Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 41-51

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_41_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FAVARO (Prof. Antonio). — Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico del secolo XV. — Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, 1879, 213 pages.

L'auteur, bien connu comme travailleur infatigable dans le domaine des recherches sur l'histoire des Mathématiques, nous présente ici un essai très développé et très soigné sur la vie et l'œuvre d'un de ses prédécesseurs dans la chaire de Mathématiques de l'Université de Padoue. Considérant le manque presque absolu de travaux sur ce sujet, il reprend les choses de haut et commence par l'histoire de la famille *dei Beldomandi*, qui était une des plus nobles maisons de la ville de Padoue. Grâce à un habile et persévérant emploi de la science des archives, M. Favaro a fixé la généalogie et l'époque de la vie de Prosdocimo, qui, d'après cela, n'était pas, comme l'ont cru Montucla et Cossali, un contemporain, un émule de Fibonacci, mais qui était probablement né entre 1370 et 1380. Il étudia les sciences à l'université de sa ville natale, où enseignaient alors des savants en renom, tels que Blasius de Parme et Jacob de Forli [1]. En avril 1400, le jeune homme conquit le grade de magister en médecine; il resta, dans la suite, fidèle à sa vocation médicale, comme cela résulte d'une Notice du 26 juillet 1420, d'après laquelle il se trouvait *fra i dottori del Sacro Collegio di Arte e Medicina*. A ce propos, le travail de M. Favaro nous apprend, sur l'organisation universitaire de ce temps, un grand nombre de particularités intéressantes et la plupart ignorées. Prosdocimo obtint plus tard l'emploi spécial de professeur d'Astronomie, science liée étroitement à la Médecine, d'après les idees d'alors; il a occupé cette chaire pendant au moins six années, de 1422 à 1428, cette dernière année étant celle de sa mort. Les services rendus par lui comme professeur et comme savant, d'après le témoignage de divers documents, semblent avoir été hautement appréciés de ses

[1] Ce dernier doit avoir été aussi un profond mathématicien, car il a écrit, comme nous le verrons bientôt, sur les *latitudines*, le prototype de nos coordonnées modernes. (*Voir* la Notice sur les écrits d'Oresme, *Bulletin*, 1re série, t. III, p. 321.)

contemporains ; nous allons maintenant les juger à notre point de vue actuel.

En première ligne se trouve son *Algorismi tractatus*, qui a été imprimé à Padoue en 1483 et qui, sans être, comme l'a cru M. Chasles, le premier Livre imprimé sur le système décimal (car, à la page 47, M. Favaro cite un traité anonyme de Calcul, publié à Trévise en 1478), n'en doit pas moins être considéré comme un document remarquable au point de vue historique, dont M. Favaro énumère avec soin les éditions successives. Il rapporte aussi les jugements des plus éminents mathématiciens de l'époque ancienne sur ce Livre, et il consacre à cette occasion, une longue digression à la recherche de l'étymologie du mot *algorithmus*. Prosdocimo, toutefois, n'a jamais eu la moindre notion sur cette origine : il définit (p. 73) son livre comme un *liber de numeris; ars numerandi vel introductio in numerum*, telle est l'interprétation habituelle du mot en question. Il compte, d'accord avec les autorités reconnues de son siècle, neuf règles fondamentales (*species*). Dans la sommation des progressions arithmétiques, il distingue les deux cas d'un nombre pair ou impair de termes, et à ce propos son historien s'étend sur les différentes règles données pour cet objet et rapportées dans son travail. Il en est de même relativement à la *mensa Pythagoræ*, qui est décrite sous plusieurs formes diverses. Mais ce qui doit exciter le plus vif intérêt, ce sont les extraits d'un manuscrit de la Bibliothèque bodleyenne d'Oxford que M. Favaro a reproduits dans son Livre. Ce manuscrit renferme non seulement le Traité d'Arithmétique, mais encore six Livres de Géométrie avec figures et un Traité *De motibus corporum supercœlestium*, accompagné de Tables. C'est, du moins, le sens de la description donnée par l'auteur anglais de la découverte du manuscrit, description sur l'exactitude de laquelle M. Favaro élève avec raison des doutes. Il est très vraisemblable que Prosdocimo n'est pas l'auteur de cette Géométrie, et le seul vestige de ses études géométriques paraît se réduire à un fragment conservé à Bologne et traitant de la construction d'un parallélogramme équivalent à un triangle. Au contraire, l'Ouvrage d'Astronomie est bien réellement sorti de sa plume, et, d'ailleurs, l'enseignement dont il a été chargé dans les dernières années de sa vie suffit pour établir qu'il s'est beaucoup occupé d'Astronomie : ainsi il a composé un Commentaire sur la sphère (c'est-à-dire, sur la *Sphère* de Sacro Bosco), un grand Recueil de Tables des mouvements des planètes, formant un Ouvrage détaché, une sorte de Catalogue d'étoiles corrigé ; un écrit astrologique, intitulé *Tractatus de electionibus,* une Table de la marche du Soleil et de la Lune à travers les signes du zodiaque, et deux Mémoires sur l'astrolabe. Enfin il s'est occupé en passant de la partie théorique de la Musique, qui, non seulement à cette époque, mais encore bien longtemps après, était considérée comme faisant partie des Mathématiques appliquées.

