BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

HALPHEN

Sur quelques séries pour le développement des fonctions à une seule variable

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 462-488
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_462_1>

MÉLANGES.

SUR QUELQUES SÉRIES POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS A UNE SEULE VARIABLE;

PAR M. HALPHEN.

Une série nouvelle que M. Léauté a fait connaître, il y a peu de temps, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des*

Sciences (t. XC, p. 1404) et dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (t. VII, p. 185), a été pour moi l'occasion du présent Mémoire. En cherchant les conditions d'existence de la série de M. Léauté, j'ai été conduit à des séries plus générales qui ne paraissent pas, il est vrai, susceptibles de beaucoup d'applications, mais qui me semblent offrir un intérêt théorique, surtout à cause des divers points de vue auxquels on peut les envisager. Elles peuvent être définies, en effet, comme fournissant le développement d'une fonction, ou bien suivant les dérivées d'une autre fonction, ou bien suivant des polynômes successifs, se déduisant les uns des autres par intégration. De tels polynômes forment une classe étendue et pleine d'intérêt, qui a été signalée à l'attention par M. Appell, dans un Mémoire inséré aux *Annales de l'École Normale* (2e série, t. IX).

1. Considérons une suite indéfinie de polynômes entiers, contenant une variable x, dont le premier soit une simple constante, et dont chacun soit la dérivée du suivant. Soient P_0, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... ces polynômes rangés par ordre : on aura, par construction,

$$P_{m-1}(x) = \frac{dP_m(x)}{dx}, \tag{1}$$

et $P_m(x)$ est du degré m.

Soit, d'autre part, $f(x)$ une fonction quelconque, et, désignant par a une arbitraire, envisageons l'intégrale définie

$$U_m(a) = (a-x)\int_0^1 P_m[tx+(1-t)a]f^{(m+1)}[ta+(1-t)x]dt. \tag{2}$$

L'intégration par parties, si l'on tient compte de (1), donne

$$U_m(a) - U_{m-1}(a) = f^{(m)}(a)P_m(x) - f^{(m)}(x)P_m(a).$$

En changeant successivement l'indice m en $m-1$, $m-2$, ..., j'ai une suite de relations analogues, dont la dernière est

$$U_0(a) = f(a)P_0 - f(x)P_0.$$

De là je conclus l'expression suivante de $U_m(a)$:

$$(3)\qquad U_m(a) = \begin{cases} f(a)P_0 + f'(a)P_1(x) \\ \quad + f''(a)P_2(x) + \ldots + f^{(m)}(a)P_m(x), \\ -f(x)P_0 - f'(x)P_1(a) \\ \quad - f''(x)P_2(a) - \ldots - f^{(m)}(x)P_m(a) \text{ (}^1\text{)}. \end{cases}$$

Cette identité est la source de diverses séries, suivant les conditions subsidiaires par lesquelles on achève la détermination des polynômes P. On observera, en passant, le cas où l'on ferait

$$P_m(x) = \frac{(x-a)^m}{1.2\ldots m}.$$

C'est la série ordinaire de Taylor que l'on obtient avec une expression du reste et une démonstration qui n'ont rien de nouveau.

2. Pour déduire de la formule (3) une classe de séries nouvelles, je détermine les polynômes P par la condition que tous, sauf un seul, satisfassent à la condition

$$(4)\qquad AP_m(a) + BP_m(b) + CP_m(c) + \ldots + LP_m(l) = 0,$$

où A, B, C, ..., L, a, b, c, ... l sont des constantes données.

Une telle condition peut toujours être satisfaite, et par une seule série de polynômes. C'est ce que je vais d'abord montrer.

En premier lieu, si la somme $A + B + C + \ldots + L$ n'est pas nulle, la condition (4) ne peut être satisfaite par le polynôme P_0, qui est une simple constante. Mais elle peut l'être par tous les polynômes suivants, qui se déduisent chacun du précédent par une intégration : la condition (4) servira à déterminer chaque fois la constante introduite par cette intégration.

En second lieu, si la somme $A + B + C + \ldots + L$ est nulle,

(1) Cette formule ne diffère qu'en apparence de celle qu'a donnée M. Darboux dans son Mémoire *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable*. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. II, p. 291). Je fais allusion ici à la formule 7 (page 296) du Mémoire que je viens de citer.

pour en finir d'un seul coup, supposons, en outre,

$$\begin{array}{lllll}
A & + B & + C & + \ldots + L & = 0, \\
A a & + B b & + C c & + \ldots + L l & = 0, \\
A a^2 & + B b^2 & + C c^2 & + \ldots + L l^2 & = 0, \\
\multicolumn{5}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
A a^{k-1} & + B b^{k-1} & + C c^{k-1} & + \ldots + L l^{k-1} & = 0,
\end{array}$$

en sorte que l'exposant k soit le plus petit de ceux, parmi les entiers positifs μ, pour lesquels la quantité

$$A a^\mu + B b^\mu + C c^\mu + \ldots + L l^\mu$$

ne soit pas nulle.

D'après ces hypothèses, la relation (4) est vérifiée d'elle-même pour les indices $m = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)$, quels que soient d'ailleurs les polynômes P.

Elle est impossible pour l'indice $m = k$. On peut maintenant choisir les polynômes de telle sorte que la relation (4) soit vérifiée pour tous les indices supérieurs à k. Mais il est à remarquer que, de cette manière, les polynômes d'indice moindre se trouvent entièrement déterminés.

Effectivement, la suite indéfinie des polynômes P, d'après la condition (1), dépend d'une série simple de constantes arbitraires $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et l'on a

$$P_m(x) = \lambda_0 \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \lambda_1 \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} + \lambda_2 \frac{x^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)} + \ldots + \lambda_{m-1} x + \lambda_m.$$

Pour l'indice $m = k + 1$, la condition (4) donne une relation entre λ_0 et λ_1; pour l'indice $k + 2$, une relation entre $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et ainsi de suite.

J'achève enfin la détermination des polynômes, en faisant, pour l'indice k,

$$A P_k(a) + B P_k(b) + C P_k(c) + \ldots + L P_k(l) = 1.$$

Ce résultat est obtenu si l'on prend

$$\lambda_0 = \frac{1.2\ldots k}{A a^k + B b^k + C c^k + \ldots + L l^k}.$$

En résumé, voici comment sont choisis les polynômes dont il s'agit :

Soient A, B, C, ..., L, *et* a, b, c, ..., l *des constantes ; envisageons les quantités*

$$T_\mu = A a^\mu + B b^\mu + C c^\mu + \ldots + L l^\mu,$$

et soit T_k *la première de ces quantités qui ne soit pas nulle dans la suite* T_0, T_1, T_2, ...

