branches de la fonction z de ζ, on aura

$$\frac{dz_1}{d\zeta} = \frac{f(z_1)^2}{F(z_1)}, \quad \frac{dz_2}{d\zeta} = \frac{f(z_2)^2}{F(z_2)}. \tag{16}$$

De ces deux équations, il suit, au moyen de l'équation (C),

$$\frac{dz_1}{d\zeta}f(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta}f(z_2) = 0. \tag{F}$$

Comme on a, d'autre part,

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}, \tag{G}$$

l'équation (F) donne aussi

$$(\mathrm{F}') \qquad \frac{dz_1}{d\zeta}\varphi(z_1)+\frac{dz_2}{d\zeta}\varphi(z_2)=0.$$

Soient

$$z_1=g_1(\zeta),\quad b_1=g_1(\alpha),$$
$$z_2=g_2(\zeta),\quad b_2=g_2(\alpha).$$

En posant, dans les équations (2),

$$z_1-b_1=g_1(\zeta)-g_1(\alpha),$$
$$z_2-b_2=g_2(\zeta)-g_2(\alpha),$$

leurs seconds membres, par suite des équations (F), (F′), deviendront identiquement nuls, c'est-à-dire nuls *pour toute valeur de* ζ.

De là, en faisant dans l'équation (2) les substitutions

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} z_1-b_1&=dz_1=g'_1(\alpha)\,d\zeta,\\ z_2-b_2&=\delta z_2=dz_2+\nu\,dz_2,\\ dz_2&=g'_2(\alpha)\,d\zeta,\end{aligned}\right.$$

où ν est une quantité infiniment petite et $g'_i(\zeta)=\dfrac{dg_i(\zeta)}{d\zeta}$, et ayant égard à ce que t (éq. 7) doit être une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, on trouve

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1-v_1&=du_1=\nu\,dz_2\,f(b_2)+dz_2^2(2\nu+\nu^2)\frac{f^2(b_2)}{2}+\ldots,\\ u_2-v_2&=du_2=\nu\,dz_2\,\varphi(b_2)+dz_2^2(2\nu+\nu^2)\frac{\varphi^2(b_2)}{2}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Ainsi les du_1, du_2 sont du même ordre que $\nu\,dz_2$. En multipliant la première des équations (18) par $\varphi(b_2)$ et la seconde par $f(b_2)$, et en faisant la soustraction, on obtient

$$(19)\qquad \varphi(b_2)\,du_1-f(b_2)\,du_2=-\nu\,dz_2^2\,\mathrm{F}(b_2)+\ldots.$$

Le second membre est par conséquent du même ordre que $\nu\,dz_2^2$, c'est-à-dire que l'on a

$$(20)\qquad \varphi(b_2)\,du_1-f(b_2)\,du_2=0.$$

Il s'ensuit de là que :

II. *Si l'équation* (C) *est satisfaite pour chaque système de solutions* $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ *de l'équation* (B), *il ne sera point possible que les* z_1, z_2 *atteignent les valeurs* b_1, b_2 *tant que les derniers éléments des chemins par lesquels les* u_1, u_2 *parviennent à* v_1, v_2 *sont indépendants entre eux.*

V.

Examinons maintenant le cas où, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, on a

$$z_1 = a, \quad z_2 = b,$$

b désignant un point non singulier et a un point singulier pour lequel $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ prennent des valeurs finies, en même temps que l'équation (B) est satisfaite par $z_1 = a$, $z_2 = b$.

D'après la proposition II du § III, l'exposant de la plus petite puissance de $z - a$ dans les développements de $f(z)$ et de $\varphi(z)$ pour le voisinage de $z = a$, lesquels, d'après le § I, ne doivent pas contenir de logarithmes, sera de la forme $-\frac{n-1}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

En posant donc

$$(1) \qquad \begin{cases} (z-a)^{\frac{1}{n}} = t, \\ n\,f(z)\,t^{n-1} = f_1(t), \quad n\,\varphi(z)\,t^{n-1} = \varphi_1(t), \end{cases}$$

et en faisant, dans les équations (A), les substitutions

$$(2) \qquad \begin{cases} z_1 = a + t_1^n, & z_2 = a + t_2^n, \\ \delta_1 = a + \eta_1^n, & \delta_2 = a + \eta_2^n, \end{cases}$$

ces équations prennent la forme

$$(\mathrm{A}'') \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\eta_1}^{t_1} f_1(t)\,dt + \int_{\eta_2}^{t_2} f_1(t)\,dt = u_1, \\ \displaystyle\int_{\eta_1}^{t_1} \varphi_1(t)\,dt + \int_{\eta_2}^{t_2} \varphi_1(t)\,dt = u_2. \end{cases}$$

Lorsque $z_1 = a$, $z_2 = b$, on a

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \beta = \sqrt{b-a},$$

de sorte que $t = 0$, $t = \beta$ ne peuvent pas être des points singuliers des fonctions $f_1(t)$, $\varphi_1(t)$. Pour que t_1 ne puisse arriver à o, ni t_2 à β qu'avec supposition de quelque relation entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 arrivent à v_1, v_2, il est nécessaire, d'après une discussion identique à celle du paragraphe précédent, qu'à côté de l'équation

$$\frac{\varphi_1(0)}{f_1(0)} = \frac{\varphi_1(\beta)}{f_1(\beta)} \tag{3}$$

soit aussi satisfaite l'équation

$$F_1(0)f_1(\beta)^3 + F_1(\beta)f_1(0)^3 = 0, \tag{4}$$

où

$$F_1(t) = \varphi_1'(t)f_1(t) - \varphi_1(t)f_1'(t). \tag{5}$$

Or, puisque

$$F_1(t) = n^3 t^{3(n-1)} F(z), \tag{6}$$

l'équation (4) montre que *l'équation* (C) *doit être aussi satisfaite pour* $z_1 = a$, $z_2 = b$.

Réciproquement, on établirait, comme dans le paragraphe précédent, que, *lorsque cette condition est remplie,* z_1 *et* z_2 *ne peuvent arriver respectivement à* a *et* b *que s'il existe une relation entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels* u_1, u_2 *parviennent à* v_1, v_2.

