Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 425-447

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_425_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

IN MEMORIAM DOMINICI CHELINI COLLECTANEA MATHEMATICA, nunc primum edita cura et studio L. CREMONA et E. BELTRAMI. — 1 vol. in-8°, 424 p. Milan, 1881.

MM. Cremona et Beltrami ont eu la pensée touchante d'élever à la mémoire du P. Chelini un monument scientifique digne de lui; répondant à leur appel, les mathématiciens de l'Europe entière, les membres de la famille intellectuelle de Chelini sont venus former un pieux cortège d'admirateurs et d'amis; ils ont signé les pages d'un livre qui honorera longtemps la mémoire de ce savant si distingué et si modeste, de ce professeur si éminent.

C'est M. Beltrami qui s'est chargé de retracer la vie de Chelini, toute simple et comme cachée, et d'en résumer les œuvres.

Dominico Chelini naquit à Gragnano, le 18 octobre 1802; il termina ses études, en 1826, au collège de Nazareth, et fut consacré prêtre l'année suivante. Pendant vingt années (1831-1851), il enseigna, dans ce même collège, les Mathématiques, qu'il avait étudiées seul. En 1843, il fit la connaissance de Jacobi, venu à Rome pour des raisons de santé avec Lejeune-Dirichlet, Steiner, Schlaefli et Borchardt; il ne pouvait manquer d'acquérir l'estime et l'amitié du grand géomètre et de ses célèbres compagnons.

Nommé professeur de Mécanique et d'Hydraulique en 1851, à l'Université de Bologne, il occupa cette chaire jusqu'en 1860; le gouvernement nouveau montra, à son égard, une certaine tolérance; à la vérité, Chelini fut tout d'abord destitué, mais il fut réintégré immédiatement dans sa chaire, comme professeur extraordinaire et délivré de l'obligation de prêter un serment que sa conscience de prêtre lui interdisait; malheureusement, ces dispositions libérales, si justifiées par le caractère de l'homme qu'elles regardaient et par son talent, ne durèrent pas; en 1864, le ministère crut devoir exiger de lui le serment: Chelini refusa et fut destitué. En 1867, il fut chargé, à l'Université Romaine, de l'enseignement de la Mécanique rationnelle; quatre ans plus tard, Rome étant devenue capitale de l'Italie, il dut quitter sa chaire.

Il avait été nommé membre de l'Académie des Nuovi Lincei en 1847, de l'Académie de Bologne en 1854, de la Société Italienne des XL en 1863.

Chelini est mort en 1879.

M. Beltrami classe les travaux de Chelini en quatre groupes : Géométrie analytique, Théorie des surfaces, Mécanique, Mémoires divers.

Chelini s'est particulièrement occupé de la théorie des projections et de la composition des droites, des aires et des points ; il a exposé ses vues d'une façon systématique dans les deux beaux Mémoires intitulés : *Sulla composizione geometrica dei sistemi di rette, di aree e di punti; Sulla nuova geometria dei complessi.* Nous ne pouvons que renvoyer le lecteur à l'excellente analyse que M. Ruffini en a donnée dans le *Giornale di Matematiche* et que le *Bulletin* a reproduite (1re série, t. VII, p. 241) (1).

L'*Interpretazione geometrica di formole essenziali alle scienze dell' estensione, del moto e delle forze* se rapporte, comme le titre l'indique, à des considérations du même ordre.

Dans le *Saggio di Geometria analitica trattata con nuovo metodo* et dans le Mémoire intitulé (2) : *Sull' uso sistematico dei principi relativi al metodo delle coordinate rettilinee,* Chelini a développé en particulier une idée due à Cauchy et qui devrait avoir pénétré entièrement dans l'enseignement classique de la Géométrie analytique : elle consiste à adjoindre au trièdre des coordonnées (obliques) le trièdre supplémentaire ; la dépendance entre les deux systèmes de coordonnées tient à la dépendance entre la forme quadratique qui donne le carré de la distance d'un point à l'origine et la forme adjointe; grâce à l'emploi de ces deux trièdres, qui s'impose d'ailleurs lorsqu'on se sert de coordonnées rectilignes ou orthogonales, les formules deviennent élégantes et symétriques.

Le Mémoire intitulé : *Sopra alcuni punti notabili nella teoria elementare dei tetraedri e delle coniche* contient une solution nouvelle et simple du problème de Lagrange ; d'autres travaux ont

---

(1) *Voir* aussi dans le *Bulletin,* t. IV, p. 248.
(2) *Voir* le *Bulletin,* t. VII, p. 125.

contribué au développement et à la diffusion des découvertes de Chasles et de Möbius.

