Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 395-424

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_395_1>

SUR LES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. G. DARBOUX.

(SUITE.)

III.

Nous avons maintenant à considérer le cas où l'expression

$$A = \frac{u_\delta^2}{n+1} - \delta u_\delta$$

n'est pas nulle pour toutes les valeurs possibles des différentielles δx_i. Je vais démontrer que cette expression, qui n'est pas identiquement nulle, le devient cependant dès que les différentielles δx_i ont été choisies de telle manière que l'on ait

$$\delta^n f = 0.$$

En effet, dans l'équation (3), donnons à p la valeur 0, et prenons pour les δx_i un système de valeurs satisfaisant à la relation précédente. Cette équation deviendra

$$n A \delta^{n-1} df = 0;$$

si A n'est pas nul, il faudra que l'on ait

$$\delta^{n-1} df = 0;$$

alors, dans la même équation (3), donnons à p la valeur 1; elle deviendra

$$(n-1) A \delta^{n-2} d^2 f = 0,$$

et l'on aura par conséquent

$$\delta^{n-2} d^2 f = 0.$$

En continuant de la même manière, on verra que, si A n'est pas nul, l'équation

$$\delta^n f = 0$$

entraîne les suivantes :

$$\delta^{n-1} df = 0, \quad \delta^{n-2} d^2 f = 0, \quad d^n f = 0.$$

Mais la dernière de ces équations, ne contenant plus les δ, devra être identiquement vérifiée, et par conséquent la fonction f, ayant sa différentielle $n^{\text{ième}}$ identiquement nulle, ne peut être qu'un polynôme d'ordre $n-1$.

Écartons ce cas tout à fait exceptionnel; nous voyons que *toutes les fois que les différentielles δx_i annuleront $\delta^n f$, elles annuleront aussi l'expression*

$$A = \frac{u_\delta^2}{n+1} - u_\delta.$$

Cette proposition va nous permettre de résoudre la question proposée.

A est un polynôme homogène du second degré par rapport aux quantités δx_i. Supposons d'abord que ce polynôme soit indécomposable en un produit de facteurs du premier degré. Toutes les fois que la différentielle $\delta^n f$ sera nulle, il en sera de même de A. Il faudra donc que $\delta^n f$ soit égale à une puissance parfaite de A, multipliée par une fonction des variables $x_1, \ldots, x_\mu$. Le nombre n devra être pair et nous aurons

$$(14) \qquad d^n f = \mathrm{K}\left(\frac{u_d^2}{n+1} - du_d\right)^{\frac{n}{2}},$$

K étant une certaine fonction des variables.

On déduit de cette équation, en remplaçant partout d par $d + \lambda\delta$ et prenant le coefficient de λ dans les deux membres,

$$d^{n-1}\delta f = \mathrm{K}\left(\frac{u_d^2}{n+1} - du_d\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{u_d u_\delta}{n+1} - \frac{du_\delta + \delta u_d}{2}\right).$$

Si l'on porte les valeurs de $d^n f$, $d^{n-1}\delta f$ ainsi obtenues dans l'équation (3), où l'on aura fait $p = n$, il vient, en réduisant,

$$du_\delta = \delta u_d,$$

et cette équation exprime, nous l'avons déjà vu, que u_d est la différentielle exacte d'une fonction. Nous pouvons donc poser

$$u_d = -\frac{n+1}{v}dv,$$

ce qui donne

$$\frac{u_d^2}{n+1} - du_d = \frac{(n+1)d^2 v}{v},$$

$$(15) \qquad d^{n+1}f = -\frac{n+1}{v}dv\,d^n f.$$

L'expression de $d^n f$ prendra maintenant la forme

$$(16) \qquad d^n f = \mathrm{H}(d^2 v)^{\frac{n}{2}}.$$

Si nous différentions, nous obtiendrons l'expression de $d^{n+1}f$,

$$d^{n+1}f = d\mathrm{H}(d^2 v)^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}\mathrm{H}(d^2 v)^{\frac{n}{2}-1}d^3 v.$$

Portons les expressions de $d^n f$, $d^{n+1} f$ dans l'équation (15); il viendra

$$(17)\qquad \frac{n}{2}\, d^3 v = d^2 v \left[-\frac{(n+1)\,dv}{v} - \frac{dH}{H} \right],$$

équation que l'on peut encore écrire sous la forme

$$(18)\qquad d^3 v = -\frac{3\,dw}{w}\, d^2 v,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{3\,dw}{w} = \frac{2(n+1)}{n}\,\frac{dv}{v} + \frac{2}{n}\,\frac{dH}{H}.$$

Ainsi la différentielle troisième de v est divisible par la différentielle seconde, et cela de telle manière que le quotient soit une différentielle exacte. On peut donc appliquer à cette fonction v la formule (3) dans laquelle on fera $n = 3$, et l'on remplacera u_d par $\frac{-3\,dw}{w}$.