On démontrerait tout à fait de la même manière que :

Si, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, on a

$$z_1 = a_1, \quad z_2 = a_2,$$

a_1, a_2 étant deux points singuliers distincts, dont l'un pourra coïncider avec le point à l'infini, et si l'on suppose que l'équation (B) soit satisfaite par $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, et que $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ aient pour $z = a_1$, $z = a_2$ des valeurs finies, il se trouve que *la condition nécessaire et suffisante* pour que z_1, z_2 ne puissent atteindre les valeurs indiquées que seulement sous la supposition de certaines relations entre les derniers éléments des chemins par lesquels u_1, u_2 arrivent en v_1, v_2 *est que l'équation* (C) *soit satisfaite par ce couple de valeurs* $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$.

VI.

Lorsque pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ les z_1, z_2 prennent une même valeur b, il peut se faire que les $f(z_1)$, $f(z_2)$, de même que les $\varphi(z_1)$, $\varphi(z_2)$, atteignent des valeurs différentes. Soient $f(b)$, $\varphi(b)$ ces valeurs pour $z_1 = b$, et $f_1(b)$, $\varphi_1(b)$ pour $z_2 = b$. Si maintenant l'équation (B) est satisfaite pour $z_1 = z_2 = b$, c'est-à-dire si l'on a

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f(b) & f_1(b) \\ \varphi(b) & \varphi_1(b) \end{vmatrix} = 0,$$

il faut, d'après le raisonnement du § IV, qu'en posant

$$(2) \qquad [F(z_1)]_{z_1=b} = F(b), \quad [F(z_2)]_{z_2=b} = F_1(b),$$

l'équation

$$(3) \qquad F(b) f_1(b)^3 + F_1(b) f(b)^3 = 0$$

soit satisfaite.

L'équation (1) ne peut être satisfaite, dans les circonstances indiquées, que si z, considéré comme fonction de ζ, revient pour un certain circuit de cette dernière variable à sa valeur initiale, sans que les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ reprennent en même temps leurs valeurs. En supposant que cela soit ainsi, et en désignant par z une valeur de cette variable correspondant à une valeur arbitraire de ζ, par $f(z)$, $\varphi(z)$ les valeurs correspondantes des deux fonctions et par $f_1(z)$, $\varphi_1(z)$ les valeurs qu'elles prennent après le parcours du circuit précité de ζ lorsque z revient à sa valeur initiale, on peut déduire de l'équation (3) que *l'équation*

$$(H) \qquad F(z) f_1(z)^3 + F_1(z) f(z)^3 = 0$$

doit aussi avoir lieu pour toute valeur de z.

On obtiendrait alors, par des considérations analogues à celles du § IV, que z_1, z_2 *ne peuvent pas atteindre la valeur commune tant que les derniers éléments des chemins de* u_1, u_2 *ne remplissent quelque relation.*

Par des considérations analogues à celles du paragraphe précédent, il résulte encore que l'équation (H) a lieu pour des valeurs singulières ou infiniment grandes de z, de même que pour des points non singuliers, et que z_1, z_2 ne peuvent acquérir une valeur commune de cette sorte, sans qu'on ait en même temps $f(z_1) = f(z_2)$, $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, dans le cas où il n'y a pas de relation entre les derniers éléments des chemins des u_1, u_2.

VII.

En faisant parcourir à u_1, u_2 des chemins arbitraires et en poursuivant les fonctions z_1, z_2 d'une manière continue tout le long de ces chemins, il peut se faire que, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ (où v_1, v_2 désignent des valeurs finies), un au moins des quotients $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ acquiert une des valeurs représentées par γ, ou qu'une ou deux des fonctions z_1, z_2 parviennent à des points singuliers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, pour lesquels au moins un des couples de valeurs

$$\begin{gathered} \int f(z_1)\,dz_1, \quad \int \varphi(z_1)\,dz_1, \\ \int f(z_2)\,dz_2, \quad \int \varphi(z_2)\,dz_2 \end{gathered}$$

devient infini, sans que les z_1, z_2 aient accompli un nombre illimité de circuits.

Supposons, par exemple, que l'on ait poursuivi les fonctions z_1, z_2 en les développant dans l'intérieur de cercles dont les centres coïncident successivement avec les points des chemins de u_1, u_2, et soient K_1, K_2 les premiers cercles correspondant aux variables u_1, u_2 sur les circonférences desquels se trouvent les points $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$. Les intégrales $\int f(z_1)\,dz_1$, $\int \varphi(z_1)\,dz_1$, $\int f(z_2)\,dz_2$, $\int \varphi(z_2)\,dz_2$ ont alors, dans l'intérieur de ces cercles et à une distance de v_1, v_2 aussi petite que l'on voudra, pas infiniment petite cependant, des valeurs finies.

Soient ainsi $v_1 - \varepsilon_1$, $v_2 - \varepsilon_2$ des valeurs de u_1, u_2 situées respectivement dans l'intérieur des cercles K_1, K_2 et voisines autant que l'on voudra de v_1, v_2, et soient b_1, b_2 les valeurs de z_1, z_2 correspondant à ce couple de valeurs de u_1, u_2. En supposant que les u_1, u_2 viennent respectivement de $v_1 - \varepsilon_1$ à v_1 et de $v_2 - \varepsilon_2$ à v_2 par les chemins Γ_1, Γ_2, désignons par W_1, W_2 les chemins correspondants de z_1, z_2 menant les z_1, z_2 aux valeurs c_1, c_2. Il est à remarquer que les portions des chemins W_1, W_2 peuvent être infiniment longues, tandis que les traits correspondants sur les chemins Γ_1, Γ_2 sont aussi courts que l'on voudra. En désignant par $v_1 - \varepsilon_1 + \lambda_1$, $v_2 - \varepsilon_2 + \lambda_2$ des valeurs de u_1, u_2 situées respectivement sur Γ_1, Γ_2 entre $v_1 - \varepsilon_1$ et v_1, $v_2 - \varepsilon_2$ et v_2, et par c'_1, c'_2 les valeurs correspondantes de z_1, z_2 situées sur W_1, W_2, il s'ensuit que

$$\sigma_1 = \int_{b_1}^{c'_1} f(z)\,dz + \int_{b_2}^{c'_2} f(z)\,dz,$$

$$\sigma_2 = \int_{b_1}^{c'_1} \varphi(z)\,dz + \int_{b_2}^{c'_2} \varphi(z)\,dz$$

peuvent prendre des valeurs aussi petites que possible.