A propos du Mémoire *Sulla curvatura delle linee e delle superficie,* où Chelini a développé des propositions de la Géométrie des lignes et des surfaces qui sont indépendantes des vues de Gauss, M. Beltrami insiste avec raison sur la simplicité de la considération suivante, qui, dit-il, mériterait d'entrer dans tous les traités et qui peut servir de point de départ à la théorie ordinaire de la courbure, indépendamment de toute hypothèse sur le choix des axes. En désignant par X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à une surface et par S l'arc d'une ligne quelconque tracée sur cette surface, on a

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0,$$

d'où, en différentiant par rapport à s,

$$X\frac{d^2x}{ds^2}+Y\frac{d^2y}{ds^2}+Z\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\cos\theta}{\rho}=-\left(\frac{dX}{ds}\frac{dx}{ds}+\cdots\right),$$

où ρ désigne le rayon de courbure et θ l'angle qu'il fait avec la normale à la surface ; or le second membre conserve la même valeur pour toutes les courbes qui passent par le même point et y ont la même tangente.

Chelini publia ensuite les *Dimostrazioni geometriche delle trasformazioni degli integrali multipli relativi alle superficie ed ai volumi*, les *Teoremi relativi alle linee di curvatura e geodetiche sopra i paraboloidi*, la *Determinazione geometrica in coordinate ellittiche degli elementi* ds_1, ds_2, ds_3 *delle tre linee d'intersezione* s_1, s_2, s_3 *secondo cui si intersecano in un punto tre superficie ortogonali di secondo grado ;* puis, dans un travail étendu (*Di alcuni teoremi di Gauss relativi alle superficie curve*), il fit connaître en Italie les résultats des admirables *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* non sans y ajouter plusieurs propositions originales. Le *Memoria sulle formole fondamentali riguardanti la curvatura delle superficie e delle linee* contient l'application aux coordonnées curvilignes des formules relatives aux deux trièdres supplémentaires, la transformation générale de l'équation de Laplace, l'établissement des formules relatives à la courbure des surfaces d'un système triple ; enfin, dans la *Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio e nelle superficie,* Chelini a développé d'une façon complète et systématique ses recherches antérieures et les résultats essentiels de cette partie de la science.

L'un des plus beaux travaux de Chelini sur la Mécanique rationnelle est cette *Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secondo i concetti del sig. Poinsot,* dont M. Hermite a pu dire qu'on y trouve développées « pour la première fois les conséquences analytiques de la belle théorie de Poinsot, que son auteur ni personne n'avait encore données d'une manière aussi approfondie (¹) ». Malgré sa modestie, Chelini a dû sentir le prix singulier de cet éloge que lui donnait, dix-huit ans après la publication de son travail, celui qui portait au rare degré de perfection que l'on sait la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Des intégrales, des forces vives et des aires, Chelini déduit l'équation de la projection de la polodie sur un plan principal de l'ellipsoïde central, projection qui est une ellipse ; introduisant ensuite l'*anomalie excentrique* φ de la projection du pôle instantané, il exprime au moyen de cet angle les composantes p, q, r, et la vitesse angulaire ω ; la relation entre ω et t donne φ en fonction elliptique du temps.

Peu après la publication de ce Mémoire, Chelini donnait les *Elementi di Meccanica razionale con Appendice sui principi fondamentali delle Matematiche,* etc., puis un Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes. Le travail intitulé *Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento d'una figura di forma invariabile* est relatif aux déplacements finis. Dans le Mémoire *Dell'uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dei momenti d'inerzia*, l'auteur montre comment on peut, dans certains cas, se débarrasser de l'hypothèse de l'orthogonalité des axes. Les derniers travaux de Chelini regardent principalement la théorie des axes permanents et des centres de percussion : *Sulle proprietà geometriche e dinamiche dei centri di percossa nei*

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 24 décembre 1877.

moti di rotazione. — Intorno ai principî fondamentali della dinamica con applicazioni al pendolo ed alla percussione dei corpi secondo Poinsot ([1]).

On le voit par cette rapide analyse, Chelini a surtout cherché à faire œuvre d'enseignement; il a montré dans cette œuvre assez de force d'esprit pour qu'on soit assuré qu'il n'eût pas moins réussi en se consacrant tout entier à des recherches originales; mais, ainsi que le dit M. Beltrami, « il est bon que, dans la science et dans toutes les activités humaines, chaque intelligence s'applique à sa manière, quand elle est saine et robuste ». Sans doute la joie mêlée de modestie, que ressentait Chelini en faisant briller de toute leur lumière et de toute leur beauté des vérités déjà conquises, était aussi vive que celle qu'il aurait éprouvée en pénétrant plus avant dans les régions inexplorées du monde mathématique.

La préface de M. Beltrami est suivie de la liste complète des trente-trois publications de Chelini, qui se trouvent, sauf les *Elementi di Meccanica,* dans le *Giornale Arcadico,* la *Raccolta scientifica di Palomba,* les *Annali di scienze compilati da Tortolini,* les *Annali di Matematica pubblicati da Tortolini,* le *Giornale di Matematiche delle Università Italiane,* le *Bullettino* du prince *Boncompagni,* les *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei,* les *Memorie dell' Accademia di Bologna.*

Voici maintenant la liste des Mémoires qui forment les *Collectanea Mathematica,* avec de brèves indications sur les matières traitées.

Hermite. — Sur les fonctions $\Theta(x)$ et $\mathrm{H}(x)$ de Jacobi. (p. 1-5, fr.).

