F. TISSERAND

Sur le mouvement du pendule conique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 448-454
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_448_0>

MÉLANGES.

SUR LE MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE;

PAR M. F. TISSERAND.

M. Resal a montré dans son *Traité de Mécanique* que la courbe décrite par la projection de l'extrémité du pendule sur l'horizon, dans le cas des petites oscillations, est une ellipse dont le grand axe tourne d'un mouvement uniforme autour de son centre. Les calculs suivants ont pour but de fixer le degré d'approximation de cette solution.

Soient l la longueur du pendule, g la gravité, θ l'angle du pendule avec la verticale, θ_0 le maximum, θ_1 le minimum de θ, φ l'angle que fait le plan vertical du pendule avec la position initiale de ce plan; en admettant que, pour $t=0$, $\theta=\theta_0$ et $\varphi=0$, on a les formules suivantes :

$$k=\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$(1)\quad k\sqrt{2}\,dt=-\frac{\sin\theta\sqrt{\cos\theta_0+\cos\theta_1}\,d\theta}{\sqrt{(\cos\theta-\cos\theta_0)(\cos\theta_1-\cos\theta)(1+\cos\theta\cos\theta_0+\cos\theta\cos\theta_1+\cos\theta_0\cos\theta_1)}},$$

$$(2)\quad d\varphi=-\frac{\sin\theta_0\sin\theta_1\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{(\cos\theta-\cos\theta_0)(\cos\theta_1-\cos\theta)(1+\cos\theta\cos\theta_0+\cos\theta\cos\theta_1+\cos\theta_0\cos\theta_1)}}.$$

Nous allons développer ces formules en séries; posons

$$\sin\theta=u,\quad \sin\theta_0=u_0,\quad \sin\theta_1=u_1;$$

$$(3)\qquad u^2=u_0^2\cos^2\psi+u_1^2\sin^2\psi.$$

Pour $t=0$, on aura $\psi=0$; on tire de là

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta-\cos\theta_0)(\cos\theta_1-\cos\theta)}}=-\frac{\sqrt{(\cos\theta+\cos\theta_0)(\cos\theta+\cos\theta_1)}}{u\sqrt{1-u^2}}\,d\psi,$$

et les formules (1) et (2) deviennent

$$(4)\quad k\sqrt{2}\,dt=\frac{d\psi}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{\sqrt{(\cos\theta+\cos\theta_0)(\cos\theta+\cos\theta_1)(\cos\theta_0+\cos\theta_1)}}{\sqrt{1+\cos\theta\cos\theta_0+\cos\theta\cos\theta_1+\cos\theta_0\cos\theta_1}},$$

$$(5)\quad d\varphi=\frac{u_0u_1\,d\psi}{u^2\sqrt{1-u^2}}\,\frac{\sqrt{(\cos\theta+\cos\theta_0)(\cos\theta+\cos\theta_1)}}{\sqrt{1+\cos\theta\cos\theta_0+\cos\theta\cos\theta_1+\cos\theta_0\cos\theta_1}}.$$

On a les développements suivants :

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}u^4 - \ldots,$$

$$\cos\theta_0 = 1 - \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{8}u_0^4 - \ldots,$$

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{8}u_1^4 - \ldots;$$

on en conclut

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(1 + \cos\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\cos\theta_1 + \cos\theta_0\cos\theta_1)\\ &\quad = 1 - \frac{u^2 + u_0^2 + u_1^2}{4} - \frac{u^4 + u_0^4 + u_1^4}{16} + \frac{u^2u_0^2 + u^2u_1^2 + u_0^2u_1^2}{16} + \ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}(\cos\theta + \cos\theta_0)(\cos\theta + \cos\theta_1)(\cos\theta_0 + \cos\theta_1)\\ &\quad = 1 - \frac{u^2 + u_0^2 + u_1^2}{2} - \frac{u^4 + u_0^4 + u_1^4}{16} + 3\frac{u^2u_0^2 + u^2u_1^2 + u_0^2u_1^2}{16} + \ldots.\end{aligned}$$

La formule (5) donnera ensuite

$$\left(k\frac{dt}{d\psi}\sqrt{1 - u^2}\right)^2 = 1 - \frac{u^2 + u_0^2 + u_1^2}{4} - \frac{u^4 + u_0^4 + u_1^4}{16} - \ldots,$$

$$\begin{aligned}k\frac{dt}{d\psi}\sqrt{1 - u^2} = 1 &- \frac{u^2 + u_0^2 + u_1^2}{8} - 5\frac{u^4 + u_0^4 + u_1^4}{128}\\ &- \frac{u^2u_0^2 + u^2u_1^2 + u_0^2u_1^2}{64} + \ldots;\end{aligned}$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}k\frac{dt}{d\psi} &= 1 - \frac{u_0^2 + u_1^2}{8} - 5\frac{u_0^4 + u_1^4}{128} - \frac{u_0^2u_1^2}{64}\\ &\quad + \left(\frac{3}{8} - 5\frac{u_0^2 + u_1^2}{64}\right)u^2 + \frac{35}{128}u^4 + \ldots;\end{aligned}\right.$$

on trouve de même

$$(7)\qquad \frac{1}{u_0u_1}\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{3}{8} - \frac{u_0^2 + u_1^2}{32} + \frac{1}{u^2} + \frac{35}{128}u^2 + \ldots.$$

Il est aisé de démontrer que, si loin qu'on pousse les approximations, le coefficient de $\frac{1}{u^2}$, dans le second membre de la formule (7), sera toujours égal à 1.