Cette monographie, faite avec un soin admirable, apporte à tous les points de vue d'importantes contributions à l'histoire des sciences mathématiques ; mais, à d'autres égards, elle a encore un grand mérite : celui de montrer, par un remarquable exemple, comment doivent être écrites les biographies scientifiques.

S.

BOURGUET. — Sur les intégrales eulériennes (Thèse présentée à la Faculté des Sciences).

Ce travail se compose de deux Parties. Dans la première, M. Bourguet expose les travaux de Stirling et de Binet sur la détermination de $l\Gamma(a)$. La seconde forme la partie originale. Elle contient des résultats nouveaux et intéressants, et elle comble une lacune dans la théorie des intégrales eulériennes.

On sait que $\Gamma(a)$ est défini, pour toute valeur de a dont la partie réelle est positive, par l'intégrale définie

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

Elle jouit de la propriété fondamentale

$$(1) \qquad a\Gamma(a) = \Gamma(a+1),$$

qui sert à définir la fonction dans le reste du plan. $\Gamma(a)$ jouit encore de la propriété

$$(2) \qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

qui, d'abord démontrée pour le cas où la partie réelle de a est comprise entre o et 1, s'étend à tout le plan au moyen de la relation (1).

M. Prym, en partageant l'intégrale en deux parties,

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{1}\,\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{a+2} - \ldots + \int_1^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

décompose $\Gamma(a)$ en deux fonctions uniformes, dont la seconde est holomorphe dans tout le plan. Cette dernière, en effet, est égale à

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha-1}\cos\beta l x\,dx + i\int_1^{\infty} x^{\alpha-1}\sin\beta l x\,dx,$$

qui est bien holomorphe dans toute l'étendue du plan.

En désignant la première par $P(a)$ et la seconde par $Q(a)$, on a deux fonctions qui jouissent de la propriété suivante,

$$(3)\qquad \begin{cases} P(a+1) = aP(a) - \dfrac{1}{e}, \\[2mm] Q(a+1) = aQ(a) + \dfrac{1}{e}, \end{cases}$$

d'où

$$P(a+1) + Q(a+1) = a[P(a) + Q(a)],$$

et, comme pour toute valeur de a telle que la partie réelle soit positive, on a

$$(4)\qquad \Gamma(a) = P(a) + Q(a);$$

au moyen des relations (2) et (3), la relation (4) s'étend à tout le plan.

$P(a)$ n'a pas d'autres pôles que o, -1, -2, ...; donc

$$\sin a\pi\, P(a)$$

est holomorphe dans tout le plan; par suite, $\sin a\pi\,\Gamma(a)$ est holomorphe dans tout le plan; par suite, $\dfrac{1}{\Gamma(1-a)}$ est aussi holomorphe dans tout le plan, puisque $\dfrac{1}{\Gamma(1-a)} = \dfrac{\sin a\pi}{\pi}\Gamma(a)$.

Ainsi $\frac{1}{\Gamma(a)}$, que nous désignons par $G(a)$, peut être développée en série convergente suivant les puissances croissantes de a et pour toutes les valeurs de a. C'est M. Weierstrass qui, le premier, a fait connaître cette propriété de $\Gamma(a)$.

M. Bourguet fait connaître d'abord une limite simple des coefficients du développement.

M. Heine, prenant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int e^{z} z^{-a}\,dz$$

sur le contour suivant, l'axe des x depuis $-\infty$ jusqu'à une petite distance de l'origine $-\eta$, un cercle autour de l'origine de rayon η, retour vers l'infini par le même chemin, trouve

$$G(a) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{z} z^{-a}\,dz.$$

Reprenant la même intégrale sur le même contour en agrandissant seulement la circonférence et lui donnant pour rayon 1, et sachant que les deux intégrales ont la même valeur, puisque les deux contours ne comprennent pas de point critique, il vient

$$\begin{aligned}
G(a) &= \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_1^{\infty} e^{-\rho}\rho^{-a}\,d\rho + \frac{1}{\pi}\int^{\pi} e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega+\sin\omega]\,d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_1^{\infty} e^{-\rho}\left[e^{-a(l\rho-\pi i)} - e^{-a(l\rho+\pi i)}\right]d\rho\\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega+\sin\omega]\,d\omega.
\end{aligned}$$

En désignant par γ_n et δ_n le coefficient de a^n dans les deux développements, on a