La série

$$\varphi(x,\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n q^{\frac{m^2}{4}} e^{\frac{mi\pi\omega}{2K}}}{\tang\frac{\pi}{2K}(x-miK')};$$

où $m=2n+1$ et qui donne $\frac{1}{\Theta(x)}$ quand on y fait $\omega=0$, jouit

([1]) *Bulletin,* 2ᵉ série, t. I, IIᵉ Partie, p. 82.

de la propriété

$$\varphi(x)e^{\frac{i\pi}{K}(x+iK'+\omega)} = -\varphi(x+2iK') + H(\omega)\left[1 - e^{\frac{i\pi}{K}(x+iK'+\omega)}\right];$$

de même pour la série

$$\sum_{+\infty}^{-\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{ni\pi\omega}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-2niK')},$$

qui pour $\omega = 0$ donne $\frac{1}{H(x)}$. Ces résultats sont obtenus directement par la décomposition en éléments simples des termes de la série.

Siacci. — L'hyperboloïde central dans la rotation des corps. (p. 6-16, ital.).

Quand un corps tourne autour d'un point fixe sans qu'il y ait de forces extérieures, un certain hyperboloïde, lié à ce corps et dont les axes coïncident avec les axes principaux d'inertie relatifs au point, roule sans glisser sur un cylindre circulaire droit dont l'axe passe par le point fixe et est parallèle à l'axe du couple d'impulsion.

Cayley. — Sur une équation différentielle. (17-26, angl.).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{(a'z^2+2b'z+c')\,dz^2}{z^2(z-1)^2} = \frac{(ax^2+2bx+c)\,dx^2}{x^2(x-1)^2},$$

qui, ainsi que l'a montré M. Kummer, joue un rôle si considérable dans la théorie de la transformation des séries hypergéométriques.

Battaglini. — Sur les cubiques ternaires syzygétiques. (27-50, ital.).

Dans ce travail l'auteur donne plusieurs propositions intéressantes relatives aux relations entre une cubique et sa cayleyenne, et il généralise quelques théorèmes de Clebsch relativement aux coniques polaires et aux poloconiques prises par rapport aux cubiques d'un faisceau syzygétique.

HIRST. — Sur les complexes engendrés par deux plans corrélatifs. (51-73, angl.).

Ce travail fait suite à l'étude sur la corrélation de deux plans publiée dans le Recueil de la *Société Mathématique* de Londres, 1874, t. V, p. 40. Soient α, β les deux plans qui se correspondent. Si la droite a du premier correspond au point B de l'autre, réciproquement à tout point A du premier point situé sur la droite a correspondra une droite b passant par B. On dit que les deux points A et B sont conjugués. Il est clair que la droite AB engendre un complexe C dont M. Hirst approfondit la nature et les singularités.

D'OVIDIO. — Note sur certains hyperboloïdes annexés aux cubiques gauches. (72-90, ital.).

L'auteur rappelle les formules fondamentales qu'il a données dans son *Studio sulle cubiche gobbe* présenté à l'Académie de Tunis (9 mars 1879), et qui sont obtenues par l'emploi des notations symboliques introduites par Clebsch dans l'étude des formes binaires. Il étudie ensuite certains faisceaux et réseaux de surfaces du second degré qui se présentent dans la théorie des cubiques gauches, en particulier les hyperboloïdes par trois cordes d'une cubique.

MANNHEIM. — Constructions planes des éléments de courbure de la surface de l'onde. (91-104, fr.).

Le point de départ est la génération trouvée par Mac Cullagh. La solution repose sur la représentation géométrique d'un élément de surface réglée au moyen d'une droite auxiliaire et sur la représentation d'un pinceau de droites au moyen d'une circonférence et d'un point.

PADOVA. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (105-116, ital.).

L'auteur étend la méthode donnée par Ampère (Cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique*) au cas d'un nombre quelconque de variables, et montre qu'elle conduit à la méthode de Cauchy, en évitant la difficulté signalée par M. Bertrand.

SMITH. — Sur quelques fractions continues. (117-143, lat.).

Sur la résolution en nombres entiers des équations de la forme

$$P_1P_2 - 2R^2 = \pm 1, \quad P_1P_2 - 3R^2 = \pm 1,$$

les solutions étant mises sous la forme qu'affecte le numérateur d'une fraction limitée. Sur certaines représentations par des formes quadratiques. Sur certains développements des racines carrées en fractions continues.

CAPORALI. — Sur les systèmes linéaires triplement infinis des courbes algébriques planes. (142-170, ital.).

Solution des principaux problèmes de géométrie numérique qui se présentent dans la théorie de ces systèmes; la méthode consiste à faire dépendre ces questions de considérations stéréométriques et les propriétés obtenues résultent de l'étude d'une surface représentée point par point sur le plan des systèmes linéaires de façon que ses sections planes aient pour images les courbes du système linéaire.

CERRUTI. — Sur une généralisation de quelques théorèmes de Mécanique. (171-182, ital.).