Il existe une suite indéfinie de polynômes $P_m(x)$, *tels que l'on ait*

$$(5) \qquad AP_k(a) + BP_k(b) + CP_k(c) + \ldots + LP_k(l) = 1,$$

et, pour tous les indices m *autres que* k,

$$(6) \qquad AP_m(a) + BP_m(b) + CP_m(c) + \ldots + LP_m(l) = 0.$$

Ces polynômes satisfont d'ailleurs à la condition (1), *c'est-à-dire que chacun d'eux est la dérivée du suivant.*

Tels sont les polynômes que je choisis pour former la série dont je vais m'occuper.

On a aisément une expression concise de ces polynômes, par la formule

$$(7) \qquad P_m(x) = \frac{1}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m}\frac{\zeta^k e^{\zeta x}}{A e^{\zeta a} + B e^{\zeta b} + \ldots + L e^{\zeta l}}\right)_{\zeta=0}.$$

3. Revenons à la formule (3), mettons successivement $b, c, \ldots, l$ au lieu de a, formons la quantité

$$(8) \qquad -R_m = AU_m(a) + BU_m(b) + CU_m(c) + \ldots + LU_m(l),$$

et tenons compte des relations (5) et (6). Le résultat est celui-ci :

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} f^{(k)}(x) = {} & [Af(a) + Bf(b) + \ldots + Lf(l)]P_0 \\ & + [Af'(a) + Bf'(b) + \ldots + Lf'(l)]P_1(x) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ & + [Af^{(m)}(a) + Bf(b) + \ldots + Lf^{(m)}(l)]P_m(x) + R_m. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, *avec les polynômes* P *ci-dessus définis et une fonction* *quelconque $f(x)$, on peut former une série dont le terme général est*

$$[\mathrm{A}f^{(m)}(a)+\mathrm{B}f^{(m)}(b)+\ldots+\mathrm{L}f^{(m)}(l)]\mathrm{P}_m(x),$$

et qui représente la dérivée d'ordre k de cette fonction $f(x)$, sauf un reste dont l'équation (8) *fournit l'expression par une intégrale définie.*

4. Pour commencer l'étude de cette série (9), j'en fais l'application à la fonction

$$f(x)=e^{\zeta x}.$$

Le terme général sera

$$\zeta^m(\mathrm{A}e^{\zeta a}+\mathrm{B}e^{\zeta b}+\ldots+\mathrm{L}e^{\zeta l})\mathrm{P}_m(x).$$

La série indéfiniment prolongée donne donc pour résultat,

$$(\mathrm{A}e^{\zeta a}+\mathrm{B}e^{\zeta b}+\ldots+\mathrm{L}e^{\zeta l})[\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1(x)\zeta+\mathrm{P}_2(x)\zeta^2+\ldots].$$

Si elle converge, on voit, d'après (7), qu'elle représente $\zeta^k e^{\zeta x}$, ce qui est bien $f^{(k)}(x)$.

Posons, pour abréger,

$$\lambda(\zeta)=\mathrm{A}e^{\zeta a}+\mathrm{B}e^{\zeta b}+\ldots+\mathrm{L}e^{\zeta l}. \tag{10}$$

Soit ρ le plus petit module des racines de l'équation $\lambda(\zeta)=0$, sauf zéro. La série

$$\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1(x)\zeta+\mathrm{P}_2(x)\zeta^2+\ldots$$

représente ou non la fonction $\dfrac{\zeta^k e^{\zeta x}}{\lambda(\zeta)}$ suivant que le module de ζ est inférieur ou supérieur à ρ. Donc *la série* (9), *indéfiniment prolongée, s'applique à la fonction $e^{\zeta x}$ ou ne s'y applique pas, suivant que ζ est inférieur ou supérieur au plus petit module ρ des racines, autres que zéro, de l'équation $\lambda(\zeta)=0$.*

Il est bien digne de remarque que cette condition soit indépendante de x. Ce trait essentiel de la série (9) va se retrouver pour tous les cas. Déjà nous voyons qu'il subsiste pour les fonctions composées de sommes d'exponentielles. Par exemple, aux fonctions $\sin\zeta x$, $\cos\zeta x$ la série (9) s'applique dans le cas seulement où ζ est de module moindre que ρ.

La considération de la fonction

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta^k e^{\zeta x}}{\lambda(\zeta)}$$

conduit tout naturellement à rechercher l'expression asymptotique des polynômes $P_m(x)$ pour m infiniment grand, au moyen de la belle méthode que M. Darboux a développée dans son Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (¹). Le principe de cette méthode, pour le cas actuel, est si simple que je vais le rappeler.

5. Considérons une fraction rationnelle $\Phi(\zeta)$ dont les infinis aient tous le même module ρ. Rangeons les fractions simples, dans lesquelles $\Phi(\zeta)$ se décompose, suivant l'ordre décroissant des exposants de leurs dénominateurs, et soit ainsi

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) = {} & \frac{M}{(u-\zeta)^p} + \frac{M'}{(u'-\zeta)^p} + \frac{M''}{(u''-\zeta)^p} + \ldots, \\ & + \frac{N}{(v-\zeta)^{p-1}} + \frac{N'}{(v'-\zeta)^{p-1}} + \frac{N''}{(v''-\zeta)^{p-1}} + \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Suivant l'hypothèse, $u, u', u'', \ldots, v, v', v'', \ldots$ ont un même module ρ.

Prenons la dérivée d'ordre m, et faisons $\zeta = 0$,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m} \\ & = \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{1.2\ldots m}\left(\frac{M}{u^{p+m}} + \frac{M'}{u'^{p+m}} + \frac{M''}{u''^{p+m}} + \ldots\right), \\ & + \frac{(p-1)p\ldots(p+m-2)}{1.2\ldots m}\left(\frac{N}{v^{p+m-1}} + \frac{N'}{v'^{p+m-1}} + \frac{N''}{v''^{p+m-1}} + \ldots\right), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

Si nous considérons comme formant un seul terme la somme des termes de la première ligne, comme un autre terme la somme des termes de la seconde ligne, et ainsi de suite, nous avons là,

---

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3ᵉ série, t. IV.

pour m infiniment grand, des quantités rangées dans l'ordre décroissant en ce qui concerne leurs grandeurs. Le premier terme est la partie principale. Il pourrait, bien entendu, se présenter des cas d'exception si ce premier terme était nul.