Il faut maintenant trouver t et φ en fonction de ψ, en partant des formules (6) et (7); en se reportant à la définition (3) de u, on trouvera

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{u^2} = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_0^2 \cos^2\psi + u_1^2 \sin^2\psi} = \frac{1}{u_0 u_1} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{u_1}{u_0}\operatorname{tang}\psi\right),$$

$$\int_0^\psi u^2 d\psi = \frac{u_0^2 + u_1^2}{2}\psi + \frac{u_0^2 - u_1^2}{4}\sin 2\psi,$$

$$\int_0^\psi u^4 d\psi = \frac{3(u_0^4 + u_1^4) + 2u_0^2 u_1^2}{8}\psi + \frac{u_0^4 - u_1^4}{4}\sin 2\psi + \frac{(u_0^2 - u_1^2)^2}{32}\sin 4\psi.$$

Il en résultera

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} kt = \psi\left[1 + \frac{u_0^2 + u_1^2}{16} + \frac{25(u_0^4 + u_1^4) - 26u_0^2 u_1^2}{1024} + \ldots\right] \\ + (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{3}{32} + 25\frac{u_0^2 + u_1^2}{512} + \ldots\right)\sin 2\psi \\ + (u_0^2 - u_1^2)^2\left(\frac{35}{4096} + \ldots\right)\sin 4\psi + \ldots; \end{aligned}\right.$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{u_1}{u_0}\operatorname{tang}\psi\right) + u_0 u_1\left(\frac{3}{8} + 27\frac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\psi + u_0 u_1 (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{35}{512} + \ldots\right)\sin 2\psi + \ldots.$$

Nous poserons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{u_1}{u_0}\operatorname{tang}\psi\right), \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi', \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(10)\quad \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{u_1}{u_0}\operatorname{tang}\psi,$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi' = u_0 u_1\left(\frac{3}{8} + 27\frac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\psi \\ + u_0 u_1 (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{35}{512} + \ldots\right)\sin 2\psi + \ldots. \end{aligned}\right.$$

En résolvant l'équation (8) par rapport à ψ, et déterminant k'

par l'équation

$$(12)\qquad k = k'\left[1 + \frac{u_0^2 + u_1^2}{16} + \frac{25(u_0^4 + u_1^4) - 26 u_0^2 u_1^2}{1024} + \ldots\right],$$

on trouvera

$$\psi = k't - (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{3}{32} + 11\,\frac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\sin 2\psi$$
$$- (u_0^2 - u_1^2)^2\left(\frac{35}{4096} + \ldots\right)\sin 4\psi - \ldots.$$

On en tire aisément, au même degré d'approximation,

$$(13)\qquad \begin{cases} \psi = k't - (u_0^2 - u_1^2)\left(\dfrac{3}{32} + 11\,\dfrac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\sin 2k't \\ \qquad + (u_0^2 - u_1^2)^2\left(\dfrac{1}{4096} + \ldots\right)\sin^2 4k't + \ldots. \end{cases}$$

En portant cette valeur de ψ dans l'expression (11) de φ', et posant

$$(14)\qquad k'' = k'\left(1 + 9\,\frac{u_0^2 + u_1^2}{32} + \ldots\right),$$

il viendra, après des calculs faciles à effectuer,

$$(15)\qquad \varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t + u_0 u_1 (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{17}{512} + \ldots\right)\sin 2k't + \ldots.$$

L'équation (13) donnera ψ; (3) fera connaître u^2 ou $\sin^2\theta$; φ sera déterminé par les formules (9), (10), (15).