Si un point (x, y, z) est soumis à l'action d'une force qui ne dépende que de la position du point, les équations du mouvement auront une intégrale de la forme

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

où x', y', z' sont les composantes de la vitesse et où A, B, C, D sont des fonctions de x, y, z; si les lignes d'action de la force appartiennent à un complexe linéaire, cette condition est d'ailleurs nécessaire : une ligne quelconque peut toujours être décrite librement par une force dont les lignes d'action appartiennent à un complexe linéaire donné arbitrairement. L'auteur examine le cas où il existe deux intégrales de cette forme; il traite aussi le cas où le point doit se mouvoir sur une surface : si ses coordonnées sont u, v, pour qu'il existe une intégrale de la forme

$$A u' + B v' + C = 0,$$

il faut que la surface soit une surface hélicoïdale.

Bardelli. — Sur les axes d'équilibre. (183-205, ital.).

Étant donné un système solide en équilibre, il existe toujours trois directions orthogonales entre elles, telles que, en faisant tourner le corps autour de l'une d'elles d'un angle égal à $(2n+1)\pi$, il vienne dans une nouvelle position d'équilibre, en supposant que les forces soient restées appliquées au même point et n'aient point varié en grandeur et en direction. La détermination de ces directions dépend d'une équation du 3e degré : quand le dernier terme est nul, il existe en général un axe unique, coïncidant avec une des directions précédemment définies, tel que le corps puisse tourner autour de cet axe d'un angle quelconque en restant en équilibre ; il peut d'ailleurs exister une infinité de tels axes tous parallèles à un plan ; enfin, dans le cas des systèmes astatiques, toute droite de l'espace est un tel axe.

Darboux. — Sur l'équation de Riccati. (199-205, fr.).

Si l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = p + 2qy + + ry^2,$$

où p, q, r désignent des fonctions quelconques de x, admet comme solutions particulières toutes les racines d'une équation algébrique

$$f(y) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions de x, elle admettra aussi comme solutions particulières les racines de tous les covariants du polynôme $f(y)$. L'auteur applique cette proposition à un exemple étudié par M. Cayley.

Borchardt. — Sur deux algorithmes analogues à celui de la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments. (206-212, fr.).

Si l'on considère la suite indéfinie

$$m, n; \quad m_1, n_1; \quad m_2, n_2; \quad \ldots,$$

où m, n sont deux nombres positifs et où

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \qquad n_1 = \sqrt{m_1 n},$$
$$m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \quad n_2 = \sqrt{m_2 n_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les termes de cette suite auront pour limite

$$\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\arccos\dfrac{n}{m}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{\log\dfrac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{n}},$$

selon que l'on aura $n \gtrless m$.

Brioschi. — Sur une forme binaire du huitième ordre. (213-220, ital.).

La forme binaire du huitième ordre f, pour laquelle le covariant du huitième ordre

$$g = \frac{1}{2}(ff)_4$$

satisfait identiquement à la relation

$$g = \rho f_1,$$

où ρ est une constante, ne diffère que par un facteur constant du hessien d'une forme du sixième ordre pour laquelle le covariant correspondant G est identiquement nul.

Brioschi. — Résultante de deux formes binaires, l'une cubique, l'autre biquadratique. (221-223, ital.).

Le système simultané de deux formes binaires, l'une cubique, l'autre biquadratique, a été étudié par M. Gundelfinger; il se compose de soixante-quatre formes; M. Brioschi exprime la résultante au moyen de certains des invariants de M. Gundelfinger.

KRONECKER. — Sur le potentiel dans une multiplicité n^{uple}. (224-231, allem.).

L'auteur donne une forme remarquablement simple pour l'expression du potentiel d'un ellipsoïde, non rapporté à ses axes, dans une multiplicité n^{uple}.

BETTI. — Sur la propagation de la chaleur. (232-240, ital.).

Sur le mouvement de la chaleur dans un milieu isotrope indéfini dont on suppose tous les points à la température zéro, sauf les points contenus dans un espace déterminé.

REYE. — Sur le complexe de sphères quadratiques et sur les cyclides confocales. (241-257, allem.).

L'auteur s'est proposé d'étendre la notion de normale aux complexes linéaires de sphères et d'arriver par une voie nouvelle au système de cyclides orthogonales et homofocales.

DINI. — Sur quelques théorèmes relatifs à la théorie des fonctions d'une variable complexe. (238-276, ital.).

Cette Communication se rapporte au théorème de M. Weierstrass sur l'existence d'une fonction entière dont on donne les zéros. M. Betti (t. III des *Annales de Tortolini*, p. 82) avait établi une proposition qui est un cas particulier de celle de M. Weierstrass; M. Betti avait supposé tous les zéros simples et leurs distances mutuelles supérieures à une quantité donnée : M. Dini montre comment on peut compléter la démonstration de M. Betti et comment des considérations analogues conduisent à la démonstration du théorème de M. Mittag-Leffler.

SCHLAEFLI. — Quelques remarques sur les fonctions de Lamé. (276-287, allem.).