En second lieu, considérons une fonction $\Psi(\zeta)$, synectique autour de l'origine, et dont les points singuliers les plus proches de l'origine soient des pôles, à distance ρ. Il existe alors une fraction $\Phi(\zeta)$, dont la différence à $\Psi(\zeta)$ est synectique dans un rayon ρ_1, plus grand que ρ. Dans ce rayon, la série de Maclaurin, appliquée à $\Psi(\zeta) - \Phi(\zeta)$, converge. Donc, en désignant par ε une quantité infiniment petite avec $\frac{1}{m}$, on a

$$\frac{\Psi^{(m)}(0) - \Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m} = \frac{\varepsilon}{\rho_1^m}. \tag{12}$$

Ce qui vient d'être dit pour une fonction telle que $\Psi(\zeta)$ peut être appliqué à la fonction $\varphi(\zeta)$ qui nous occupe. Le rayon ρ est alors le module minimum des racines, autres que zéro, de la fonction $\lambda(\zeta)$. Les quantités u, u', ... sont ces racines ; elles sont indépendantes de x. Quant aux numérateurs des fractions simples, ils sont de cette forme :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{M} = \mathrm{a}e^{ux}, & \mathrm{M}' = \mathrm{a}'e^{u'x}, & \mathrm{M}'' = \mathrm{a}''e^{u''x}, \ldots, \\ \mathrm{N} = (\mathrm{b}x + \mathrm{c})e^{vx}, & \mathrm{N}' = (\mathrm{b}'x + \mathrm{c}')e^{v'x}, & \mathrm{N}'' = (\mathrm{b}''x + \mathrm{c}'')e^{v''x}, \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \end{array}$$

où a, a$'$, ..., c$''$, ... sont des constantes.

Nous avons pour définition générale des polynômes $P_m(x)$ l'expression

$$P_m(x) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m};$$

en conséquence, l'étude qui vient d'être faite nous apprend comment se comportent ces polynômes pour m infiniment grand. Il nous est possible de répondre aux questions posées.

6. Je vais considérer une série S composée avec les polynômes $P_m(x)$ et des coefficients μ_0, μ_1, ... indépendants de x :

$$S = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \mu_2 P_2(x) + \ldots + \mu_m P_m(x) + \ldots,$$

et je vais faire voir d'abord que *si, pour une suite continue de valeurs attribuées à x, la série* S *converge, il en est de même dans la série* Σ,

$$\Sigma = \mu_0 \Phi(0) + \mu_1 \Phi'(0) + \mu_2 \frac{\Phi''(0)}{1.2} + \ldots + \mu_m \frac{\Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m} + \ldots,$$

obtenue en remplaçant la fonction $\varphi(\zeta)$ par la fraction rationnelle $\Phi(\zeta)$, et réciproquement.

En premier lieu, cherchons la condition pour que le $(m+1)^{\text{ième}}$ terme de S soit infiniment petit avec $\frac{1}{m}$. D'après les expressions de M, M', ... la partie principale de $P_m(x)$ est

$$\frac{p(p+1)(p+m-1)}{1.2\ldots m}\left[\frac{a e^{ux}}{u^{p+m}} + \frac{a' e^{u'x}}{u'^{p+m}} + \frac{a'' e^{u''x}}{u''^{p+m}} + \ldots\right],$$

si toutefois le facteur entre crochets n'est pas nul. Mais $u, u', u'', \ldots$ sont essentiellement différents entre eux. Ce facteur ne peut donc être nul pour une suite continue de valeurs attribuées à x. On a donc bien ainsi la partie principale de $P_m(x)$. Pour que $\mu_m P_m(x)$ soit infiniment petit avec $\frac{1}{m}$ dans les mêmes conditions, il faut et il suffit qu'il en soit de même quand on remplace $P_m(x)$ par un seul des termes ci-dessus. Désignant toujours par ρ le module commun à $u, u', u'', \ldots$, et par ν_m la quantité

$$\nu_m = \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\mu_m}{\rho^m},$$

j'ai cette condition : *ν_m doit être infiniment petit avec $\frac{1}{m}$.*

Démontrons maintenant la proposition. A cet effet, envisageons la quantité

$$\mu_m\left[P_m(x) - \frac{\Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\right],$$

que, d'après la relation (12), nous pouvons écrire

$$(13)\qquad \nu_m \frac{1.2\ldots m}{p(p+1)\ldots(p+m-1)}\,\varepsilon\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^m.$$

Comme ν_m est infiniment petit et $\frac{\rho_1}{\rho}$ inférieur à l'unité, on a là le terme général d'une série absolument convergente. Donc : 1° si le $m^{\text{ième}}$ terme d'une des séries S ou Σ n'est pas infiniment petit avec $\frac{1}{m}$, il en est de même pour l'autre série ; 2° si le $m^{\text{ième}}$ terme est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$, la différence des deux séries est une série convergente. La proposition est donc prouvée.

7. Pour étudier la série S, il suffit donc d'examiner la série Σ. En tenant compte des expressions qu'affectent ici les numérateurs M, M',..., et aussi de l'égalité (11), on reconnaît que le $(m+1)^{\text{ième}}$ terme de Σ est une somme de quantités, en nombre limité, ayant la forme $G(m)x^r e^{ux}$, où les fonctions telles que $G(m)$ sont indépendantes de x.

La convergence, devant avoir lieu pour une suite continue de valeurs attribuées à x, exige que chacune des séries, dont le terme général est tel que $G(m)$, converge séparément. Cette condition se réduit d'ailleurs à celle de la convergence pour la série dont le terme général est ν_m. Quand cette condition est remplie, la convergence a lieu, quel que soit x.

Voici donc la conclusion :

Désignons par ρ *le module minimum des racines, autres que zéro, de l'équation*

$$A e^{a\zeta} + B e^{b\zeta} + C e^{c\zeta} + \ldots = 0, \tag{14}$$

et soit une série composée avec les polynômes $P_m(x)$, *définis ci-dessus, et des coefficients* $\mu_0, \mu_1, \ldots$ *indépendants de* x, *comme il suit :*

$$S = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \ldots + \mu_m P_m(x) \ldots .$$

1° *Si cette série est convergente pour une suite continue de valeurs attribuées à* x, *elle est convergente, quel que soit* x ;

2° *La condition nécessaire et suffisante pour cette convergence est que la série*

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_m x^m \ldots$$

soit convergente dans un cercle de rayon supérieur à $\frac{1}{\rho}$.

8. Après cette étude sur la série générale S, examinons le cas où l'on compose cette série en prenant

$$\mu_m = \mathrm{A} f^{(m)}(a) + \mathrm{B} f^{(m)}(b) + \mathrm{C} f^{(m)}(c) \dots .$$

Il ne s'agit plus seulement de savoir si la série converge, mais encore si elle représente $f^{(k)}(x)$. A cet égard, il est bon d'observer (¹) que la série peut très bien converger sans représenter la fonction. Désignons par ζ une racine quelconque de l'équation (14), et prenons la fonction $e^{\zeta x}$. Pour cette fonction particulière, tous les coefficients de la série sont nuls. Deux fonctions telles que $f(x)$ et $f(x) + e^{\zeta x}$ donnent ainsi lieu à une même série, qui, si elle représente l'une des fonctions, ne peut représenter l'autre.