D'après notre supposition, il peut se faire d'abord que, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, au moins un des quotients $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ devient égal à une des valeurs représentées par γ. Il arrive alors, d'après le § II, qu'au moins un des termes de chacune des sommes σ_1, σ_2 devient infini lorsque b_1 et c'_1, b_2 et c'_2 s'approchent de c_1, c_2 en suivant les chemins W_1, W_2, d'où il résulte que l'autre terme devient aussi infini.

En second lieu, il peut se faire qu'une au moins des quantités z_1, z_2 parvient à un point singulier des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, tel qu'au moins un des couples de valeurs

$$\int f(z_1)\,dz_1, \quad \int \varphi(z_1)\,dz_1, \quad \int f(z_2)\,dz_2, \quad \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

devient infini, sans que les z_1, z_2 aient accompli un nombre illimité de circuits. Les choses se passent donc comme dans le cas précédent.

Or, puisque σ_1, σ_2 sont aussi petits que l'on voudra, les divers couples de valeurs c'_1, c'_2 sur W_1, W_2 seront aussi peu différents que l'on voudra des couples de valeurs z_1, z_2 satisfaisant aux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{b_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{b_2}^{z_2} f(z)\,dz = 0, \\ \displaystyle\int_{b_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{b_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = 0. \end{cases}$$

Mais toute série continue de couples de valeurs z_1, z_2 satisfaisant aux équations (1) satisfait aussi à l'équation

$$(2) \qquad \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)},$$

ainsi qu'à l'équation (C) ou à l'équation (H). Par conséquent, le couple c'_1, c'_2 aurait dû être aussi peu différent que l'on voudrait d'un couple de valeurs satisfaisant simultanément aux équations (B) et (C) ou bien (H). Mais, d'après les §§ IV-VI, de tels couples de valeurs ne peuvent être atteints que si u_1, u_2 décrivent des chemins dépendants l'un de l'autre.

Comme, d'autre part, les z_1, z_2 ne peuvent pas s'approcher simultanément d'une valeur de l'espèce indiquée lorsque $f(z_1)$ et $f(z_2)$, aussi bien que $\varphi(z_1)$ et $\varphi(z_2)$, tendent simultanément vers une même valeur, sans que les u_1, u_2 deviennent infiniment grands, on obtient la proposition :

En faisant parcourir aux u_1, u_2 des chemins arbitraires, il ne pourra point arriver que pour des valeurs finies de ces variables les z_1, z_2 atteignent des valeurs pour lesquelles au moins un des quotients $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ acquiert une des valeurs γ, ou que l'on parvienne à des points singuliers z_1, z_2 des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, pour lesquels l'un au moins des couples de valeurs

$$\int f(z_1)\,dz_1, \quad \int \varphi(z_1)\,dz_1, \qquad \int f(z_2)\,dz_2, \quad \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

devient infini, sans que les variables aient accompli un nombre illimité de circuits.

VIII.

Il résulte de l'équation (F) que :

I. *La fonction z de ζ ne peut pas admettre, pour des valeurs arbitraires de cette variable, plus de deux valeurs.*

En effet, si z_1, z_2, z_3 constituaient trois branches différentes de la fonction z de ζ, on aurait, d'après l'équation (F),

$$\frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0,$$

$$\frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0,$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) - \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0.$$

D'autre part, on aurait, d'après la même équation (F),

$$(2) \qquad \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) + \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0.$$

On aurait dû ainsi avoir

$$\frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0, \quad \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0,$$

c'est-à-dire il faudrait que z fût indépendant de ζ, ce qui n'a point lieu pour des valeurs arbitraires de ζ.

En divisant l'équation (H) par $F(z) F_1(z)$, et en posant, d'après l'équation (E),

$$(3) \qquad \frac{f(z)^2}{F(z)} = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{f_1(z)^2}{F_1(z)},$$

il vient

$$(4) \qquad \frac{dz}{d\zeta}[f(z) + f_1(z)] = 0,$$

ou

$$(J) \qquad f(z) + f_1(z) = 0.$$

D'après la proposition I, on a

$$(K) \qquad z = P(\zeta) + Q(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

$P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ étant des fonctions uniformes de ζ.

En posant maintenant

$$(5) \qquad f(z)^2 = g(\zeta),$$

on déduit de l'équation (J) qu'à chaque couple de valeurs de ζ,

$\sqrt{R(\zeta)}$ correspond une valeur unique pour $g(\zeta)$. De la même manière, à tout couple de valeurs de ζ, $-\sqrt{R(\zeta)}$ correspond une valeur déterminée unique de cette fonction, que nous désignerons par $g_1(\zeta)$. Nous avons alors

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} & g(\zeta)+g_1(\zeta)=2S(\zeta),\\ & \frac{g(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}-\frac{g_1(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}=2T(\zeta),\end{aligned}\right.$$

où $S(\zeta)$, $T(\zeta)$ représentent des fonctions uniformes de ζ.

En ajoutant maintenant les deux équations (6) après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{R(\zeta)}$, on obtient

$$(\mathrm{L})\qquad f(z)^2=g(\zeta)=S(\zeta)+T(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}.$$

En posant

$$(\mathrm{K}')\qquad \frac{d\zeta}{dz}=P_1(\zeta)+Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

où $P_1(\zeta)$, $Q_1(\zeta)$ désignent, d'après l'équation (K), des fonctions uniformes de ζ, on déduit de l'équation (F) que

$$(7)\qquad t=\frac{f(z)}{\sqrt{R(\zeta)}\left[P_1(\zeta)+Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}\right]},$$

considéré comme fonction de ζ, reste invariable pour des circuits de ζ ramenant $\sqrt{R(\zeta)}$ en $-\sqrt{R(\zeta)}$. La même propriété appartient donc aussi à t^2. Ainsi t^2 est, d'après l'équation (L), une fonction uniforme de ζ. En posant, d'après cela,

$$(8)\qquad t=\sqrt{R_1(\zeta)},$$

on obtient

$$(\mathrm{L}')\qquad f(z)=\left[Q_1(\zeta)R(\zeta)+P_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}\right]R_1(\zeta),$$

$R_1(\zeta)$ étant une fonction uniforme et $\sqrt{R_1(\zeta)}$ restant invariable pour des circuits de ζ ramenant $\sqrt{R(\zeta)}$ en $-\sqrt{R(\zeta)}$.