En désignant par A, B, C ($A > B > C$) les carrés des demi-axes d'une surface du second degré, telle que $A - C$, $B - C$ soient des constantes, et en posant

$$dt = \frac{dA}{2\sqrt{ABC}},$$

les fonctions de Lamé (*Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes,* p. 279) sont des fonctions entières du $n^{\text{ième}}$ degré des demi-axes, de la forme

$$P = A^\alpha B^\beta C^\gamma Q,$$

où les exposants α, β, γ sont zéro ou $\frac{1}{2}$, où Q est une fonction entière de A dont le degré ν est déterminé par l'équation

$$2(\alpha + \beta + \gamma + \nu) = n,$$

et telles que

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dt^2}$$

soit une fonction entière (du premier degré) de A; l'auteur montre, d'une façon élémentaire, que l'équation $Q = 0$ a toutes ses racines réelles, que les $\nu + 1$ fonctions Q qui appartiennent à un même groupe d'exposants α, β, γ sont différentes, et qu'il y a effectivement $2n + 1$ fonctions P.

Wolf (R.). — Sur la relation entre la période des taches du Soleil et les variations magnétiques observées à Rome. (288-293, allem.).

Geiser. — Sur les sécantes triples d'une courbe gauche algébrique (294-306, all.).

Problème de géométrie numérique. Nombre des sécantes triples qui passent par un point de la courbe, degré de la surface réglée, engendrée par une telle droite, etc.

Casorati. — Sur une formule fondamentale concernant les discriminants d'une équation différentielle et de son équation primitive complète. (307-312, ital.).

Relation entre le discriminant d'une équation différentielle de la forme

$$\varphi_0 dx^m + \varphi_1 dx^{m-1} dy + \ldots + \varphi_m dy^m = 0,$$

où les φ sont des fonctions de x et de y, et le discriminant de l'équation obtenue par l'intégration et que l'on suppose de la forme

$$f(\Omega) = f_0\Omega^m + f_1\Omega^{m-1} + \ldots + f_m = 0,$$

où les f sont des fonctions de x et de y et où Ω est la constante arbitraire.

Bertini. — Sur les courbes gauches rationnelles du cinquième ordre. (312-326, ital.).

Ces courbes, qui peuvent être obtenues par une transformation quadratique des courbes du quatrième degré, peuvent, si on les suppose sans points doubles, être rangées dans deux classes : les unes admettent une droite quadri-sécante, les autres en admettent une infinité; ce sont les premières qu'étudie M. Bertini, il s'occupe spécialement des droites tri-sécantes et des coniques cinqui-sécantes.

Jung. — Sur les moments obliques d'un système de points. (327-339, ital.).

Étant donné un système de points $(o_1, o_2, \ldots)$ affectés de coefficients numériques $(m_1, m_2, \ldots)$, l'auteur appelle *moment oblique* de degré r de ce système par rapport à un plan la somme $\Sigma m_i x_i^r$ où x_i est la distance du point o_i au plan, comptée parallèlement à une direction fixe; il parvient, pour $r = 2$, par voie synthétique, à une représentation analogue des plans de moment constant. Celle que Hesse a employée pour rendre intuitive la distribution des plans de moment constant; la quadrique imaginaire (*imaginäres Bild*) de Hesse est remplacée par une quadrique qui peut être nulle ou imaginaire.

Beltrami. — Sur la théorie des axes de rotation. (340-362, ital.).

Exposition élégante des principes de la théorie développée par Chelini et M. Turazza.

Boncompagni. — Sur un testament inédit de Nicolò Tartaglia. (363-412, ital.).

Ce testament est reproduit autographiquement.

CREMONA. — Sur une certaine surface du quatrième ordre. (413-424, ital.).

Sur la surface engendrée par faisceaux projectifs

$$S_1 - \lambda S_2 = 0,$$
$$S_3 - \lambda S_4 = 0$$

de surfaces du second degré, en supposant que toutes les surfaces $S = 0$ se touchent en un même point.

WEIERSTRASS. — ZUR THEORIE DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNCTIONEN. — In-4°, 60 pages ([1]).

Dans cet important travail, dont les résultats deviendront classiques, l'illustre géomètre s'est préoccupé principalement d'établir diverses formes analytiques susceptibles de représenter une fonction uniforme satisfaisant à certaines conditions : l'importance et la généralité des conclusions auxquelles parvient M. Weierstrass, la rigueur avec laquelle elles sont déduites, donnent à son œuvre une valeur exceptionnelle.

Une fonction uniforme de x est dite *régulière* dans les environs du point a quand, pour les valeurs de x telles que le module de $x - a$ soit inférieur à une quantité finie, elle peut être représentée par une série convergente telle que

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots.$$

La même condition convient pour le point ∞, en remplaçant $x - \infty$ par $\frac{1}{x}$. Tout point par lequel une fonction uniforme n'est pas régulière est un point singulier : un tel point singulier a est *non-essentiel,* si l'on peut rendre la fonction régulière, dans les environs du point a, en la multipliant par une puissance entière et positive de $x - a$; si on ne peut le faire, le point a est un point

---

([1]) *Abhandlungen der könig. Akad. der Wiss. zu Berlin,* 1876. — *Annales de l'École Normale supérieure,* 2e série, t. VIII, p. 111.

singulier *essentiel.* Le caractère propre des fonctions rationnelles consiste en ce qu'elles ne peuvent avoir que des points singuliers non-essentiels : on n'aperçoit d'abord qu'une fonction uniforme qui n'a que des points singuliers non-essentiels en un nombre nécessairement fini, puisqu'on peut la représenter par le quotient de deux polynômes entiers en x.