En donnant à p successivement les valeurs 0, 1, 2, on obtient ainsi les trois relations

$$\begin{aligned} d\delta v\, \delta^2 w - \delta^2 v\, d\delta w &= 0,\\ d^2 v\, \delta^2 w - d^2 w\, \delta^2 v &= 0,\\ d^2 v\, d\delta w - d\delta v\, d^2 w &= 0, \end{aligned}$$

qui ne peuvent évidemment être satisfaites, quelles que soient les différentielles dx_i, δx_i, que si les dérivées secondes de w sont proportionnelles à celles de v. On aura donc

$$(19)\qquad d^2 v = h\, d^2 w,$$

h étant une constante ou une fonction des variables indépendantes.

Si h est une constante, on aura évidemment

$$v = hw,$$

en négligeant des termes du premier degré qui n'ont aucune importance, puisque la différentielle $d^2 v$ entre seule dans l'expression (16) de $d^n f$. L'équation (17) deviendra

$$d^3 v = -\frac{3\,dv\,d^2 v}{v}$$

ou

$$d^3(v^2) = 0.$$

Par conséquent, v^2 sera un polynôme quelconque du second degré par rapport aux variables indépendantes.

Cherchons maintenant si, dans l'équation (19), h peut être une fonction des variables indépendantes. Considérons deux dérivées de v, w par rapport à la même variable

$$p_\alpha = \frac{\partial v}{\partial x_\alpha}, \quad q_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

L'équation (19) nous apprend que toutes les dérivées de p_α sont proportionnelles aux dérivées correspondantes de q_α. On a donc

$$q_\alpha = \varphi_\alpha(p_\alpha)$$

et

$$\frac{1}{h} = \varphi'_\alpha(p_\alpha).$$

Ainsi, entre les dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_\mu, q_1, \ldots, q_\mu$ de v et de w, on aurait toutes les relations

$$\begin{gathered} q_1 = \varphi_1(p_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_\mu = \varphi_\mu(p_\mu), \\ \frac{1}{h} = \varphi'_1(p_1) = \ldots = \varphi'_\mu(p_\mu). \end{gathered}$$

Or h, par hypothèse, n'est pas une constante, et, par conséquent, les fonctions φ'_i dépendent effectivement des variables qu'elles contiennent. On voit donc que toutes les dérivées de v seraient fonctions de l'une d'elles. Dans ce cas, on le reconnaîtra aisément, $d^2 v$ serait un carré parfait, et, par conséquent, $d^n f$ serait une puissance parfaite d'une expression de la forme

$$P_1\,dx_1 + \ldots + P_\mu\,dx_\mu.$$

Or nous aurons, dans l'article suivant, à considérer cette hypothèse. Il est donc inutile de poursuivre, et nous pouvons nous borner ici au cas où h est constante et où v est la racine carrée d'un polynôme du second degré.

On a alors, nous l'avons vu,

$$d^3 v = -\frac{3\,dv}{v}\,d^2 v,$$

et, si l'on porte cette expression de $d^3 v$ dans l'équation (17), on en déduit

$$2\frac{dH}{H} = \frac{n-2}{v}\,dv$$

et, par conséquent,

$$H = C v^{\frac{n}{2}-1},$$

C désignant une constante, ce qui donne, pour $d^n f$, l'expression

$$d^n f = C v^{\frac{n}{2}-1}(d^2 v)^{\frac{n}{2}}.$$

Il n'y a pas de condition nouvelle à écrire, et l'on trouve, pour l'expression de la fonction f, en négligeant un polynôme du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré,

$$(20) \qquad f = \frac{C}{(1.3.5\ldots n-1)^2}\,v^{n-1}.$$

Pour $n=2$, on retrouve la propriété signalée par M. Hermite.

IV.

Après avoir supposé que le polynôme

$$\frac{u_\delta^2}{n+1} - \delta u_\delta$$

est indécomposable, il nous reste à examiner le cas où il serait le produit de deux facteurs du premier degré

$$(P_1\,\delta x_1 + \ldots + P_\mu\,\delta x_\mu), \quad (Q_1\,\delta x_1 + \ldots + Q_\mu\,\delta x_\mu).$$

Dans ce cas, pour que ce produit s'annule en même temps que $\delta^n f$, il ne sera plus nécessaire que $\delta^n f$ soit une puissance exacte du produit. Il suffira que $\delta^n f$ soit de la forme

$$\delta^n f = k(P_1\,\delta x_1 + \ldots + P_\mu\,\delta x_\mu)^h (Q_1\,\delta x_1 + \ldots + Q_\mu\,\delta x_\mu)^{n-h},$$

où h sera un nombre entier positif, inférieur ou égal à n. J'examinerai d'abord l'hypothèse où l'on a

$$d^n f = \mathrm{H}(\mathrm{P}_1\, dx_1 + \ldots + \mathrm{P}_\mu\, dx_\mu)^n.$$