On déduit de l'équation (E) et des équations (K) et (L) que l'on a

$$(M) \qquad F(z) = W(\zeta) + U(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

où $W(\zeta)$, $U(\zeta)$ sont des fonctions uniformes de ζ.

II. *Les fonctions $f(z)^2$ et $F(z)$ sont donc des fonctions de ζ à deux valeurs, reprenant ou non la même valeur, en même temps que z, pour les divers circuits de ζ.*

IX.

En considérant z comme fonction de ζ, on déduit des équations (C) et (H) que $\frac{f(z)^3}{F(z)}$ n'admet, pour une même valeur de ζ, que deux valeurs égales et de signes contraires. On a donc

$$(N) \qquad \frac{f(z)^3}{F(z)} = \sqrt{\Psi(\zeta)},$$

$\Psi(\zeta)$ représentant une fonction uniforme de ζ. D'après les équations (7) et (8) du paragraphe précédent, on aura

$$(N') \qquad \Psi(\zeta) = R(\zeta)R_1(\zeta).$$

Un circuit de ζ ramenant $\sqrt{R(\zeta)}$ en $-\sqrt{R(\zeta)}$ ramène donc aussi $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ en $-\sqrt{\Psi(\zeta)}$.

En transformant les équations (A) par l'introduction de la variable ζ, et en désignant par ε_1, ε_2 deux valeurs de ζ correspondant respectivement à $z_1 = \delta_1$, $z_2 = \delta_2$, ces équations deviennent

$$(A') \qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \sqrt{\Psi(\zeta)}\,d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \sqrt{\Psi(\zeta)}\,d\zeta = u_1, \\ &\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \zeta\sqrt{\Psi(\zeta)}\,d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \zeta\sqrt{\Psi(\zeta)}\,d\zeta = u_2. \end{aligned}\right.$$

X.

Pour les valeurs de ζ, que nous avons représentées par γ, z admet toute valeur possible (*voir* § I); ces valeurs sont, par conséquent, des points singuliers de la fonction z de ζ (éq. K), pour lesquels un développement de z procédant suivant les puissances croissantes de $\zeta - \alpha$ avec un nombre limité de termes à puissances négatives n'est plus possible. Nous emploierons, pour désigner les points singuliers de cette nature, le nom de *points essentiellement singuliers,* dont s'est servi M. Weierstrass pour le cas des fonctions uniformes (*Abhandlungen der Berliner Akademie*, année 1876, p. 11-15) (¹).

Puisque les fonctions $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$ $R(\zeta)$ admettent pour un point essentiellement singulier toute valeur possible (Weierstrass, *loc. cit.*, p. 59-60), il s'ensuit que $\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta$ doit être indépendant de z pour un tel point.

Par conséquent, les diverses valeurs γ de ζ sont les seuls points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ.

Si $\zeta = \alpha$ est une valeur qui ne coïncide avec aucun des points essentiellement singuliers, et $z = a$ une des deux valeurs de z qui lui correspondent d'après l'équation (K), on aura, aux environs de $\zeta = \alpha$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} z - a = {} & c_{-k}(\zeta - \alpha)^{-\frac{k}{2}} + c_{-(k-1)}(\zeta - \alpha)^{-\frac{k-1}{2}} + \ldots \\ & + c_0 + c_1(\zeta - \alpha)^{\frac{1}{2}} + c_2(\zeta - \alpha)^{\frac{2}{2}} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

où le nombre des termes à exposants négatifs est limité $(= k)$.

Si maintenant a est un point singulier des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, on aura, d'après le § I, au voisinage de $z = a$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(z)^2 = {} & P_0 + P_1 \log(z - a) + P_2[\log(z - a)]^2 + \ldots \\ & + P_\lambda[\log(z - a)]^\lambda, \end{aligned}\right.$$

où $P_0, P_1, \ldots, P_\lambda$ sont développés au voisinage de $z = a$ suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{n}}$ avec un nombre limité de termes à exposants négatifs.

(¹) Une traduction française de ce Mémoire, par M. E. Picard, a paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 2ᵉ série, t. VIII, 1879, p. 111 et suiv. (*Note du traducteur.*)

De l'équation (1), on tire

$$(3)\qquad z - a = (\zeta - \alpha)^{-\frac{k}{2}}\chi(\zeta),$$

$\chi(\zeta)$ étant une fonction qui ne s'annule ni ne devient infinie pour $\zeta = \alpha$, et $\log\chi(\zeta)$ étant, par conséquent, développable suivant les puissances entières positives de $(\zeta - \alpha)^{\frac{1}{2}}$.

On a ainsi

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} f(z)^2 = {} & P'_0 + P'_1\log(\zeta-\alpha) + P'_2[\log(\zeta-\alpha)]^2 + \ldots \\ & + P'_\lambda[\log(\zeta-\alpha)]^\lambda, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(-\frac{k}{2}\right)^i \{ & P_i + P_{i+1}(i+1)_1\log\chi(\zeta) \\ & + P_{i+2}(i+2)_2[\log\chi(\zeta)]^2 + \ldots + P_\lambda\lambda_{\lambda-i}[\log\chi(\zeta)]^{\lambda-i}\} = P'_i, \end{aligned}\right.$$

où

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.2\ldots l} = m_l.$$

Les coefficients $P'_0, P'_1, P'_2, \ldots, P'_\lambda$ sont développables suivant les puissances croissantes à exposants rationnels de $\zeta - \alpha$, avec un nombre limité de termes à exposants négatifs.

Or, d'après la proposition II du § VIII, $f(z)^2$ est une fonction de ζ à deux valeurs; elle n'admet donc, lorsque ζ circule autour de α, que deux valeurs seulement, tandis que le second membre de l'équation (4) prend, par la répétition de ces circuits, une infinité de valeurs. Il suit de là qu'il faut que l'on ait

$$P'_1 = 0, \quad P'_2 = 0, \quad \ldots, \quad P'_\lambda = 0,$$

d'où

$$(6)\qquad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \ldots, \quad P_\lambda = 0.$$

Par conséquent, *le développement de $f(z)$ au voisinage de $z = a$ ne contient pas de logarithmes.* Comme maintenant $\varphi(z)^2 = \zeta^2 f(z)^2$ est aussi une fonction de ζ à deux valeurs, il suit que *le développement de $\varphi(z)$ ne contient pas non plus de logarithmes.*

Il s'ensuit de l'équation (4) que

$$(7)\qquad f(z)^2 = P'_0,$$

c'est-à-dire que $f(z)^2$ est aussi développable aux environs de $\zeta = 0$ suivant les puissances ascendantes et à exposants rationnels de $\zeta - \alpha$, avec un nombre limité de termes à exposants négatifs.