Les fonctions uniformes n'ayant qu'un seul point singulier essentiel, situé à l'infini, offrent un intérêt particulier et sont l'objet d'une étude spéciale : elles peuvent être représentées par des séries de la forme

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

convergentes dans tout le plan; réciproquement une telle série illimitée représente une fonction uniforme ayant un seul point singulier essentiel, situé à l'infini. M. Weierstrass donne à ces fonctions le nom de fonctions *entières* (transcendantes); les fonctions entières, au sens ordinaire du mot, étant dites *rationnelles entières.*

On voit aisément qu'une fonction entière, au sens de l'auteur, ne peut avoir, dans une portion limitée du plan, qu'un nombre fini de zéros, même lorsque l'on compte pour n zéros un zéro d'ordre n de multiplicité. La suite des zéros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'une fonction entière, que leur nombre soit, dans tout le plan, fini ou infini, peut donc être rangée de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Chaque valeur entre dans la suite autant de fois qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité du zéro correspondant;

2° Pour deux termes consécutifs de la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ on a

$$|a_{n+1}| \geqq |a_n| \text{ (1)};$$

3° Si la suite des zéros est illimitée, on a

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

Réciproquement, étant donnée une suite de nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfaisant aux conditions précédentes, on peut se demander s'il

(1) Le symbole $|a|$ désigne, en général, le module de la quantité a.

existe une fonction entière dont la suite des zéros soit précisément la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et dans quelle mesure une telle fonction, dont on démontre effectivement l'existence, est déterminée.

On reconnaît d'abord immédiatement qu'on peut toujours former, et cela d'une infinité de façons, une suite de nombres entiers et non négatifs,

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots,$$

tels que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^{m_\nu} \right|$$

soit convergente pour toute valeur finie de x; dès lors la fonction

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^{m_\nu},$$

se comporte évidemment comme la dérivée logarithmique d'une fonction entière dont la suite des zéros serait la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et M. Weierstrass établit effectivement, en toute rigueur, l'existence d'une fonction entière $G(x)$, satisfaisant à cette dernière condition, satisfaisant aussi à l'égalité

$$\frac{dG(x)}{dx} = F(x)\,G(x).$$

Sa démonstration le conduit en même temps à une proposition que l'on peut regarder comme capitale dans cette théorie et qui concerne un mode de représentation analytique d'une fonction entière quelconque, mode de représentation qui met en évidence les zéros de cette fonction :

Toute fonction uniforme entière de x peut être exprimée par un produit infini dont les facteurs sont des fonctions primaires (¹) *de x, de la forme*

$$(kx + l)\,e^{g(x)},$$

(¹) M. Weierstrass appelle en général *fonction primaire* de x (*Primfunction*) toute fonction uniforme de x ayant seulement un point singulier, essentiel ou non, et n'ayant au plus qu'un zéro; la forme générale de ces fonctions est, en désignant *où $g(x)$ est une fonction rationnelle entière de x, s'annulant pour $x = 0$, et où k, l sont des constantes.*

Il est bien entendu que la fonction $g(x)$ peut, ainsi que l'une des constantes k, l, se réduire à zéro, et qu'une constante doit être regardée comme une fonction primaire.

Par exemple, l'inverse de la fonction eulérienne $\Gamma(x+1)$ peut, d'après la définition de Gauss, être mise sous la forme

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log\frac{n+1}{n}};$$

cette fonction est entière (transcendante), ainsi qu'on le déduit bien aisément de cette forme même, et les *facteurs primaires* sont précisément les fonctions

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Quant à la seconde question, la réponse est immédiate; toute fonction entière, ayant les mêmes zéros que la fonction entière $G(x)$, peut être mise sous la forme

$$G(x)e^{\overline{G(x)}},$$

où $\overline{G(x)}$ désigne aussi une fonction entière.

Si maintenant $f(x)$ désigne une fonction uniforme ayant un seul point singulier c, essentiel ou non, on pourra la mettre sous la forme

$$f(x) = G\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

G désignant une fonction entière, transcendante ou rationnelle, selon que le point c sera un point singulier essentiel ou non.

---

par c le point singulier,

$$\left(\frac{k}{x-c}+l\right)e^{G\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

k, l étant des constantes et G une fonction entière : il se borne d'ailleurs au cas où cette fonction est rationnelle : quand le point singulier est à l'infini, $x-c$ doit être remplacé par $\frac{1}{x}$.

De même, la forme la plus générale des fonctions uniformes ayant un seul point singulier essentiel c, ayant, en outre, tels points singuliers non-essentiels que l'on voudra, sera

$$\frac{G_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{G_2\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

où G_1, G_2 désignent des fonctions entières, ne s'annulant pas pour la même valeur de x et dont l'une, au moins, est transcendante.