Pour que le second membre soit une différentielle $n^{\text{ième}}$ exacte, il faudra que, en posant

$$\varphi = \mathrm{H}(\mathrm{P}_1 p_1 + \ldots + \mathrm{P}_\mu p_\mu)^n,$$

les conditions d'intégrabilité (8) soient vérifiées, quelles que soient les constantes p_i. On trouve ainsi les équations

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{P}_i}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k} - \frac{\mathrm{P}_k}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{\sum_\alpha p_\alpha \left(\mathrm{P}_i \dfrac{\partial \mathrm{P}_\alpha}{\partial x_k} - \mathrm{P}_k \dfrac{\partial \mathrm{P}_\alpha}{\partial x_i}\right)}{\sum_\alpha p_\alpha \mathrm{P}_\alpha} = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour que cette égalité puisse avoir lieu, quelles que soient les quantités p_α, il faut que l'on ait

$$(22)\qquad \frac{\mathrm{P}_i \dfrac{\partial \mathrm{P}_\alpha}{\partial x_k} - \mathrm{P}_k \dfrac{\partial \mathrm{P}_\alpha}{\partial x_i}}{\mathrm{P}_\alpha} = \frac{\mathrm{P}_i \dfrac{\partial \mathrm{P}_\beta}{\partial x_k} - \mathrm{P}_k \dfrac{\partial \mathrm{P}_\beta}{\partial x_i}}{\mathrm{P}_\beta},$$

quels que soient les nombres α, β, i, k. L'égalité précédente peut encore s'écrire

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\mathrm{P}_\alpha}{\mathrm{P}_\beta}\right)}{\mathrm{P}_i} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\mathrm{P}_\alpha}{\mathrm{P}_\beta}\right)}{\mathrm{P}_k}.$$

On voit que les dérivées des deux quotients, tels que $\dfrac{\mathrm{P}_\alpha}{\mathrm{P}_\beta}$, $\dfrac{\mathrm{P}_{\alpha'}}{\mathrm{P}_{\beta'}}$, seront proportionnelles, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\mathrm{P}_{\alpha'}}{\mathrm{P}_{\beta'}} = \varphi\left(\frac{\mathrm{P}_\alpha}{\mathrm{P}_\beta}\right),$$

quels que soient α', β', α, β. On pourra donc poser

$$\mathrm{P}_1\, dx_1 + \ldots + \mathrm{P}_\mu\, dx_\mu = k[\varphi_1(u)\, dx_1 + \ldots + \varphi_\mu(u)\, dx_\mu],$$

u étant une fonction à déterminer. Quant à k, on peut le réunir à H, ce qui revient à le remplacer par l'unité. Alors on a

$$P_i = \varphi_i(u),$$

et les équations (22) nous donnent

$$\varphi_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \varphi_k(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

L'intégration de toutes les équations qu'on obtient, en donnant à i et à k des valeurs différentes, nous montre que u sera déterminé en fonction des variables par l'équation

$$(23)\qquad x_1\varphi_1(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \varphi(u) = 0,$$

où $\varphi(u)$ est une fonction arbitraire.

Alors les équations (21) prennent la forme

$$\frac{\partial(HP_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial(HP_k)}{\partial x_i},$$

et elles expriment que

$$H[\varphi_1(u)\,dx_1 + \ldots + \varphi_\mu(u)\,dx_\mu]$$

est une différentielle exacte. Or, en vertu de l'équation (23), on a

$$\varphi_1(u)\,dx_1 + \ldots + \varphi_\mu(u)\,dx_\mu = -(x_1\varphi'_1 + x_2\varphi'_2 + \ldots + x_\mu\varphi'_\mu + \varphi')\,du.$$

Donc l'expression

$$-H(x_1\varphi'_1 + \ldots + x_\mu\varphi'_\mu + \varphi')\,du$$

devra être une différentielle exacte, ce qui exige que l'on ait

$$H = -\frac{\psi(u)}{x_1\varphi'_1 + \ldots + x_\mu\varphi'_\mu + \varphi'}.$$

L'expression correspondante de $d^n f$ sera

$$d^n f = -\frac{\psi(u)(\varphi_1\,dx_1 + \varphi_2\,dx_2 + \ldots + \varphi_\mu\,dx_\mu)^n}{\varphi' + \varphi_1 x_1 + \varphi'_2 x_2 + \ldots + \varphi'_\mu x_\mu},$$

et il nous reste à obtenir l'expression de f. Cette expression s'offre à nous sous une forme élégante, et elle est donnée par l'intégrale définie

$$(24)\qquad f = \int_0^u \frac{\psi(u)(x_1\varphi_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \varphi)^{n-1}\,du}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Dans cette intégration, $x_1, \ldots, x_\mu$ sont traitées comme des constantes. Nous négligeons toujours un polynôme arbitraire d'ordre $n-1$, et, après l'intégration, nous devrons remplacer u par sa valeur, tirée de l'équation (23).