Par conséquent, *$\zeta = \alpha$ n'est pas un point essentiellement singulier de la fonction $f(z)^2$ de ζ.*

Soient maintenant

$$(8)\qquad \begin{cases} f(z) = e_\mu(z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e_{\mu+1}(z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \dots, \\ \varphi(z) = e'_\mu(z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e'_{\mu+1}(z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \dots, \end{cases}$$

où e_μ, e'_μ sont différents de zéro. En posant

$$\frac{e'_\mu}{e_\mu} = \alpha,$$

et développant $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ suivant les puissances croissantes de $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, on obtient

$$(9)\qquad \zeta - \alpha = \rho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \dots,$$

où

$$\rho_1 = \frac{e_\mu e'_{\mu+1} - e_{\mu+1} e'_\mu}{e_\mu^2}.$$

Si le coefficient ρ_1 n'est point nul, $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ est nécessairement uniforme aux environs de $\zeta = \alpha$. Si, au contraire, $\rho_1 = 0$, ρ_2 *ne pourra pas s'annuler,* puisque, autrement, $z - a$ admettrait au voisinage de $\zeta = \alpha$ plus de deux valeurs, ce qui serait en contradiction avec la proposition I du § VIII.

En résumant ce qui précède, on a la proposition :

I. *Les fonctions z et $f(z)^2$ de ζ ont les mêmes points essentiellement singuliers, qui coïncident avec celles des valeurs $\zeta = \gamma$ pour lesquelles $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ est égal à γ pour toute valeur de z. Les deux valeurs de z qui correspondent à un point $\zeta = \alpha$ non essentiellement singulier de la fonction z de ζ sont soit des points non singu-*

liers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, soit des points singuliers a tels que les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ relatifs au voisinage de a ne contiennent pas de logarithmes et pour lesquels il n'arrive pas que, dans le développement de $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ suivant les puissances ascendantes de $(z-a)^{\frac{1}{n}}$,

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \alpha + \rho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \ldots,$$

les ρ_1, ρ_2 soient simultanément nuls. A toute valeur de z pour laquelle $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ ont des valeurs finies ne correspondent que des points non essentiellement singuliers de la fonction z de ζ.

Il est à remarquer qu'ici le point $z=\infty$ doit être compté parmi les points singuliers.

De l'équation

$$(10) \qquad \zeta - \alpha = \rho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \ldots$$

résulte pour $\frac{dz}{d\zeta}$:

1° Dans le cas où ρ_1 est différent de zéro

$$(11) \qquad \frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{1}{n}}\left[k_0 + k_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \ldots\right];$$

2° Dans le cas cependant où ρ_1 s'annule,

$$(11^a) \qquad \frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{2}{n}}\left[\lambda_0 + \lambda_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \ldots\right],$$

où $\varkappa_0$, λ_0 représentent des quantités différentes de zéro.

En désignant par μ l'exposant de la plus petite puissance de $z-a$ dans le développement de $f(z)$ aux environs de $z=a$, on a, d'après la proposition II du § III,

$$\mu = \frac{-n-k+1}{n},$$

k désignant soit 0, soit un nombre entier positif. Il s'ensuit mainnant de l'équation (E) que, dans le cas 1°, on a

$$(12)\qquad \frac{f(z)^3}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k}{n}}\left[k'_0 + k'_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \ldots\right],$$

tandis que, dans le cas 2°,

$$(12^a)\qquad \frac{f(z)^3}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k+1}{n}}\left[\lambda'_0 + \lambda'_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \ldots\right].$$

Dans le cas 1°, on déduit de l'équation (10) que $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ est une fonction uniforme de $\zeta - \alpha$,

$$(13)\qquad (z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu_1(\zeta-\alpha) + \mu_2(\zeta-\alpha)^2 + \ldots;$$

dans le cas 2°, cependant, $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ est une fonction uniforme de $(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}$,

$$(14)\qquad (z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu'_1(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \mu'_2(\zeta-\alpha)^{\frac{2}{2}} + \ldots,$$

où μ_1, μ'_1 désignent des quantités différentes de zéro.

Ainsi, d'après l'équation (N), on aura, pour le voisinage de $\zeta = \alpha$, dans le cas 1°,

$$(15)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = (\zeta-\alpha)^{-k}\left[k''_0 + k''_1(\zeta-\alpha) + \ldots\right],$$

et, dans le cas 2°,

$$(15^a)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = (\zeta-\alpha)^{-\frac{k+1}{2}}\left[\lambda''_0 + \lambda''_1(\zeta-\alpha) + \ldots\right],$$

où $\varkappa''_0$, λ''_0 sont différents de zéro.

Ces équations ont encore lieu dans le cas où $\zeta = \alpha$ correspond à $z = \infty$ (*voir* la proposition III du § III).

Il suit de là que :

II. *Les points non essentiellement singuliers de la fonction z de ζ sont aussi des points non essentiellement singuliers de la fonction* $\Psi(\zeta)$.