L'expression la plus générale des fonctions uniformes de x ayant n points singuliers $c_1, c_2, \ldots, c_n$ peut de diverses façons s'obtenir en combinant n fonctions n'ayant qu'un seul point singulier; les formes suivantes sont les plus simples :

$$\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right), \quad \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) R(x),$$

les G désignant les fonctions entières et $R(x)$ représentant une fonction *rationnelle* ne pouvant s'annuler ou devenir infinie que pour les points singuliers essentiels.

Toute fonction uniforme de x, ayant n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ayant en outre un nombre arbitraire (même infini) de points singuliers non-essentiels, peut être représentée par l'une ou l'autre des deux expressions

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\sum_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)},$$

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} R(x),$$

les fonctions G et R ayant la même signification que précédemment, les numérateurs et les dénominateurs ne s'annulant pas pour la même valeur de x.

Inversement, en prenant arbitrairement les fonctions G, ces expressions représentent n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ou un nombre moindre; pour que tous les points c soient des points singuliers essentiels, il faut que les fonctions G satisfassent à certaines conditions; quant au nombre des points singuliers non-essentiels, il n'est soumis à aucune restriction.

Pour établir ces propositions, l'auteur s'appuie sur un lemme qui offre, en lui-même, un intérêt considérable et que voici :

Soit

$$\varphi(x) = k_0 + \frac{k_1}{x - c_1} + \frac{k_2}{x - c_2} + \ldots + \frac{k_n}{x - c_n},$$

les quantités c, k étant des constantes soumises seulement aux restrictions suivantes : aucune des quantités $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ne peut être nulle, deux des quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne peuvent pas être égales; soient maintenant

$$F_0(y), \quad F_1(y), \quad \ldots, \quad F_{n-1}(y),$$

des fonctions uniformes de y, ayant un point singulier essentiel à l'infini; non seulement l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{n=1} F_\nu(y)\left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu,$$

où c représente une quelconque des quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et où l'on suppose y remplacé par $\varphi(x)$, représente une fonction uniforme ayant les points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$, mais encore, étant donnée une telle fonction $f(x)$, on peut déterminer les fonctions

$$F_0(y), \quad F_1(y), \quad \ldots, \quad F_{n-1}(y)$$

de façon que l'on ait

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n=1} F_\nu[\varphi(x)]\left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu;$$

les fonctions

$$F_0(y), \quad \ldots, \quad F_{n-1}(y)$$

seront toutes *entières* (transcendantes), si la fonction $f(x)$ n'admet pas d'autres points singuliers essentiels.

Enfin M. Weierstrass examine, dans le voisinage d'un point singulier essentiel, le mode d'existence de ces fonctions uniformes, à nombre limité de points singuliers essentiels, dont il a été précédemment question, et démontre qu'elles s'approchent autant qu'on le veut de telle valeur qu'on veut. M. Picard, à qui l'on doit la traduction du Mémoire de M. Weierstrass, a récemment complété cet énoncé en montrant que ces fonctions, dans le voisinage d'un point singulier essentiel, *atteignent effectivement* telle valeur qu'on veut.

SCHUR. — Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades ([1]).

L'auteur se propose d'étudier à un point de vue purement géométrique les propriétés des complexes du second degré, propriétés étudiées seulement jusqu'ici analytiquement. Il devait par suite trouver un équivalent de l'équation analytique, c'est-à-dire, une génération géométrique des complexes du second degré.

On obtient une telle génération au moyen de deux faisceaux réciproques de complexes linéaires; autrement dit, si l'on fait correspondre projectivement la variété doublement infinie de complexes linéaires qui passent par une surface réglée du second degré R, la variété aussi doublement infinie de congruences linéaires passant par une autre surface S, les surfaces réglées communes à chaque complexe linéaire passant par R et à la congruence linéaire correspondante passant par S constituent un complexe du second degré. Avant de montrer que tout complexe du second degré peut être engendré de la sorte et de déduire de ce mode de génération les propriétés principales du complexe, l'auteur entreprend une étude géométrique des congruences de second ordre et de seconde classe ou de second degré. (Chap. I.)

([1]) *Mathem. Annalen*, t. XX, p. 431-464.

Il imagine pour cela le complexe linéaire appliqué sur l'espace ponctuel, et alors (Chap. II, § 1-6) la congruence du second degré s'obtient comme représentation d'une surface du second degré. On arrive ainsi facilement aux propriétés des congruences du second degré, celles qui concernent les générations importantes à considérer dans la suite, aussi bien que celles qui se rapportent aux surfaces focales.

En particularisant (§ 7) la position de la surface du second degré représentative de la congruence, relativement à une autre surface du deuxième degré d'importance fondamentale dans la représentation du complexe linéaire sur l'espace ponctuel, on obtient les types principaux de congruence du second degré ou de surfaces de Kummer, tels que Weiler les a donnés dans le t. VII des *Mathematische Annalen*.

On substitue ainsi à l'appareil compliqué des diviseurs élémentaires de Weierstrass la considération bien plus intuitive des relations de position de deux surfaces du second degré.