V.

Nous n'avons plus qu'à examiner le cas où $d^n f$ serait le produit de deux facteurs élevés à des puissances quelconques

$$d^n f = \mathrm{K}(\mathrm{P}_1 dx_1 + \ldots + \mathrm{P}_\mu dx_\mu)^h (\mathrm{Q}_1 dx_1 + \ldots + \mathrm{Q}_\mu dx_\mu)^{n-h}.$$

Il est important de remarquer que nous pouvons supposer h différent de $n-h$; car, dans le cas où l'on a $h = n-h$, $d^n f$ est une puissance parfaite de l'expression que nous avons appelée A, et ce cas a été complètement traité à l'article III.

On démontrera, comme dans l'article précédent, que les deux facteurs de $d^n f$ sont de la forme suivante.

Posons

$$a = \varphi(u), \quad a_i = \varphi_i(u),$$

et déterminons la fonction u par l'équation

$$(25) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_\mu x_\mu + a = 0.$$

Posons de même

$$b = \psi(v), \quad b_i = \psi_i(v),$$

et déterminons v par l'équation

$$(26) \qquad b_1 x_1 + \ldots + b_\mu x_\mu + b = 0.$$

En posant

$$h' = n - h$$

on aura

$$d^n f = \mathrm{K}(a_1 dx_1 + \ldots + a_\mu dx_\mu)^h (b_1 dx_1 + \ldots + b_\mu dx_\mu)^{h'}.$$

Il nous reste à exprimer que le second membre de cette équation est une différentielle $n^{\text{ième}}$ exacte. Or nous avons vu que, si l'on désigne ce second membre par φ et si l'on y remplace dx_i par p_i, tout se réduit à exprimer que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}\delta x_\mu$$

est une différentielle exacte. Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} P &= a_1 p_1 + \ldots + a_\mu p_\mu, \\ Q &= b_1 p_1 + \ldots + b_\mu p_\mu. \end{aligned}$$

Il y aura ici à exprimer que

$$(27)\qquad \begin{cases} KP^{h-1}Q^{h'-1}[hQ(a_1\delta x_1 + \ldots + a_\mu \delta x_\mu) \\ \qquad + h'P(b_1\delta x_1 + \ldots + b_\mu \delta x_\mu)] \end{cases}$$

est une différentielle exacte.

Or des équations (25), (26) on déduit

$$\begin{aligned} a_1\delta x_1 + a_2\delta x_2 + \ldots + a_\mu\delta x_\mu &= -M\delta u, \\ b_1\delta x_1 + b_2\delta x_2 + \ldots + b_\mu\delta x_\mu &= -N\delta v, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$(28)\qquad \begin{cases} M = a'_1 x_1 + \ldots + a'_\mu x_\mu + a', \\ N = b'_1 x_1 + \ldots + b'_\mu x_\mu + b', \end{cases}$$

et, par conséquent, l'expression (27) pourra s'écrire

$$KP^{h-1}Q^{h'-1}(-hQM\delta u - h'PN\delta v).$$

Définissons deux quantités nouvelles ρ, σ par les équations

$$(29)\qquad -hKM = \sigma, \quad -h'KN = \rho.$$

Il faudra que

$$P^{h-1}Q^{h'-1}(Q\sigma\delta u + P\rho\delta v)$$

soit une différentielle exacte. Comme dans cette expression ne figurent que les différentielles δu, δv, il est indispensable que les coefficients de δu, δv dépendent exclusivement de u et v. Cette condition étant vérifiée pour les fonctions P, Q, il faudra qu'elle le soit pour ρ et σ.

La condition d'intégrabilité pour la différentielle précédente est

$$h'\sigma\frac{\partial Q}{\partial v} + Q\frac{\partial\sigma}{\partial v} = h\rho\frac{\partial P}{\partial u} + P\frac{\partial\rho}{\partial u}.$$

Égalons les coefficients des quantités p_i dans les deux membres; nous aurons les équations

$$(39)\qquad h'\sigma b'_i + b_i \frac{\partial\sigma}{\partial v} = h\rho a'_i + a_i \frac{\partial\rho}{\partial u}.$$

Si nous remarquons que l'on déduit des équations (29) la suivante :

$$h'\mathrm{N}\sigma = h\mathrm{M}\rho,$$

nous reconnaîtrons facilement que cette nouvelle équation sera vérifiée si l'on ajoute aux équations (30) la suivante :

$$(31)\qquad h'\sigma b' + b \frac{\partial\sigma}{\partial v} = h\rho a' + a \frac{\partial\rho}{\partial u};$$

en sorte que tout se réduit à satisfaire à la fois aux équations (30), (31), en prenant pour ρ, σ des fonctions convenables de u, v; pour les a, a_i des fonctions de u, et pour les b, b_i des fonctions de v. Quant à K, il sera donné par l'une quelconque des équations (29).