Soit $\zeta = \beta$ un point non essentiellement singulier de la fonction z de ζ, pour lequel $\Psi(\zeta)$ devient infini, et qui soit tel que les deux valeurs de z correspondant à $\zeta = \beta$ ne soient pas parmi les points singuliers des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$. Si $z=b$ est une de ces valeurs, il faudra, d'après l'équation (N), que l'on ait $F(b)=0$, et $F(z)$ devra avoir pour développement, au voisinage de $z=b$,

$$(16) \qquad F(z)=(z-b)^l[\nu_0+\nu_1(z-b)+\ldots],$$

où l est un nombre entier positif et ν_0 est différent de zéro. On a ici à distinguer deux cas :

1° $f(b)$ est différent de zéro. Alors l'équation (E) donne, pour le voisinage de $\zeta=\beta$,

$$(17) \qquad \frac{d\zeta}{dz}=(z-b)^l[\nu'_0+\nu'_1(z-b)+\ldots],$$

où ν'_0 est différent de zéro. En intégrant cette équation, on obtient

$$\zeta-\beta=\frac{\nu'_0}{l+1}(z-b)^{l+1}+\ldots.$$

Puisque $z-b$ est une fonction uniforme de $(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}$, on doit avoir

$$(18) \qquad l=1 \quad \text{et} \quad z-b=\nu''_0(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}+\nu''_1(\zeta-\beta)^{\frac{2}{2}}+\ldots,$$

ν''_0 étant différent de zéro. En substituant cette valeur de $z-b$ dans $\frac{f(z)^3}{F(z)}$, on trouve, pour le voisinage de $\zeta=\beta$,

$$(19) \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)}=\rho_{-1}(\zeta-\beta)^{-\frac{1}{2}}+\rho_1(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$

où ρ_{-1} doit être différent de zéro.

2° Soit $f(b)=0$. Puisque, d'après la proposition I du § III, on ne peut pas avoir en même temps $\varphi(b)=0$, il s'ensuit que, dans ce cas, ζ devient infiniment grand. Si maintenant $\zeta=\infty$ n'est pas du nombre des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ, et si, aux environs de $z=b$, on a

$$f(z)=(z-b)^m[\varepsilon_0+\varepsilon_1(z-b)+\ldots],$$

où ε_0 est différent de zéro, il résulte de l'équation

$$(20) \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{1}{\zeta}$$

que

$$(21)\qquad (z-b)^m[\varepsilon'_0+\varepsilon'_1(z-b)+\ldots]=\frac{1}{\zeta},$$

où ε'_0 est différent de zéro. Comme $z-b$ est une fonction uniforme de $\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}$ aux environs de $\zeta=\infty$, on voit que l'on doit avoir, soit

$$(18^a)\qquad \begin{cases} m=1, \\ z-b=\varepsilon''_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\varepsilon''_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)^2+\ldots, \end{cases}$$

soit

$$(18^b)\qquad \begin{cases} m=2, \\ z-b=\varepsilon''_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon''_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{2}{2}}+\ldots, \end{cases}$$

ε''_1 étant, dans les deux cas, différent de zéro.

Si $\varphi(b)=\gamma_0$, γ_0 devra être différent de zéro, et l'on aura

$$F(z)=-m\varepsilon_0\gamma_0(z-b)^{m-1}+\ldots,$$

d'où

$$\frac{f(z)^3}{F(z)}=-\frac{\varepsilon_0^2 m}{\gamma_0}(z-b)^{2m+1}+\ldots.$$

En substituant dans cette équation les valeurs (18^a) et (18^b), on trouve que l'on aura, pour le voisinage de $\zeta=\infty$, soit

$$(22)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)}=\rho_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3+\rho_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)^4+\ldots,$$

soit

$$(22^a)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)}=\rho_5\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}}+\rho_7\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}}+\ldots.$$

Par conséquent, dans le cas 2°, $\Psi(z)$ *n'est pas infini.*

Soit maintenant $\zeta=\beta$ une valeur qui, annulant $\Psi(\zeta)$, ne coïncide pas avec quelqu'un des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ, et ayant de plus la propriété que les deux valeurs de z qui lui correspondent ne soient pas parmi les points singuliers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$. Si b est une des valeurs de z correspondant à $\zeta=\beta$, on devra avoir, d'après l'équation (N), $f(b)=0$. Mais comme, d'après la proposition I du § III, $\varphi(b)$ ne s'annule pas en même temps, on voit que l'on devrait avoir $\beta=\infty$.

Ainsi, pour le cas où $\zeta = \infty$ est un point non essentiellement singulier de la fonction z de ζ, et étant supposé que $\Psi(\infty)$ est égal à zéro, de plus $z = b$ étant une des valeurs de z qui correspondent à $\zeta = \infty$ [d'après la remarque faite au § II, il ne peut correspondre à $\zeta = \infty$ aucun des points singuliers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, dans le cas où $\zeta = \infty$ n'est pas un des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ], on parviendrait encore aux mêmes équations (20-22^a).

L'examen qui précède donne la proposition suivante :

III. *Soit $\zeta = \beta$ une valeur finie ne coïncidant avec aucun des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ.*

Si l'une des deux valeurs de z qui correspondent à $\zeta = \beta$ est un point singulier des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$, et que l'on représente le plus petit exposant de $z - a$, dans les développements des $f(z)$, $\varphi(z)$ relatifs au voisinage de a, par $\frac{-n-k+1}{n}$, k désignant ou zéro ou un nombre entier positif, la fonction $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ multipliée par $(\zeta - \beta)^k$ ou par $(\zeta - \beta)^{\frac{k+1}{2}}$ reste au voisinage de $\zeta = \beta$ uniforme et pour $\zeta = \beta$ finie et différente de zéro. On aura à prendre le premier ou le second des multiplicateurs, suivant que z admet aux environs de $\zeta = \beta$ une ou deux valeurs.

La même chose a lieu pour $a = \infty$, si l'on représente par $\frac{n+1-k}{n}$ l'exposant de la plus petite puissance de $\frac{1}{z}$.

Si à $\zeta = \beta$ correspond un point non singulier $z = b$ des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, et si l'on a

$$\Psi(\beta) = \infty,$$

$(\zeta - \beta)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\Psi(\zeta)}$ sera aux environs de $\zeta = \beta$ uniforme et pour $\zeta = \beta$ finie et différente de zéro.

La fonction $\Psi(\zeta)$ ne peut s'annuler pour aucune valeur finie de ζ. Si $\zeta = \infty$ n'est pas un des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ, $\zeta^3 \sqrt{\Psi(\zeta)}$ ou $\zeta^{\frac{5}{2}} \sqrt{\Psi(\zeta)}$ sera uniforme aux environs de $\zeta = \infty$ et finie et différente de zéro pour $\zeta = \infty$, suivant que z admet aux environs de $\zeta = \infty$ une ou deux valeurs.

XI.