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i\,\Gamma(n+1)}\int_1^{\infty} e^{-\rho}\left[(l\rho-\pi i)^n - (l\rho+\pi i)^n\right]d\rho,$$

$$\delta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\,\Gamma(n+1)}\int_0^{\pi} e^{\cos\omega}\,{\sin \atop \cos}(\omega+\sin\omega)\,\omega^n\,d\omega.$$

Donc, en valeur absolue,

$$\delta_n < \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\,\Gamma(n+1)}\,\frac{e\,\pi^{n+1}}{n+1}.$$

Pour calculer la valeur approchée de γ_n, il faut dégager son expression des imaginaires. Pour cela, on pose

$$l\rho = r\cos\omega, \quad \pi = r\sin\omega,$$

et alors il vient

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2\Gamma(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho\left[(l\rho)^2+\pi^2\right]^{\frac{n+2}{2}}\sin n\omega\, d\omega.$$

Le facteur $e^{-\rho}\rho\left[(l\rho)^2+\pi^2\right]^{\frac{n+2}{2}}$ n'a qu'un maximum qui correspond à la racine de l'équation

$$(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho-1}\,l\rho + \pi^2 = 0.$$

La racine de cette équation va en augmentant avec n.

Pour obtenir une valeur approchée de

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2\Gamma(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho\left[(l\rho)^2+\pi^2\right]^{\frac{n+2}{2}}\sin n\omega\, d\omega,$$

on partage l'intégrale en $\frac{n}{2}$ parties égales, de telle sorte que dans chacune de ces parties $\sin n\omega$ conserve le même signe, l'argument $n\omega$ variant de π.

Soient

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ f,\ i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n,\ \ldots,\ x,\ y,\ z$$

les valeurs absolues des intégrales partielles; il est clair, puisque le facteur qui accompagne $\sin n\omega$ va en augmentant, passe par un maximum et puis va en diminuant, que ces intégrales sont dans le même cas.

Soit k la plus grande; on aura

$$A = (k-l)+(m-n)+\ldots = k-(l-m)-\ldots,$$

$$B = (k-j)+(i-f)+\ldots = k-(j-i)-\ldots.$$

Toutes les parenthèses étant positives,

$$0 < A < h, \quad 0 < B < h;$$

donc

$$-h < A + B - h < h.$$

Ainsi l'intégrale totale est plus petite, en valeur absolue, que la plus grande des intégrales partielles.

Soit μ le maximum du facteur $e^{-\rho}\rho\left[(l\rho)^2 + \pi^2\right]^{\frac{n+2}{2}}$,

$$\gamma_n < \frac{\mu}{\pi^2\Gamma(n+1)n}\int_0^\pi \sin\omega\, d\omega = \frac{2\mu}{\pi^2 n\,\Gamma(n+1)}.$$

Soient μ, μ' les valeurs correspondant à n et $n+1$,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{e^{-\rho'}\rho'}{e^{-\rho}\rho}\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left(\frac{l\rho'}{\rho'-1} : \frac{l\rho}{\rho-1}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left[\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n+3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le premier et le troisième facteur sont plus petits que 1; le second s'approche de $e^{\frac{1}{2}}$, en augmentant, donc

$$\frac{\mu'}{\mu} < \left[e\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n-3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n = 20$, $\left(e\frac{l\rho'}{\rho'-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ est sensiblement égal à 1. Donc, pour n supérieur à 20,

$$\frac{\mu'}{\mu} < \sqrt{n+3}.$$

De plus,

$$\mu_{20} < 2\sqrt{1.2\ldots22}.$$

Donc, pour n supérieur à 20,

$$\mu_n < 2\sqrt{1.2\ldots(n+2)}.$$

Donc

$$\gamma_n < \frac{4\sqrt{\Gamma(n+3)}}{\pi^2 n\,\Gamma(n+1)},$$

ce qui est sensiblement égal à $\frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}$. Par conséquent,

$$\gamma_n < \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}.$$

M. Bourguet a ainsi trouvé, pour valeur approchée du coefficient de a^{19},

$$0,0000000001240,$$

tandis que la vraie valeur est

$$0,00000000000104.$$

Voici, à présent, comment on obtient les coefficients du développement

$$G(a) = a(a+1)(1 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots).$$

On a, d'après Gauss,

$$G(a) = n^{-a} a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

Le facteur

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right) = 1 + A'_1 a + A'_2 a^2 + \ldots + A'_{n-1} a^{n-1}.$$