La question posée se trouve résolue comme il suit :

Pour que la série (9) *s'applique à une fonction* $f(x)$, *il faut et il suffit :*

1° *Qu'il existe une constante* α *telle, que le produit* $\alpha^m f^{(m)}(x)$, *pour toute valeur finie attribuée à* x, *ne devienne pas infini avec* m;

2° *Que la constante* α *ait un module supérieur à* $\frac{1}{\rho}$.

En premier lieu, ces conditions sont suffisantes; c'est ce que montre immédiatement la forme (8) du reste de la série, combinée avec l'expression asymptotique des polynômes $\mathrm{P}_m(x)$. Effectivement, ces conditions remplies, les intégrales $\mathrm{U}_m(a)$, $\mathrm{U}_m(b)$, ... sont infiniment petites avec $\frac{1}{m}$.

Pour prouver maintenant que les conditions dont il s'agit sont aussi nécessaires, reprenons la série S, où les constantes sont choisies de manière qu'elle converge. Désignons par $\mathrm{F}(x)$ la somme de la série ; c'est, d'après la proposition du n° 7, une fonction finie et uniforme dans tout le plan. J'ai, tout à l'heure, décomposé cette série en la somme de quelques autres $x^r e^{ux} \sum \mathrm{G}(m)$, et en une autre dont le terme général est donné par l'expression (13). De

(¹) Cette observation est imitée de celle que Cauchy a faite autrefois à l'égard de la série de Maclaurin et de la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

cette décomposition résulte que la série peut être différentiée par rapport à x. J'ai ainsi, quels que soient x et m,

$$(15)\qquad F^{(m)}(x) = \mu_m P_0 + \mu_{m+1} P_1(x) + \mu_{m+2} P_2(x) + \ldots,$$

comme il résulte de la propriété (1) des polynômes P. Multiplions les deux membres de cette égalité par ρ^m, et observons que, d'après les hypothèses, tous les termes du second membre sont infiniment petits avec $\frac{1}{m}$, pour conclure que *le produit* $\frac{1}{\rho^m} F^{(m)}(x)$ *a pour limite zéro, quel que soit* x.

Ainsi la fonction $F(x)$, somme d'une série telle que S, satisfait nécessairement aux conditions de l'énoncé précédent. La proposition est ainsi prouvée.

9. Par cette voie, on retrouve immédiatement la composition des coefficients de la série par rapport à la fonction $F(x)$. En effet, de l'égalité (15) et de la définition des polynômes P (nº 2) résulte

$$(16)\qquad AF^{(m)}(a) + BF^{(m)}(b) + CF^{(m)}(c) + \ldots = \mu_{m+k}.$$

Il est bien naturel de se demander maintenant, s'il est possible, ayant défini une fonction $F(x)$ par la série S, de caractériser $F(x)$ de quelque autre manière. Pour le faire, envisageons la fonction suivante :

$$V(x) = \mu_0 + \mu_1 \frac{x}{1} + \mu_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \mu_m \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots,$$

qui, dans le cas où S converge, est synectique dans tout le plan. L'ensemble des relations telles que (16) conduit à cette conséquence

$$(17)\quad AF(a+x) + BF(b+x) + CF(c+x) + \ldots = V^{(k)}(x).$$

Ainsi la fonction $F(x)$ peut être définie comme une solution de cette équation. Mais encore faut-il savoir quelle solution on doit choisir ; c'est ce que permet de décider une des propriétés trouvées tout à l'heure :

La somme de la série S *est, parmi les solutions* $F(x)$ *de* *l'équation* (17), *l'unique fonction pour laquelle le produit* $\frac{1}{\rho^m}F^{(m)}(x)$ *soit infiniment petit avec* $\frac{1}{m}$.

10. Quelques observations me semblent utiles au sujet des fonctions jouissant de cette propriété : $\alpha^m f^{(m)}(x)$ reste fini pour m infini, quel que soit x. D'après l'analyse actuelle, ou, plus simplement, par la série de Taylor, on voit qu'une telle fonction est synectique dans tout le plan. En second lieu, et cette remarque me paraît plus importante, on est assuré qu'une fonction jouit de la propriété en question, si on la lui reconnaît *pour une seule valeur de x*, aux environs de laquelle la fonction est synectique. Effectivement, prenons la relation

$$f^{(m)}(x+h) = f^{(m)}(x) + hf^{(m+1)}(x) + \frac{h^2}{1.2}f^{(m+2)}(x) + \ldots,$$

et multiplions les deux membres par α^m. Si nous supposons que $\alpha^m f^{(m)}(x)$ reste fini pour m infini, la série obtenue converge vers une quantité finie. Donc $\alpha^m f^{(m)}(x+h)$ reste fini pour m infini, et la proposition en résulte. Ainsi la fonction e^{x^2} ne jouit pas de la propriété dont il s'agit. Au contraire, les fonctions

$$e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}, \quad \cos\sqrt{x}, \quad \sqrt{x}\sin\sqrt{x},$$

et aussi les fonctions de Bessel en jouissent ; de plus, pour ces fonctions, la constante α est infiniment grande. On peut donc leur appliquer la série proposée, quelles que soient les constantes A, B, ..., a, b, ...

De la manière la plus générale, on obtient de telles fonctions $f(x)$ comme il suit :

Soit une fonction $\psi(x)$ définie par la série suivante, convergente à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon α,

$$\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \psi_3 x^3 + \ldots,$$

et divergente à l'extérieur de ce cercle. Posons

$$f(x) = \psi_0 + \psi_1\frac{x}{1} + \psi_2\frac{x^2}{1.2} + \psi_3\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

La fonction $f(x)$ aura la propriété demandée à l'égard de la constante α. Au moyen de $\psi(x)$, on peut définir $f(x)$ par une intégrale; *on a, en effet,*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \psi(z) e^{\frac{x}{z}} \frac{dz}{z},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé embrassant l'origine, et dont tous les rayons sont inférieurs à α.

Suivant une expression employée par Abel, ψ est la *déterminante* de f.

On peut manifestement se servir de cette expression de $f(x)$ pour démontrer que les conditions de l'énoncé du n° 8 sont suffisantes et se dispenser ainsi de recourir à la forme du reste donnée au début de ce travail.

11. De l'égalité (15) et de la définition (17), je conclus

$$F(x+y) = P_0 V(y) + P_1(x) V'(y) + P_2(x) V''(y) + \ldots.$$

C'est un développement de $F(x)$, suivant les dérivées d'une autre fonction $V(y)$, ici liée à F par la relation (17). L'idée de généraliser de tels développements est bien naturelle, et j'y donnerai suite un peu plus loin. Je veux d'abord appliquer la théorie qui précède au cas particulièrement intéressant de la série imaginée par M. Léauté.