Or on peut toujours, sans diminuer la généralité, supposer que l'une des fonctions a, a_i est égale à 1 et une autre égale à u; et de même, que l'une des fonctions b, b_i est égale à 1, et l'autre égale à v. Alors deux des équations (30), (31) prennent la forme

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \frac{\partial\rho}{\partial u},$$

$$(32)\qquad h'\sigma + v \frac{\partial\sigma}{\partial v} = h\rho + u \frac{\partial\rho}{\partial u},$$

et l'une quelconque des autres peut être écrite

$$(33)\qquad h'\sigma\beta' + \beta \frac{\partial\sigma}{\partial v} = h\rho.\alpha' + \alpha.\frac{\partial\rho}{\partial u}.$$

Nous allons considérer le système des équations (32), (33).

On en déduit, par l'élimination de σ, $\frac{\partial\sigma}{\partial v}$,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u} = \frac{-h(\beta' - \alpha')}{\beta - \alpha + \beta'(u - v)}.$$

On peut intégrer cette équation, et l'on a

$$\rho = \mathrm{V}[\beta + \alpha + \beta'(u - v)]^{-h},$$

V étant une fonction qui dépend exclusivement de v. On obtiendrait de même

$$\sigma = \mathrm{U}[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-h'},$$

V étant fonction de u seulement.

Substituons ces valeurs de ρ et de σ dans l'une quelconque des équations (32); nous serons conduits à la relation

$$(34)\quad h'\mathrm{U}[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-h'-1} = h\mathrm{V}[\beta - \alpha + \beta'(u - v)]^{-h-1},$$

qui devra être satisfaite identiquement.

Prenons les logarithmes des deux membres, et différentions successivement par rapport à u et v, ce qui permettra d'éliminer U et V. Nous aurons

$$(35)\quad \begin{cases} (h' + 1)\alpha''[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-3} \\ \quad + (h + 1)\beta''[\beta - \alpha + \beta'(u - v)]^{-3} = 0. \end{cases}$$

Cette équation est absolument de la même forme que l'équation (34). Si α'' et β'' ne sont pas nuls, on peut la mettre sous la forme

$$\mathrm{U}_1[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-3} = \mathrm{V}_1[\beta - \alpha + \beta'(u - v)]^{-3}.$$

En opérant sur cette équation comme nous l'avons fait sur la précédente, nous obtiendrons la relation

$$\alpha''[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-3} + \beta''[\beta - \alpha + \beta'(u - v)]^{-3} = 0,$$

et la comparaison avec l'équation (35) nous donnerait

$$h = h'.$$

Or nous avons formellement exclu cette hypothèse, qui a déjà été considérée à l'article III. Il faut donc que α'', β'' soient nuls, et par suite α, β seront des fonctions linéaires

$$\alpha = m u + n,$$
$$\beta = m' v + n'.$$

On aura alors

$$\beta - \alpha + \alpha'(u - v) = (m' - m)v + n' - n,$$
$$\beta - \alpha + \beta'(u - v) = (m' - m)u + n' - n.$$

L'équation (34) donnera

$$\frac{h'\mathrm{U}}{[(m'-m)u+n'-n]^{h+1}} = \frac{h\mathrm{V}}{[(m'-m)v+n'-n]^{h'+2}} = \mathrm{C},$$

et les valeurs de ρ et de σ seront

$$\rho = \mathrm{C}h'[(m'-m)u+n'-n]^{-h}\ [(m'-m)v+n'-n]^{-h'-1},$$
$$\sigma = \mathrm{C}h\ [(m'-m)u+n'-n]^{-h-1}[(m'-m)v+n'-n]^{-h'}.$$

Pour que les valeurs de ρ, σ demeurent les mêmes lorsqu'on adjoint aux deux équations (32) une quelconque des équations (30) (31), il faudra prendre pour a, b, a_i, b_i des expressions de la forme

$$a_i = m_i u + n_i, \quad a = mu + n,$$
$$b_i = m'_i v + n'_i, \quad b = m'v + n',$$

avec la condition

$$\frac{m'_i - m_i}{n_i - n_i} = k, \quad \frac{m'-m}{n'-n} = k,$$

ce qui permet de prendre

$$m'_i = m_i + kr_i, \quad m' = m + kr,$$
$$n'_i = n_i + r_i, \quad n' = n + r.$$