L'auteur arrive alors (Chap. III, § 2) à la démonstration de la génération d'un complexe du deuxième degré par deux faisceaux réciproques de complexes linéaires. Il y parvient en cherchant les surfaces réglées du second degré contenues dans un complexe du deuxième degré. Partons d'une telle surface réglée par laquelle nous menons une congruence linéaire; cette congruence a avec le complexe du second degré une seconde surface réglée commune; partant de cette dernière et continuant de même, on voit que toutes les surfaces réglées du complexe auxquelles on peut arriver ainsi constituent une variété triplement infinie. Ces surfaces se distribuent en deux systèmes que l'auteur appelle *systèmes de surfaces fondamentales correspondantes :* deux surfaces de systèmes différents peuvent en effet être prises pour bases de deux faisceaux réciproques de complexes linéaires engendrant le complexe du deuxième degré. Deux surfaces réglées appartenant à un même système sont situées dans un complexe linéaire, deux surfaces de systèmes différents ont ou bien une position tout à fait générale ou bien se trouvent, dans un cas, sur une congruence linéaire. De ce mode de génération résulte la considération d'un second complexe que l'on peut dire en involution avec le complexe donné C^2 pour lequel les surfaces réglées sont en involution avec celles des deux systèmes de C^2. L'auteur montre maintenant (§ 3) que toutes les surfaces appartenant aux deux systèmes qui passent par un rayon quelconque p de C^2 appartiennent à un complexe linéaire, le complexe tangent relatif à ce rayon.

Ce complexe tangentiel (§ 4) a en commun avec C^2 une congruence du deuxième degré qui contient en particulier quatre faisceaux de rayons, dont les plans passent par p et dont les centres sont situés sur p. On démontre maintenant que chacun des complexes linéaires, en nombre simplement infini, qui passent par ces quatre faisceaux de rayons est un complexe tangent relatif à p; mais chacun se rapporte à deux nouveaux systèmes de surfaces fondamentales correspondantes.

De la sorte, toutes les surfaces réglées contenues dans C^2 se trouvent distribuées en un nombre simplement infini de tels couples. En fixant *l'un* de ces couples, on peut désormais faire correspondre à chaque rayon de l'espace un complexe linéaire comme complexe polaire; on peut voir qu'à tous les rayons passant par un point correspondent tous les complexes passant par la surface réglée corrrespondant au point; à tous les rayons situés dans un plan correspondent tous les complexes passant par la surface réglée polaire du plan.

De plus, toujours sous les même conditions, on voit (§ 4) que les surfaces polaires de tous les points de l'espace d'une part, et d'autre part les surfaces polaires de tous les plans de l'espace constituent les deux systèmes de surfaces fondamentales d'un complexe du deuxième degré K^2. Ce complexe K^2 est le lieu des rayons dont les complexes polaires sont des complexes linéaires spéciaux; leurs directrices forment un nouveau complexe L^2 qui se représente univoquement sur K^2. Les points (§ 5) qui sont situés sur leurs surfaces polaires sont des points singuliers du complexe C^2, c'est-à-dire que les cônes du complexe passant par ces points se décomposent en deux plans et que de plus l'intersection de ces plans ou droite singulière correspondante appartient alors au complexe K^2. Les rayons singuliers de C^2 sont dès lors les rayons communs à tous les complexes K^2. La chose analogue a lieu pour les plans singuliers et leurs rayons singuliers. L'auteur montre ensuite (§ 6) que parmi les couples en nombre simplement infini de surfaces de bases correspondantes de C^2 il y en a six tels que les deux systèmes se changent l'un dans l'autre. Il arrive ainsi à la considération du complexe linéaire fondamental C. Alors le complexe polaire d'un rayon quelconque p est en même temps complexe polaire du rayon conjugué de p dans le complexe linéaire C. L^2 devient alors aussi linéaire et se confond avec C; K^2 se change aussi en un complexe linéaire, mais tel qu'à un rayon de C correspondent deux rayons de K^2 et à ces deux-ci seulement un rayon de C. Alors aux rayons singuliers de C^2 qui se trouvent sur K^2 correspondent (§ 7) les rayons d'une congruence de deuxième degré située sur C, et il en résulte directement une des générations données précédemment pour cette congruence. Et comme les relations des points et des plans singuliers de C^2 avec leurs surfaces polaires montrent qu'ils sont identiques aux points et aux plans focaux de cette congruence, on a ainsi une démonstration directe de l'identité de la surface des singularités du complexe C^2 et de la surface de Kummer. La définition (§ 8) des complexes du second degré, en nombre simplement infini, situés en involution avec C^2, montre immédiatement qu'il ont la même surface de singularités que C^2.

On voit enfin que deux quelconques d'entre elles sont en involution, c'est-à-dire que les surfaces réglées constituant un couple de surfaces fondamentales correspondantes pour l'un des complexes sont des directrices pour un autre complexe. On a là une relation entre deux complexes qui ont la même surface de singularités, c'est-à-dire d'après la définition analytique qui forment un système unifocal. Voir KLEIN, *Zur Theorie der Liniencomplexe* 1. *und* 2. *Grades* (*Math. Ann.*, Bd. II, S. 198.)

Ce résultat doit être considéré comme analogue à ce théorème, que deux surfaces homofocales du deuxième degré se coupent à angle droit.