12. Si l'on réduit à deux le nombre des quantités $a, b, \ldots$, et qu'on prenne $A + B = 0$, on obtient, comme cas particulier, la série de M. Léauté. Ainsi cette série procède suivant des polynômes P, définis par l'expression

$$1.2\ldots m P_m(x) = \left(\frac{d^m}{d\zeta^m} \frac{\zeta e^{\zeta x}}{e^{\zeta a} - e^{\zeta b}}\right)_{\zeta=0}.$$

Cette expression suggère immédiatement l'idée d'un rapprochement avec les *polynômes de Bernoulli* (¹), qui sont définis par

(¹) Pour les polynômes de Bernoulli, consultez l'excellent ouvrage de M. Schlömilch, *Compendium der höheren Analysis* (3ᵉ édition), t. II, p. 211.

l'une ou l'autre des deux égalités suivantes :

$$\psi_m(z) = m[1^{m-1} + 2^{m-1} + 3^{m-1} + \ldots + (z-1)^{m-1}],$$

$$\psi_m(z) = \left[\frac{d^m}{d\zeta^m}\,\frac{\zeta(e^{\zeta z}-1)}{e^\zeta - 1}\right]_{\zeta=0}.$$

Effectivement, si, en employant la notation usuelle des nombres de Bernoulli, on pose

$$\left(\frac{d^{2n}}{d\zeta^{2n}}\,\frac{\zeta}{e^\zeta - 1}\right)_{\zeta=0} = (-1)^{n-1} B_{2n-1},$$

on trouve très aisément les deux relations suivantes :

$$P_{2n-1}(x) = \frac{(a-b)^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-1)}\,\psi_{2n-1}\left(\frac{x-b}{a-b}\right),$$

$$P_{2n}(x) = \frac{(a-b)^{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}\left[\psi_{2n}\left(\frac{x-b}{a-b}\right) + (-1)^{n+1} B_{2n-1}\right].$$

La fonction $\lambda(\zeta)$ a ici pour racines les quantités de la forme $\frac{2ni\pi}{a-b}$, où n est un entier quelconque. La racine zéro réservée, on en trouve deux ayant le module minimum. Ces racines sont $\pm\frac{2i\pi}{a-b}$, et l'on a

$$\rho = \frac{2\pi}{a-b}.$$

En conséquence du théorème général, on a donc cette proposition :

Si le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$, pour m infiniment grand, reste fini, la fonction $f(x)$ est développable suivant la série de M. Léauté, savoir :

$$f(x) = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx + P_1(x)[f(a) - f(b)]$$
$$+ P_2(x)[f'(a) - f'(b)] + \ldots,$$

pourvu que l'intervalle $(a-b)$ soit inférieur à $2\pi\alpha$.

13. Cette série ayant, d'après son inventeur, une grande utilité pour les applications mécaniques, et pouvant dans beaucoup de

cas, même sans converger, fournir, par un nombre limité de termes, une approximation convenable, il sera bon de donner au reste de la série une forme pratique. C'est ce que je pourrai faire aisément ici, au moyen de l'expression de ce reste, savoir :

$$R_m = U_m(b) - U_m(a).$$

Au point de vue où je me place maintenant, on devra essentiellement supposer x réel et compris entre les deux constantes b, a.

Les polynômes de rang impair ont, dans l'intervalle de b à a, les seules racines b, $\frac{a+b}{2}$, a. Les polynômes de rang pair ont, dans cet intervalle, deux racines qui varient avec le rang. A cause de ces circonstances, on obtient la forme la plus simple du reste en s'arrêtant, dans la série, à un terme de rang pair. Je prendrai pour dernier terme celui qui a le rang $2m$. Le reste sera donc

$$R_{2m-1} = U_{2m-1}(b) - U_{2m-1}(a).$$

Il nous faut évaluer les deux intégrales U. Prenons d'abord la seconde

$$U_{2m-1}(a) = (a-x)\int_0^1 P_{2m-1}[tx+(1-t)a]\,f^{(2m)}[ta+(1-t)x]\,dt;$$

supposons $b<a$ et x compris entre b et $\frac{a+b}{2}$. Partageons le champ d'intégration en faisant varier d'abord t depuis zéro jusqu'à $\frac{a-b}{2(a-x)}$; alors $tx+(1-t)a$ varie de a jusqu'à $\frac{a+b}{2}$, en même temps que $ta+(1-t)x$ varie de x jusqu'à $x+\frac{a-b}{2}$. Cette partie de l'intégrale, dans le champ de laquelle le facteur P_{2m-1} ne change pas de signe, est

$$f^{(2m)}(\xi)\left[-P_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)+P_{2m}(a)\right],$$

où ξ est intermédiaire entre x et $x+\frac{a-b}{2}$.

Faisons varier ensuite t depuis $\frac{a-b}{2(a-x)}$ jusqu'à l'unité ; alors

$tx+(1-t)a$ varie de $\frac{a+b}{2}$ à x, tandis que $ta+(1-t)x$ varie de $x+\frac{a-b}{2}$ à a. Cette partie de l'intégrale est

$$f^{(2m)}(\xi')\left[-\mathrm{P}_{2m}(x)+\mathrm{P}_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right],$$

où ξ' est intermédiaire entre $x+\frac{a-b}{2}$ et a.

Prenons maintenant l'intégrale

$$\mathrm{U}_{2m-1}(b)=(b-x)\int_0 \mathrm{P}_{2m-1}[tx+(1-t)b]f^{(2m)}[tb+(1-t)x]\,dt;$$

dans le champ de l'intégration, $tx+(1-t)b$ varie depuis b jusqu'à x; en sorte que P_{2m-1} ne change pas de signe, et l'on a, pour cette intégrale,

$$f^{2m}(\xi'')\,[\mathrm{P}_{2m}(b)-\mathrm{P}_{2m}(x)],$$

où ξ'' est intermédiaire entre x et b.

Le reste a donc la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{2m-1}= &\ f^{(2m)}(\xi'')\,[\mathrm{P}_{2m}(b)-\mathrm{P}_{2m}(x)]\\ &+f^{(2m)}(\xi)\left[\mathrm{P}_{2m}(a)-\mathrm{P}_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\ &+f^{(2m)}(\xi')\left[\mathrm{P}_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)-\mathrm{P}_{2m}(x)\right],\end{aligned}$$

où ξ'', ξ, ξ' sont respectivement dans les intervalles (b, x), $\left(x, x+\frac{a-b}{2}\right)$ et $\left(x+\frac{a-b}{2}, a\right)$.