Après les discussions des §§ II-VII, il nous reste encore à examiner comment se comportent les z_1, z_2 considérés comme fonctions de u_1, u_2 au voisinage de valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ pour lesquelles on a

$$z_1 = z_2 = a, \quad f(z_1) = f(z_2) = f(a), \quad \varphi(z_1) = \varphi(z_2) = \varphi(a),$$

lorsque $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ ne deviennent pas infinies pour $z = a$, et si l'on suppose que a n'est pas infini, ou qu'il ne coïncide pas avec quelque point singulier des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, soit qu'il coïncide avec quelqu'un de ces points singuliers ou qu'il est infiniment grand.

Si $\zeta = \beta$ est une des valeurs de ζ correspondant à $z = a$, β devra être, d'après la proposition I du § X, différent des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ.

Si a est un point singulier des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$, il résulterait, d'après les suppositions faites aux §§ I-II, de ce que $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ ne doivent pas devenir infinies pour $z = a$, que les développements de $f(z)$ et $\varphi(z)$ pour le voisinage de $z = a$ ne contiennent pas de logarithmes, et, d'après la proposition II du § III, que l'exposant de la plus petite puissance de $z - a$ doit être de la forme $\dfrac{-n+1}{n}$.

La proposition III du § X subsiste donc dans ce cas, si l'on y fait $k = 0$, de sorte que, d'après cette proposition, on aurait, au voisinage de $\zeta = \beta$, soit

$$(1) \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\zeta - \beta) + \ldots,$$

soit

$$(1^a) \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_{-1}(\zeta - \beta)^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1(\zeta - \beta)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

ε_0, ε_{-1} étant différents de zéro.

Si a coïncide avec ∞ ou avec un point non singulier des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$, et si β a une valeur finie, on trouve encore, d'après la même proposition, que $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ admet pour le voisinage de $\zeta = \beta$ un des deux développements (1), (1^a).

Mais, si $\beta = \infty$, on devra avoir soit

$$(2)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \rho_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \ldots,$$

soit

$$(2^a)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_5\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \rho_7\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \ldots,$$

ρ_3 et ρ_5 étant différents de zéro.

Posons, d'après l'équation (K),

$$(3)\qquad \begin{cases} z_1 = P(\zeta_1) + Q(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}, \\ z_2 = P(\zeta_2) + Q(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)}, \end{cases}$$

et, d'après l'équation (N),

$$(4)\qquad \frac{f(z_1)^3}{F(z_1)} = \sqrt{\Psi(\zeta_1)}, \quad \frac{f(z_2)^3}{F(z_2)} = \sqrt{\Psi(\zeta_2)}.$$

Conformément à notre supposition, on aura

$$z_1 = z_2 = a \quad \text{pour} \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \beta,$$

de sorte que $\sqrt{R(\zeta_1)}$ et $\sqrt{R(\zeta_2)}$ admettent pour $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ le même signe. Par conséquent, $\frac{dz_1}{d\zeta_1}$, $\frac{dz_2}{d\zeta_2}$ ont aussi pour $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ la même valeur. Mais, comme il a été supposé que $f(z_1) = f(z_2) = f(a)$, il résulte de l'équation (E) et des équations (4) que les $\sqrt{\Psi(\zeta_1)}$, $\sqrt{\Psi(\zeta_2)}$ admettent le même signe pour $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$.

Les substitutions (3) transforment les équations (A) en celles (A_1), et l'on obtient de ces dernières pour le voisinage de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$:

1° Lorsque l'équation (1) a lieu,

$$(5)\qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0(t_1 + t_2) + \frac{\varepsilon_1}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \ldots, \\ u_2 - v_2 = \beta\varepsilon_0(t_1 + t_2) + \frac{\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \ldots, \end{cases}$$

étant posé, pour abréger,

$$(6)\qquad \zeta_1 - \beta = t_1, \quad \zeta_2 - \beta = t_2.$$

Puisque les termes de ces deux séries sont de la forme

$$\text{const.}\,(t_1^m + t_2^m),$$

on peut, en introduisant les variables

$$(7)\qquad t_1 + t_2 = w_1,\quad t_1^2 + t_2^2 = w_2,$$

présenter ces séries sous forme de développements procédant suivant les puissances entières positives de w_1, w_2 :

$$(8)\qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0 w_1 + \dfrac{\varepsilon_1}{2} w_2 + \ldots, \\ u_2 - v_2 = \beta\varepsilon_0 w_1 + \dfrac{\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} w_2 + \ldots, \end{cases}$$

où nous n'avons noté que les termes du premier degré.

Puisque $\varepsilon_0(\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0) - \beta\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ est différent de zéro, il résulte de la proposition de Jacobi, citée au § II, que l'on peut des équations (8) obtenir w_1 et w_2 en séries procédant suivant les puissances entières positives de $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$. Ainsi w_1 et w_2 sont uniformes aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, et, par conséquent, $\zeta_1 + \zeta_2$ et $\zeta_1\zeta_2$ le sont aussi.

2° Lorsque l'équation (1^a) est remplie, on a

$$(5^a)\qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = 2\varepsilon_{-1}\,(t_1 + t_2) + \dfrac{2}{3}\varepsilon_1(t_1^3 + t_2^3) + \ldots, \\ u_2 - v_2 = 2\beta\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2) + \dfrac{2}{3}(\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1})(t_1^3 + t_2^3) + \ldots, \end{cases}$$

étant posé, pour abréger,

$$(6^a)\qquad (\zeta_1 - \beta)^{\frac{1}{2}} = t_1,\quad (\zeta_2 - \beta)^{\frac{1}{2}} = t_2.$$

Les termes de ces deux séries sont de la forme

$$\text{const.}\,(t_1^{2m+1} + t_2^{2m+1}).$$

Tous ces termes sont divisibles par $t_1 + t_2$. Si $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, t_1, t_2 deviennent donc infiniment petits, les termes immédiatement suivants à $2\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2)$ et $2\beta\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2)$ respectivement deviennent des infiniment petits d'ordre supérieur à celui de ces dernières quantités. Par conséquent, $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ sont du même ordre que $t_1 + t_2$. En soustrayant maintenant la seconde des équations (5^a) de la première multipliée par β, on trouve que

$$\beta(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)$$

doit être un infiniment petit d'un ordre supérieur à celui de $t_1 + t_2$, et par suite d'un ordre supérieur à celui de $u_1 - v_1$ ou de $u_2 - v_2$, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\beta(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) = 0. \tag{9}$$

Par conséquent, ζ_1, ζ_2 n'arrivent à une même valeur β que lorsque la relation (9) a lieu entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 parviennent à v_1, v_2.