Alors les équations (25), (26) prennent les formes

$$\mathrm{B} + u\mathrm{A} = 0,$$
$$\mathrm{B} + v\mathrm{A} + (kv+1)\mathrm{C} = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions linéaires des variables. Si k est différent de zéro, on peut effectuer la substitution

$$ku + 1 = \frac{1}{u'},$$

$$kv + 1 = \frac{1}{v'},$$

qui ramène les équations précédentes à la forme

$$(36) \qquad \begin{cases} \mathrm{B} + u\mathrm{A} = 0, \\ \mathrm{C} + v\mathrm{A} = 0. \end{cases}$$

Si $k = 0$, il n'y a pas de substitution à faire pour obtenir la forme précédente.

Si nous adoptons pour déterminer u, v le système (36), les équations (32), (33) nous donnent

$$\rho = \gamma h',$$
$$\sigma = \gamma h,$$

γ étant une constante, et nous trouvons

$$K = \frac{-\gamma}{A}.$$

L'expression de $d^n f$ prend la forme

$$d^n f = -\frac{\gamma}{A^{n+1}}(A dB - B dA)^h (A dC - C dA)^{n-h},$$

et l'on reconnaît sans difficulté que l'on a

$$d^{n+1} f = -\frac{(n+1) dA}{A} d^n f.$$

Ce cas rentre dans celui que nous avons examiné à l'article II. Il ne donne donc rien de nouveau.

VI.

En résumé, si nous cherchons les fonctions dont la différentielle $(n+1)^{\text{ième}}$ est divisible par la différentielle $n^{\text{ième}}$, nous trouvons les trois solutions suivantes,

$$\text{(I)} \qquad f = \frac{F(x_1, \ldots, x_\mu)}{P},$$

où F désigne un polynôme d'ordre n et P une fonction linéaire. Il est aisé de confirmer et d'expliquer ce premier résultat.

En effet, supposons que nous remplacions

$$x_i \quad \text{par} \quad x_i + h dx_i,$$

et que nous développions f suivant les puissances de h par la formule de Taylor, appliquée aux fonctions de plusieurs variables; la valeur de f sera une fonction rationnelle en h,

$$(37) \qquad \frac{F(x_1 + h dx_1, \ldots, x_\mu + h dx_\mu)}{P + h dP},$$

et le développement ne se terminera pas, tant que la valeur de h

$$h = -\frac{P}{dP},$$

qui annule le dénominateur, n'annulera pas aussi le numérateur. Mais si l'on a

$$F\left(x_1 - \frac{P dx_1}{dP}, \ldots, x_\mu - \frac{P dx_\mu}{dP}\right) = 0,$$

l'expression (37) deviendra un polynôme d'ordre $n - 1$ en h, et toutes les différentielles seront nulles à partir de $d^n f$. L'équation précédente, multipliée par dP^n, étant du degré n par rapport à $dx_1, \ldots, dx_\mu$, son premier membre ne pourra différer de $d^n f$ que par un facteur fonction des variables x_i. Nous voyons donc que, lorsque $d^n f$ s'annulera, il en sera de même des différentielles suivantes, et, comme $d^n f$ est en général indécomposable, ces différentielles seront toutes divisibles par $d^n f$. C'est tout ce qu'il y a à remarquer sur le premier cas.

Le second cas est celui où, n étant nécessairement pair, on a

$$\text{(II)} \qquad f = \omega^{\frac{n-1}{2}},$$

ω désignant un polynôme quelconque du second degré.

Pour expliquer ce résultat, nous remarquerons que, si l'on remplace x_i par $x_i + h dx_i$, ω prend la forme

$$\omega = A + 2Bh + Ch^2,$$

et l'on a

$$(37) \qquad (A + 2Bh + Ch^2)^{\frac{n-1}{2}} = f + h df + \frac{h^2}{2} d^2 f + \ldots.$$

Le premier membre ne devient une fonction entière que si l'on a

$$B^2 - AC = 0,$$

et alors cette fonction entière est du degré $n - 1$. Donc, lorsque l'équation précédente est vérifiée, toutes les différentielles de f sont nulles à partir de la $n^{\text{ième}}$. Mais ce résultat est incomplet, et il prouve seulement que $d^n f$ contient $B^2 - AC$ en facteur. Il faut prouver que $d^n f$ est une puissance exacte de $B^2 - AC$, et que les différentielles suivantes sont divisibles par $d^n f$.