Si x est entre $\frac{a+b}{2}$ et a, on aura l'expression du reste en échangeant ici a et b et changeant le signe.

On a d'ailleurs

$$\mathrm{P}_{2m}(a)=\mathrm{P}_{2m}(b)=(-1)^{m+1}\frac{(a-b)^{2m-1}}{1.2\ldots(2m)}\mathrm{B}_{2m-1},$$

$$\mathrm{P}_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)=(-1)^{m}\frac{(a-b)^{2m-1}}{1.2\ldots(2m)}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)\mathrm{B}_{2m-1}.$$

L'expression asymptotique des polynômes P_m pour m infiniment grand pourra être utilisée pour fournir une expression approchée de ce reste. Cette expression asymptotique se déduit immédiatement de l'analyse ci-dessus. On peut aussi la tirer du développement des polynômes P en série trigonométrique, développement qui est une conséquence de celui des polynômes de Bernoulli. *Voici ce développement, qui est valable quand x est compris entre b et a,*

$$P_{2n-1}(x) = (-1)^n 2\left(\frac{a-b}{\pi}\right)^{2n-2}\left[\frac{\sin 2\pi\frac{x-b}{a-b}}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 4\pi\frac{x-b}{a-b}}{4^{2n-1}} + \ldots + \frac{\sin 2\mu\pi\frac{x-b}{a-b}}{(2\mu)^{2n-1}} + \ldots\right],$$

$$P_{2n}(x) = (-1)^{n+1} 2\left(\frac{a-b}{\pi}\right)^{2n-1}\left[\frac{\cos 2\pi\frac{x-b}{a-b}}{2^{2n}} + \frac{\cos 4\pi\frac{x-b}{a-b}}{4^{2n}} + \ldots + \frac{\cos 2\mu\pi\frac{x-b}{a-b}}{(2\mu)^{2n}} + \ldots\right].$$

Le premier terme de chacun de ces développements fournit une expression asymptotique.

14. On ne manquera pas d'observer que, si x est égal à a ou à b, la série vient coïncider avec un développement déjà connu, celui qui conduit à la *série des différences*, de Maclaurin (¹). Effectivement, si l'on fait $x = b$, $a - b = h$, et qu'on tienne compte des relations

$$P_1(b) = -\frac{1}{2}, \quad P_{2m+1}(b) = 0, \quad P_{2m}(b) = (-1)^{m-1}\frac{(a-b)^{2m-1}}{1.2..(2m)}B_{2m-1},$$
$$f^{(m)}(a) - f^{(m)}(b) = \Delta f^{(m)}(b),$$

on obtient

$$hf(b) = \int_b^a f(x)\,dx - \frac{h}{2}\Delta f(b) + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f'(b) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta f''(b)\ldots.$$

(¹) *Voir*, par exemple, l'ouvrage déjà cité de M. Schlömilch, p. 229.

On a une autre série, tout à fait analogue, en prenant $x = \frac{a+b}{2}$:

$$hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_b^a f(x)\,dx - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{B_1 h^2}{1.2}\,\Delta f'(b) + \left(1 - \frac{1}{8}\right)\frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\,\Delta f'''(b)\ldots.$$

15. J'arrive maintenant aux séries plus générales dont j'ai dit quelques mots précédemment (n° **11**). C'est encore de la formule (3), placée au début de ce Mémoire, que je vais les tirer. Pour ce but, la somme limitée, telle que $AU_m(a) + BU_m(b) + \ldots$, va être remplacée par une intégrale définie. Je multiplie donc les deux membres de l'équation (3) par une fonction arbitraire de la quantité a, considérée comme variable, et j'intègre entre deux limites constantes. Je détermine les polynômes P de manière à faire évanouir tous les termes, sauf un seul, dans la première partie du second membre, et j'obtiens la conclusion que voici :

Soient b, c des constantes, $\theta(z)$ une fonction quelconque, et considérons les quantités T_μ ainsi définies :

$$T_\mu = \int_b^c \theta(z) z^\mu\,dz.$$

Soit T_k la première de ces quantités qui ne soit pas nulle dans la suite $T_0, T_1, T_2, \ldots$. Prenons les polynômes P, dont l'expression générale est

$$(18)\qquad P_m(x) = \frac{1}{1.2\ldots m}\left[\frac{d^m}{d\zeta^m}\,\frac{\zeta^k e^{\zeta x}}{\int_b^c e^{\zeta z}\theta(z)\,dz}\right]_{\zeta=0}.$$

La série, dont le terme général est

$$(19)\qquad P_m(x)\int_b^c \theta(z) f^{(m)}(z)\,dz,$$

représente $f^{(k)}(x)$, sauf un reste dont l'expression, quand on s'arrête au $(m+1)^{ième}$ terme est la suivante :

$$(20)\quad R_m = \int_b^c \theta(z)\,dz \int_0^1 dt\,(x - z)P_m[tx + (1-t)z]f^{(m+1)}[tz + (1-t)x].$$

16. On peut aussi remplacer l'intégration entre deux limites par l'intégration le long d'un contour, et obtenir de la sorte les résultats les plus variés. Pour chaque cas, l'étude des conditions sous lesquelles le reste R_m est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$ présentera des circonstances diverses. Mais laissons tout d'abord de côté cette étude, et supposons que nous soyons effectivement dans un cas où ce reste ait zéro pour limite. Admettons, pour simplifier, que le nombre k soit zéro. De la série, si elle peut être différentiée, on tirera comme au n° **11**,

$$f(x+y) = P_0 V(y) + P_1(x) V'(y) + P_2(x) V''(y) \ldots + P_m(x) V^{(m)}(y) \ldots.$$

De là cette conséquence : *Pour développer $f(x+y)$ suivant les dérivées successives d'une fonction quelconque* $V(y)$, *on déterminera une fonction $\theta(z)$ par la condition*

$$\int \theta(z) f(z+y)\, dz = V(y),$$

l'intégrale étant prise entre des limites constantes. Les coefficients des dérivées de $V(y)$ *seront les mêmes que ceux des puissances correspondantes de ζ dans le développement de la fonction*

$$\frac{e^{\zeta x}}{\int \theta(z) e^{\zeta z}\, dz}.$$

Les coefficients sont, comme l'on voit, des polynômes dont chacun est la dérivée du suivant. On peut prendre la question d'un autre point de vue, en se donnant ces polynômes. La manière la plus générale de les définir est la suivante : $P_m(x)$ est le $(m+1)^{\text{ième}}$ coefficient dans le développement de $e^{\zeta x}\varphi(\zeta)$ suivant les puissances croissantes de ζ. Pour trouver le développement demandé, on devra donc déterminer la fonction $\theta(z)$ par la condition

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)} = \int e^{\zeta z} \theta(z)\, dz,$$

et c'est alors le développement ci-dessus qui satisfera à la question.