Concevons un axe polaire Ox', faisant avec l'ancien Ox l'angle φ' déterminé par l'équation (15); l'angle polaire de la projection du pendule, relativement à Ox', sera φ_1; le rayon vecteur du même point, compté à partir du point O, sera

$$(16)\qquad \rho = lu;$$

on a, du reste, en vertu de l'équation (3),

$$\tan g^2\psi = \frac{u_0^2 - u^2}{u^2 - u_1^2},$$

et (10) donne

$$\tang^2\varphi_1 = \frac{u_1^2}{u_0^2}\,\frac{u_0^2 - u^2}{u^2 - u_1^2}.$$

En posant de même

$$\rho_0 = lu_0, \quad \rho_1 = lu_1;$$

on trouvera

$$\tang^2\varphi_1 = \frac{\rho_1^2}{\rho_0^2}\,\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho^2 - \rho_1^2};$$

d'où

$$(17) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2}\cos^2\varphi_1 + \frac{1}{\rho_1^2}\sin^2\varphi_1:$$

c'est l'équation polaire d'une ellipse, ayant pour centre le point O, Ox' pour grand axe; les longueurs des axes de cette ellipse sont $2\rho_0$ et $2\rho_1$.

L'équation (15) fait connaître le mouvement angulaire de la direction du grand axe; (10) et (13) donnent le mouvement sur l'ellipse.

L'angle ψ est l'anomalie excentrique, ainsi que le montre l'équation (10).

Nous allons donner le résumé des formules, en ajoutant un terme du sixième ordre dans l'expression de k', et un du quatrième dans celle de k''; nous ne donnons pas le détail du calcul de ces nouveaux termes.

$$(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{aligned}
&k = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \sin\theta_0 = u_0; \quad \sin\theta_1 = u_1\\
&k' = \frac{k}{1 + \frac{u_0^2+u_1^2}{16} + \frac{25(u_0^4+u_1^4) - 26u_0^2u_1^2}{1024} + \frac{225(u_0^6+u_1^6) - 313u_0^2u_1^2(u_0^2+u_1^2)}{16384} + \ldots}\\
&k'' = k'\left[1 + 9\frac{u_0^2+u_1^2}{32} + \frac{151(u_0^4+u_1^4) + 58u_0^2u_1^2}{1024} + \ldots\right];
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II})\quad\left\{\begin{aligned}
\psi = {}& k't - (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{3}{32} + 11\frac{u_0^2+u_1^2}{256} + \ldots\right)\sin 2k't\\
&+ (u_0^2 - u_1^2)^2\left(\frac{1}{4096} + \ldots\right)\sin 4k't - \ldots;
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \tang\varphi_1 = \frac{u_1}{u_0}\tang\psi,$$

$$\text{(IV)} \qquad \sin^2\theta = u_0^2 \cos^2\psi + u_1^2 \sin^2\psi;$$

$$\text{(V)} \quad \varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t + u_0 u_1 (u_0^2 - u_1^2) \left(\frac{17}{512} + \ldots\right) \sin 2k' t + \ldots .$$

$$\text{(VI)} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi'.$$

On aura, dans une première approximation,

$$\psi = k' t,$$

$$\varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t;$$

$u_0 u_1$ est un terme du second ordre, mais, à cause du multiplicateur t, ce terme prend bien vite une valeur considérable.

On voit que le grand axe de l'ellipse tourne d'un mouvement uniforme dans le sens même du mouvement du pendule, et que, sur cette ellipse, le mouvement de la projection est défini par cette condition, que l'anomalie excentrique croît proportionnellement au temps; k'' diffère peu de l'unité; donc le grand axe de l'ellipse tourne avec la vitesse angulaire $\frac{3}{8} u_0 u_1$: c'est là la solution de M. Resal.

Deuxième approximation :

$$\psi = k' t - \frac{3}{32}(u_0^2 - u_1^2) \sin 2k' t,$$

$$\varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t.$$

Le grand axe de l'ellipse tourne encore d'un mouvement uniforme, mais la loi du mouvement sur l'ellipse est plus compliquée.

La troisième approximation est donnée par les formules (II) et (V); le mouvement de rotation du grand axe n'est plus proportionnel au temps; il y a un petit terme périodique.

Faisons une application numérique, en supposant

$$\theta_0 = 30°, \quad \theta_1 = 15°.$$

Nous trouverons

$$\psi = k't - 1^\circ 7' 33'' \sin 2k't + 2'' \sin 4k't,$$
$$\varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t + 2' 42'' \sin 2k't.$$

En supposant $l = 0^m,5$, je trouve que le petit terme périodique de φ', savoir $2' 42'' \sin 2k't$ ne serait accusé sur la circonférence qui passe par les extrémités du grand axe de l'ellipse mobile que par un petit déplacement égal au plus à un cinquième de millimètre, et cependant θ_0 et θ_1 ont des valeurs relativement considérables.

On peut donc conclure de là que, dans les conditions où l'on fait généralement les expériences sur le pendule conique, on peut admettre sans erreur appréciable que la projection de l'extrémité du pendule reste toujours sur une ellipse de forme invariable, qui tourne autour de son centre d'un mouvement uniforme.

Mais, si l'on voulait calculer le lieu du mobile sur l'ellipse, il faudrait, dans la valeur de ψ, avoir égard au terme périodique $-\frac{3}{32}(u_0^2 - u_1^2) \sin 2k't$, introduit par la seconde approximation.