Pour cela, posons

$$B = -x\sqrt{AC}, \quad h\sqrt{C} = u\sqrt{A}.$$

Le développement (37) prendra la forme

$$(1 - 2ux + u^2)^{\frac{n-1}{2}} = fA^{\frac{1-n}{2}} + \ldots + \frac{u^p}{1.2\ldots p}\,\frac{A^{\frac{p+1-n}{2}}}{C^{\frac{p}{2}}}\,d^pf.$$

Si donc on pose

$$d^pf = 1.2.3\ldots p.\,C^{\frac{p}{2}}A^{\frac{n-p-1}{2}}X_p,$$

on aura

$$(1 - 2ux + u^2)^{\frac{n-1}{2}} = X_0 + X_1 u + \ldots + X_p u^p + \ldots,$$

et l'on sait que X_p sera un polynôme dépendant de x et satisfaisant à l'équation différentielle

$$(38) \qquad (x^2 - 1)\frac{d^2X_p}{dx^2} + (2 - n)x\frac{dX_p}{dx} + p(n - p - 1)X_p = 0.$$

On sait aussi que trois polynômes consécutifs sont reliés par l'équation

$$(39) \qquad (p+1)X_{p+1} - x(2p + 1 - n)X_p + (p - n)X_{p-1} = 0.$$

Cela posé, pour $p = n$, le polynôme satisfaisant à l'équation (38) est une puissance parfaite

$$C(x^2 - 1)^{\frac{n}{2}},$$

et de plus l'équation (39) nous montre que X_{n+1} sera divisible par X_n, et par conséquent aussi X_{n+2} et tous les polynômes suivants. Nous avons donc la vérification complète du résultat obtenu.

Il nous reste à examiner la troisième solution. La fonction u étant définie par l'équation

$$x_1\varphi_1(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \varphi(u) = 0,$$

on a

$$\text{(III)} \qquad f = \int_0^u \psi(u)(x_1\varphi_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \varphi)^{n-1}du.$$

On déduit de là facilement

$$\frac{d^pf}{(n-1)\ldots(n-p)} = \int_0^u \psi(u)(x_1\varphi_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \varphi)^{n-p-1}(\varphi_1 dx_1 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^p du,$$

pour p inférieur à n. Pour $p = n$ on a

$$d^n f = -\frac{\Gamma(n+1)(\varphi_1 dx_1 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^n \psi(u)}{x_1\varphi_1' + \ldots + x_\mu \varphi_\mu + \varphi'},$$

et l'on vérifiera aisément que $d^{n+1}f$ est divisible par $d^n f$. Je donnerai quelques exemples relatifs à ce cas, en me bornant au cas de deux variables indépendantes.

On a alors

$$xf(u) + y\varphi(u) + \psi(u) = 0.$$

Supposons d'abord $n = 1$, et désignons par z la fonction cherchée; nous aurons

$$z = \int_0^u \psi(u)\,du;$$

donc u sera une fonction de z, et x, y, z seront reliés par une équation de la forme

$$x\mathrm{F}(z) + y\Phi(z) + 1 = 0.$$

Cette équation représente les surfaces cylindroïdes, engendrées par le mouvement d'une droite parallèlement à un plan.

Faisons ensuite $n = 2$, nous aurons

$$z = \int_0^u \psi(u)[xf(u) + y\varphi(u) + \psi(u)]\,du.$$

Si l'on pose

$$\int_0^u \theta f du = \mathrm{F} \int_0^u \theta\varphi du = \Phi \int_0^u \theta\psi du = \chi,$$

la surface sera définie par les deux équations

$$\begin{aligned} z &= x\mathrm{F}(u) + y\Phi(u) + \chi(u), \\ 0 &= x\mathrm{F}'(u) + y\Phi'(u) + \chi'(u); \end{aligned}$$

c'est la surface développable la plus générale.

On peut dire qu'une surface développable est caractérisée par la propriété que les droites, ayant en un point avec elle le contact le plus élevé possible, soient confondues. On verra de même que la surface correspondante au cas général est caractérisée par la propriété que, en chaque point, les paraboles

$$mx + ny + h = 0,$$
$$z = \alpha + \beta x + \ldots + \gamma x^{n-1},$$

ayant avec elle le contact de l'ordre le plus élevé, sont toutes confondues.

VII.

Nous allons, en terminant, généraliser la remarque de M. Hermite et montrer l'extension dont les recherches précédentes seraient susceptibles. Considérons d'abord une fonction entière u du troisième degré de μ variables, et posons

$$f = \sqrt[3]{u}.$$

Si l'on remplace x_i par $x_i + h\,dx_i$, le polynôme u deviendra du troisième degré en h, f prendra la forme

$$\sqrt[3]{A + Bh + Ch^2 + Dh^3},$$

et ce radical aura pour développement

$$(40) \qquad f + h\,df + \frac{h^2}{2} d^2 f + \frac{h^3}{6} d^3 f + \ldots.$$

Je dis que, si l'on a choisi les différentielles dx_i de manière à satisfaire aux deux équations

$$d^2 f = 0, \quad d^3 f = 0,$$

toutes les différentielles suivantes $d^4 f$, ... seront nulles.