Enfin, une dernière observation générale. Si l'on suppose, comme plus haut,

$$V(x) = \mu_0 + \mu_1 \frac{x}{1} + \mu_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \mu_m \frac{x^m}{1.2\ldots m} \ldots,$$

et qu'on envisage la série

$$S = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \mu_2 P_2(x) + \ldots + \mu_m P_m(x) \ldots$$

formée avec une suite donnée de polynômes P, la somme de cette série fournit une fonction $f(x)$, solution de l'équation

$$\int_b^c \theta(z) f(z+x)\, dz = V(x).$$

17. L'examen des conditions sous lesquelles s'applique la série si générale dont je viens de parler ne saurait être fait avec précision. Il faudra se restreindre à des cas particuliers. L'élément essentiel de la question réside dans la nature des points singuliers, les plus proches de l'origine, que possède la fonction $\frac{1}{\lambda(\zeta)}$. La fonction $\lambda(\zeta)$, analogue à celle qui a été envisagée plus haut, est ici

$$(21) \qquad \lambda(\zeta) = \int_b^c e^{\zeta z} \theta(z)\, dz.$$

En premier lieu, la définition (18) des polynômes $P_m(x)$ suppose implicitement la fonction $\lambda(\zeta)$ synectique autour de l'origine. De cette seule hypothèse résulte cette conséquence tout à fait générale : *la série définie au n° 15 s'applique aux fonctions $f(x)$ qui jouissent de la propriété déjà mentionnée, savoir : il existe une constante α, laissant fini le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$, pour m infini. A une telle fonction la série s'applique pourvu que le rayon maximum du cercle, ayant son centre à l'origine et à l'intérieur duquel la fonction $\frac{\zeta^k}{\lambda(\zeta)}$ est synectique, soit supérieur à l'inverse du module de la constante α.*

En effet, soit ρ ce rayon. Le produit $P_m(x)\rho_1^m$ est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$, dès que ρ_1 est inférieur à ρ. Donc, d'après l'hypothèse, $P_m(x) f^{(m)}(y)$ est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$, quels que soient

x et y. Donc le reste R_m est infiniment petit. C'est ce qu'il fallait prouver.

18. Les conditions précédentes, suffisantes dans tous les cas, sont aussi nécessaires toutes les fois que le rayon ρ existe. C'est ce qu'il est aisé de prouver au moyen d'une analyse semblable à celle que j'ai employée précédemment (n° 6). Les séries correspondantes ne s'appliquent donc qu'à des catégories très restreintes de fonctions, et perdent par là beaucoup de leur intérêt, au point de vue de l'analyse pure. Mais il en est tout autrement quand le rayon ρ est infini, c'est à dire quand la fonction $\lambda(\zeta)$, synectique dans tout le plan, n'a, en outre, aucun zéro. Un exemple de ce cas s'est offert à moi comme déjà connu : celui où la fonction $\lambda(\zeta)$ est $e^{a\zeta^2}$. C'est la série de M. Hermite [1]. Mais cette série présente ce caractère très différent, qu'elle s'applique aussi à des fonctions discontinues, à la manière de la série de Fourier. Cette circonstance, qui tient à la détermination des coefficients par le moyen de la fonction seule et non plus de ses dérivées, m'a conduit à envisager spécialement les cas de la série générale où un pareil fait peut être mis en évidence.

D'après la forme (19) du terme général de la série, supposons la fonction $\theta(z)$ choisie de telle sorte qu'elle s'évanouisse, ainsi que toutes ses dérivées, aux deux limites b, c de l'intégration. Cela fait, le terme général prend cette nouvelle forme

$$(22) \qquad (-1)^m P_m(x) \int_b^c \theta^{(m)}(z) f(z)\, dz,$$

et se calcule au moyen de la fonction f seule, non plus de ses dérivées. Il est naturel de donner aussi une forme analogue au reste R_m (20), en faisant disparaître la dérivée de la fonction f. Dans cette transformation, il arrive que R_m se présente comme la différence de deux expressions dont l'une est $f(x)$, l'autre la somme de la série sous forme d'intégrale double. Je me contente de donner ici le résultat de la transformation et de le vérifier *a posteriori*.

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII.

Je prends pour point de départ l'intégrale double suivante :

$$(23)\qquad (-1)^m S_m = \iint dy\, dz\, f(z)\, \theta^{(m+1)}(y)\, P_m(x+y-z),$$

à l'intérieur de l'aire limitée par les conditions

$$\begin{gathered}(z-y)(x-z) > 0, \quad b < z < c,\\ (x-y)(x-z) > 0,\end{gathered}$$

et je suppose d'ailleurs x compris entre b et c.

Commençons l'intégration par la variable y. Il faudra séparer l'intégrale en deux parties. Dans la première, les limites de y seront b, z, et celles de z, b et x; dans la seconde, les limites seront c, z pour y; et x, c pour z. La première de ces quadratures donne le résultat que voici :

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_b^z \theta^{(m+1)}(y)\, P_m(x+y-z)\, dy\\ &\quad = P_m(x)\theta^{(m)}(z) - P_{m-1}(x)\theta^{(m-1)}(z) + \ldots\\ &\qquad \pm P_1(x)\theta'(z) \mp P_0\theta(z). \end{aligned}\right.$$

C'est ce qu'on voit, d'une part, à cause de la propriété fondamentale (1) des polynômes P, et, d'autre part, à cause de l'hypothèse que la fonction $\theta(z)$ et ses dérivées s'évanouissent à la limite b.

En intégrant la même différentielle entre les limites c, z, on aura ce même résultat. Les deux quadratures par rapport à z se réunissent donc en une seule : on doit multiplier la somme (24) par $f(z)\,dz$, et intégrer de b à c. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_m = P_0 \int_b^c \theta(z) f(z)\, dz - P_1(x)\int_b^c \theta'(z) f(z)\, dz\\ + P_2(x)\int_b^c \theta''(z) f(z)\, dz + \ldots\\ + (-1)^m P_m(x) \int_b^c \theta^{(m)}(z) f(z)\, dz. \end{aligned}$$

19. Ainsi se trouve exprimée par une intégrale définie la somme des $(m+1)$ premiers termes de la série. Dans chaque cas, on pourra faire usage de cette expression pour reconnaître la limite de cette somme. J'ai opéré cette vérification pour le cas où l'on prend b, c égaux à $-\infty$ et $+\infty$, avec $\theta(z) = e^{-z^2}$. En faisant connaître cette série, M. Hermite a donné aussi l'expression asymptotique des polynômes correspondants. Du même coup, on a l'expression asymptotique de $\theta^{(m)}(z)$. Rien n'est plus aisé alors que d'obtenir la limite de l'intégrale (23), qui s'offre, comme pour la série de Fourier, sous la forme $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Les polynômes P, dans ce cas, forment une *suite de Sturm*. Aussi pourrait-on faire encore la démonstration au moyen de la méthode donnée par M. Darboux tout spécialement pour les séries procédant suivant de tels polynômes (*Mémoire sur l'approximation*..., déjà cité).