3° Dans le cas où l'équation (2) a lieu, on a

$$(5^b)\quad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\dfrac{1}{2}\rho_3(t_1^2 + t_2^2) - \dfrac{1}{3}\rho_4(t_1^3 + t_2^3) - \ldots, \\ u_2 - v_2 = -\rho_3\,(t_1 + t_2) - \dfrac{1}{2}\rho_4(t_1^2 + t_2^2) - \ldots, \end{cases}$$

en posant

$$(6^b)\quad \frac{1}{\zeta_1} = t_1, \quad \frac{1}{\zeta_2} = t_2.$$

En introduisant dans les séries (5^b) les variables

$$(7^a)\quad t_1 + t_2 = w_1, \quad t_1^2 + t_2^2 = w_2,$$

on peut les présenter sous la forme de développements procédant suivant les puissances entières positives de w_1, w_2 :

$$(8^a)\quad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\dfrac{1}{2}\rho_3 w_2 + \ldots, \\ u_2 - v_2 = -\rho_3 w_1 - \dfrac{1}{2}\rho_4 w_2 - \ldots. \end{cases}$$

Il résulte du théorème cité de Jacobi que les w_1, w_2 peuvent être développés au voisinage de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ suivant les puissances entières positives de $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$. Ainsi w_1, w_2, de même que $\zeta_1 + \zeta_2$, $\zeta_1\zeta_2$, seront uniformes pour le même voisinage.

4° Lorsqu'enfin l'équation (2^a) a lieu, on a

$$(5^c)\quad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\dfrac{2}{3}\rho_5(t_1^3 + t_2^3) - \dfrac{2}{5}\rho_7(t_1^5 + t_2^5) - \ldots, \\ u_2 - v_2 = -2\rho_5(t_1 + t_2) - \dfrac{2}{3}\rho_7(t_1^3 + t_2^3) - \ldots, \end{cases}$$

étant posé

$$(6^e)\qquad \zeta_1^{-\frac{1}{2}} = t_1,\quad \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = t_2.$$

Tous les termes de ces séries sont divisibles par $t_1 + t_2$. Si donc $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, t_1, t_2 deviennent infiniment petits, $u_1 - v_1$ sera d'un ordre supérieur à celui de $t_1 + t_2$, tandis que $u_2 - v_2$ sera du même ordre que $t_1 + t_2$. Par conséquent, il existe aussi dans ce cas une relation entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 parviennent à v_1, v_2. Il ne pourra donc pas se faire que pour des chemins *arbitraires* de u_1, u_2 les ζ_1, ζ_2 deviennent simultanément infinis.

Au voisinage maintenant de $\zeta = \beta$, dans le cas où l'équation (1) a lieu, ainsi qu'au voisinage de $\zeta = \infty$, lorsque l'équation (2) est vérifiée, la fonction $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ est uniforme, et par conséquent aussi $\sqrt{R(\zeta)}$, d'après une remarque du § IX.

Si donc, sous les mêmes conditions, aux valeurs $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ ou $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$ correspond le couple de valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, les fonctions $\sqrt{R(\zeta_1)}$, $\sqrt{R(\zeta_2)}$ ne doivent pas changer leur signe lorsque les u_1, u_2, tout en restant à une distance suffisamment petite des v_1, v_2, circulent autour de ces points, et, par conséquent, les fonctions

$$G(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)} + G(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)},\quad G(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}.G(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)}$$

seront uniformes au même voisinage si $G(\zeta)$ représente une fonction uniforme de ζ. En désignant donc par z_1 et z_2 les valeurs de z qui correspondent, d'après les équations (3), aux deux couples de valeurs

$$\zeta_1,\ \sqrt{R(\zeta_1)}\quad \text{et}\quad \zeta_2,\ \sqrt{R(\zeta_2)},$$

il résulte que $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ seront uniformes aux environs des valeurs de u_1, u_2 pour le voisinage desquelles $\zeta_1 + \zeta_2$, $\zeta_1 \zeta_2$ sont uniformes.

XII.

Il ressort des développements qui précèdent que, sous la supposition faite au § II, les fonctions z_1, z_2 des variables u_1, u_2 définies par les équations (A) sont les racines d'une équation quadratique, dont les coefficients sont uniformes pour des valeurs finies des variables arbitraires u_1, u_2. Si l'on désigne par $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ des quantités arbitraires, les quantités $\gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2$, $\gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2$ sont finies pour tout couple de valeurs finies de u_1, u_2, et deviennent infinies lorsqu'une au moins de ces dernières quantités devient infinie. Les fonctions $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ sont donc des fonctions uniformes des variables u_1, u_2 pour toutes les valeurs finies de ces variables, indépendamment de la supposition du § II.

En résumant maintenant les recherches des §§ II-VII et XI, on obtient le résultat suivant :

Pour que les fonctions z_1, z_2 des variables arbitraires et indépendantes entre elles u_1, u_2, définies par les équations (A), *satisfassent à une équation quadratique dont les coefficients soient uniformes pour toutes les valeurs finies de ces variables, étant supposé que les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ aient les propriétés indiquées au* § I, *les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

Les deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne doivent pas s'annuler pour une même valeur finie de z.

L'exposant de la plus petite puissance de $z - a$ dans le développement de $\gamma f(z) + \delta \varphi(z)$, où γ et δ sont des constantes arbitraires, pour le voisinage d'un point singulier a des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, doit être un nombre négatif, ne surpassant pas l'unité négative ou bien ayant la valeur $-1 + \frac{1}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

D'autre part, l'exposant de la plus petite puissance de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $\gamma f(z) + \delta \varphi(z)$ relatif au voisinage de $z = \infty$ doit être un nombre ne surpassant pas l'unité positive ou bien ayant la valeur $1 + \frac{1}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

La fonction z de ζ définie par l'équation (D) *ne doit pas avoir plus de deux valeurs* [éq. (K)], *tandis que $f(z)$ considérée comme fonction de ζ doit avoir les propriétés exprimées par les équations* (L), (L').

Heidelberg, décembre 1880.