Le coefficient A'_i s'obtient en faisant la somme des combinaisons i à i des quantités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$. Il est facile de déduire ces coefficients les uns des autres. En effet,

$$i\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i = \Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-1} - \Sigma a_1^2 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-2} + \ldots \pm \Sigma a_i^i,$$

d'où

$$iA'_i = S_1 A_{i-1} - S_2 A_{i-2} + S_3 A_{i-3} - \ldots \pm S_i.$$

D'autre part,

$$n^{-a} = 1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \ldots.$$

Donc

$$\frac{G(a)}{a(a+1)} = \left[1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \ldots\right](1 + A'_1 a + A'_2 a^2 + A'_3 a^3 + \ldots)$$
$$= 1 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots.$$

Faisant $C = -S_1 + ln$ ou $C = 1 - C'$, C' étant la constante d'Euler, et remplaçant, dans $A_1, A_2, A_3, \ldots, S_1$ par $-C + ln$, il est clair, puisque ces coefficients ont des valeurs finies, qu'ils sont indépendants de ln après cette substitution ; donc on peut faire $ln = 0$, et dès lors $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont ce que deviennent $A'_1, A'_2, \ldots$ lorsqu'on y fait $S_1 = -C$.

Dès lors, les coefficients se forment de la manière suivante.

On multiplie les coefficients déjà obtenus,

$$A_{i-1},\ A_{i-2},\ A_{i-3},\ \ldots,\ A_1,$$

par $-C, -S_2, +S_3, -S_4, \ldots, \pm S_i$, on fait la somme, on divise le résultat par i, et l'on a A_i :

$$A_1 = -C.$$

M. Bourguet a ainsi calculé les vingt-deux premiers coefficients, avec seize décimales.

En ajoutant deux coefficients consécutifs, on obtient le développement

$$G(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

$\Gamma(1 + x)$ est développable dans un cercle de rayon 1, et l'on a

$$\Gamma(x + 1) = \frac{x}{G(x)} = \frac{1}{1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

d'où

$$1 = (1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots)(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots);$$

les coefficients $b_1, b_2, b_3, \ldots$ s'obtiennent par identification.

De même $\Gamma(x + 2)$ est développable dans un cercle de rayon 2, et l'on a

$$\Gamma(x + 2) = \frac{x(x + 1)}{G(x)} = \frac{1}{1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots} = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots;$$

les coefficients $B_1, B_2, \ldots$ s'obtiennent par identification.

Voici, à présent, comment on obtient les coefficients du développement de M. Pryn :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+2) &= P(x+2) + Q(x+2) \\
&= P(x+2) + \frac{1}{e}(x+2) + x(x+1)Q(x) \\
&= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{1}\,\frac{1}{x+3} + \frac{1}{1\,2}\,\frac{1}{x+3} - \dots \\
&\quad + \frac{1}{e}(x+2) + c_0 x + \left.\begin{matrix} c_1 \\ +c_0 \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} c_2 \\ +c_1 \end{matrix}\right| x^3 + \dots \\
&= 1 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots
\end{aligned}$$

Après avoir formé le développement

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{1}\,\frac{1}{x+3} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x+4} + \dots,$$

développement facile, on obtient les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3, ..., par identification. M. Bourguet a ainsi calculé les dix-huit premiers coefficients $c_0, c_1, c_2, , \dots, c_{17}$.

On a

$$\begin{aligned}
c^n &= \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_1^{\infty} e^{-x} x^{-1} (lx)^n\, dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_1^{\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n dx.
\end{aligned}$$

Or le maximum du facteur $\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)$ est $\frac{2}{e}$: donc

$$\begin{aligned}
c_n &< \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^n}{\Gamma(n+1)}\int_1^{\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1}\, dx < \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},
\end{aligned}$$

et, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ par la valeur approchée de Laplace, ce qui diminue $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ et augmente, par conséquent, la limite précédente, on obtient

$$c_n < \frac{\sqrt{2\pi}}{n} \frac{1}{\left[\frac{e}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

En appliquant cette formule à c_{17}, qui est le dernier coefficient calculé, M. Bourguet obtient

$$c_{17} < 0,0000\,0000\,0000\,2163.$$

La vraie valeur est

$$c_{17} = 0,0000\,0000\,0000\,1814.$$

A cause de la diminution rapide de ces derniers coefficients, on voit que ceux du développement $\Gamma(x+2)$, B_1, B_2, B_3, ... ont pour limite ceux du développement $P(x+2)$. De là il résulte que B_n égale sensiblement $\frac{1}{2^{n+1}}$, pour des valeurs suffisamment grandes de n.

Si, dans le développement de $G(a)$, au lieu de remplacer S_1 par $-C + ln$, on remplace ln par $S_1 + C$, et si l'on remarque qu'après cela les coefficients doivent être indépendants de S_1 et que, par conséquent, on peut faire $S_1 = 0$, on obtient un autre développement

$$\frac{1}{a(a+1)} G(a) = e^{-Ca}(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

Les coefficients A_1, A_2, A_3, ... se déduisent les uns des autres, comme pour le premier développement, en faisant $S_1 = A_1 = 0$.