Je me borne toutefois à ces indications, croyant de tels détours inutiles. Le sujet porte en lui-même un caractère d'évidence remarquable, comme je vais le montrer.

20. Pour préciser, je prends b, c égaux à $-\infty$ et $+\infty$, et je choisis la fonction $\theta(z)$ suivante

$$\theta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\omega^{2n}} \cos z\omega \, d\omega, \tag{25}$$

où a est une constante et n un entier, tous deux positifs. A la place de cette définition, on peut mettre cette autre équivalente :

$$\theta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\omega^{2n} - iz\omega} \, d\omega.$$

Je considère maintenant la fonction particulière

$$F(z) = e^{i\zeta z},$$

et je prends l'intégrale

$$A_m = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(m)}(z)\,\theta(z)\,dz, \tag{26}$$

dont le calcul est aisé :

$$\begin{aligned} A_m &= (i\zeta)^m \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-a\omega^{2n} + iz(\zeta-\omega)} \\ &= (i\zeta)^m \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-a\omega^{2n}} \cos z(\zeta - \omega). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fourier, ceci donne

$$A_m = 2\pi(i\zeta)^m e^{-a\zeta^{2n}}.$$

Je considère le développement, suivant les puissances ascendantes de ζ, de la fonction suivante,

$$\frac{1}{2\pi} e^{\zeta x + (-1)^n a\zeta^{2n}} = P_0 + P_1(x)\zeta + \ldots + P_m(x)\zeta^m + \ldots,$$

où, comme l'on voit, les coefficients sont des polynômes entiers en x, appartenant à la classe générale dont il est question dans ce Mémoire.

Ce développement, à cause de la nature de la fonction, est valable pour toutes les valeurs de ζ. J'y change ζ en $i\zeta$, et j'ai

$$(27) \qquad e^{i\zeta x} = \sum_{m=0}^{m=\infty} 2\pi(i\zeta)^m e^{-a\zeta^{2n}} P_m(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} P_m(x) A_m,$$

développement encore valable quel que soit ζ.

Observons maintenant que la fonction $\theta(z)$ et toutes ses dérivées s'évanouissent pour z croissant à l'infini par des valeurs réelles; et concluons, au lieu de (26), la forme suivante pour A_m

$$A_m = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) e^{i\zeta z}\, dz.$$

Je peux donc remplacer l'égalité (27) par celle-ci :

$$e^{i\zeta x} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) e^{i\zeta z}\, dz,$$

d'où je tire aisément

$$(28) \qquad \cos\zeta(x-t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) \cos\zeta(z-t)\, dz.$$

Il ne faut pas perdre de vue le point important : ce développement est valable quel que soit ζ. On pourra donc l'étendre à toutes les valeurs de ζ jusqu'à l'infini. En outre, il est aisé de voir que la convergence de la série est uniforme par rapport à la variable ζ. Il est donc permis de l'intégrer, et cela jusqu'à une limite infinie.

C'est ce que je fais, après avoir, au préalable, multiplié les deux membres par $f(t)\,dt$, et intégré de $-\infty$ à $+\infty$. La fonction $f(t)$ est d'ailleurs arbitraire.

Le premier membre devient

$$(29) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \cos\zeta(x-t) = 2\pi f(x),$$

si la fonction f a été choisie parmi celles auxquelles s'applique le théorème de Fourier.

Le terme général du second membre devient

$$(-1)^m \mathrm{P}_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) \cos\zeta(z-t)\,dz,$$

ou, si l'on renverse l'ordre des intégrations et qu'on tienne compte de (29),

$$2\pi(-1)^m \mathrm{P}_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) f(z)\,dz.$$

21. D'après le mode de démonstration, la série obtenue est prouvée pour les seules valeurs réelles de la variable, et à l'égard de toute fonction susceptible d'être représentée par l'intégrale double de Fourier. Mais cette intégrale double ne s'applique qu'à des fonctions restant finies pour $x = \pm\infty$, et il est certain qu'ici les conditions sont plus larges, puisque le développement s'applique effectivement aux polynômes entiers, à la fonction $e^{\zeta x}, \ldots$. A cet égard, on démontrera aisément que la seule condition consiste en ce que les produits $f(z)\theta^m(z)$ puissent être intégrés jusqu'à $\pm\infty$. On pourra donc résumer ainsi le résultat acquis :

Une fonction $f(x)$, développable en série trigonométrique dans tout intervalle fini, pourra être représentée, pour toutes les valeurs réelles de la variable, en une série procédant suivant les polynômes P_0, $\mathrm{P}_1(x)$, $\mathrm{P}_2(x), \ldots$, dont l'expression *générale est*

$$P_m(x) = \frac{1}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m} e^{\zeta x + (-1)^n a \zeta^{2n}}\right)_{\zeta=0}$$

$$= \frac{x^m}{m!} + (-1)^n \frac{a}{1} \frac{x^{m-2n}}{(m-2n)!} + \frac{a^2}{2} \frac{x^{m-4n}}{(m-4n)!} + \ldots$$

$$+ (-1)^{sn} \frac{a^s}{s!} \frac{x^{m-2sn}}{(m-2sn)!} \cdots$$

Le terme général de la série est

$$(30) \quad \frac{(-1)^m}{2\pi} P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(x) e^{-a\omega^{2n}} \omega^m \cos\left(x\omega + \frac{m\pi}{2}\right).$$

Le développement sera possible sous la condition que l'intégration, par rapport à x, dans le coefficient de chaque terme, puisse être étendue jusqu'à $\pm\infty$. Il représentera la fonction $f(x)$ à la manière des séries trigonométriques.

22. C'est en prenant $n = 1$ que l'on obtient, comme un cas particulier, la série donnée par M. Hermite dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LVIII). Dans ce cas, la première des intégrations (30) s'effectue, et le terme général prend successivement les deux formes

$$\frac{(-1)^m}{2\sqrt{a\pi}} P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-\frac{x^2}{4a}}\right),$$

$$\frac{1.2\ldots m}{2(2a)^m\sqrt{a\pi}} P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} P_m(x) f(x)\, dx,$$

dont la dernière est celle qu'a employée M. Hermite.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME CINQUIÈME.