En effet, si l'on élève au cube le développement (40), on doit retrouver la quantité sous le radical. Mais, dans cette élévation aux puissances, on peut négliger les termes qui contiennent h^4 en facteur. On aura donc

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 = (f + h\,df)^3;$$

donc le radical sera une fonction linéaire de h, et par conséquent, dans le développement (40), $d^4 f$ et les différentielles suivantes seront nulles dès que $d^2 f$, $d^3 f$ le seront. Cette proposition montre qu'il existe des relations identiques de la forme

$$(41)\qquad \begin{cases} d^4 f = A\, d^2 f + B\, d^3 f, \\ d^5 f = A' d^2 f + B' d^3 f, \end{cases}$$

qui se ramèneront toutes d'ailleurs à la première. A et B contiennent évidemment les différentielles dx_i, A étant du second degré et B du premier degré par rapport à ces différentielles.

Considérons de même un polynôme v du quatrième degré et l'expression

$$f = \sqrt{v}.$$

Si l'on remplace x_i par $x_i + h dx_i$, v deviendra un polynôme du quatrième degré en h, dont le développement sera de la forme

$$f + h df + \frac{h^2}{2} d^2 f + \ldots.$$

Si l'on a

$$d^3 f = 0, \quad d^4 f = 0,$$

v deviendra un carré parfait, comme l'on s'en assure encore en élevant la série au carré. On sera donc conduit, en répétant le raisonnement précédent, à une équation de la forme

$$(42)\qquad d^5 f = A d^3 f + B d^4 f,$$

qui entraînera les suivantes :

$$d^{5+n} f = A_n d^3 f + B_n d^4 f.$$

Laissant de côté ces exemples particuliers, qu'il serait facile de multiplier, considérons maintenant d'une manière générale une fonction algébrique z, définie par une équation

$$(43)\qquad f(z_1 x_1, \ldots, x_\mu) = 0,$$

qui soit du degré m par rapport à toutes les variables. Je dis qu'il existera entre les différentielles de z des relations de la forme

$$(44)\qquad \begin{cases} d^{m+1} z = A_1 d^m z + A_2 d^{m-1} z + \ldots + A_{m-1} d^2 z, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^{m+p} z = A_1^p d^m z + \ldots \qquad\qquad + A_{m-1}^p d^2 z, \end{cases}$$

la première donnant les suivantes par la différentiation.

En effet, supposons que l'on différentie $m + 1$ fois l'équation (43), en regardant $dx_1, dx_2, \ldots, dx_\mu$ comme des constantes; on obtiendra une équation de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial z} d^{m+1} z + A = 0,$$

où A est une somme de termes de la forme

$$a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_\mu^{\alpha_\mu} z^\beta (dx_1)^{\alpha'_1} \ldots (dx_\mu)^{\alpha'_\mu} (dz)^{\beta_1} (d^2 z)^{\beta_2} \ldots (d^m z)^{\beta_m},$$

les exposants des différents facteurs satisfaisant aux deux conditions

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_\mu + \beta + \alpha'_1 + \ldots + \alpha'_\mu + \beta_1 + \ldots + \beta_m \mathrel{\overline{\overline{<}}} m, \\ &\alpha'_1 + \ldots + \alpha'_\mu + \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + m\beta_m = m + 1. \end{aligned}$$

On déduit de là, par soustraction, l'inégalité

$$\beta_2 + 2\beta_3 + \ldots + (m-1)\beta_m \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu + \beta + 1.$$

Il est donc impossible que les exposants $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m$ soient tous nuls, et par conséquent chacun des termes de A contient l'une des différentielles $d^m z, d^{m-1} z, \ldots, d^2 z$. On peut donc écrire

$$d^{m+1} z = A_1 d^m z + \ldots + A_{m-1} d^2 z,$$

A_i étant une fonction homogène entière d'ordre i des différentielles dx_i. C'est la proposition qu'il s'agissait d'établir.

Dans le cas où $m = 2$, on a

$$d^3 z = A d^2 z;$$

si $m = 3$, on aura

$$d^4 z = A d^3 z + B d^2 z,$$

et ainsi de suite.

L'équation

$$(45) \qquad d^{m+1} z = A_1 d^m z + \ldots + A_{m-1} d^2 z$$

équivaut à autant de relations entre les dérivées de z et les coefficients des fonctions A_i qu'il y a de termes dans $d^{m+1} z$, c'est-à-dire à

$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}{1.2\ldots(m+1)}$$

équations. D'ailleurs, les coefficients arbitraires des fonctions A_i

sont au nombre de

$$\frac{(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)}{1.2\ldots(m-1)}-1.$$

L'équation (45) exprimera réellement une propriété de la fonction z; elle conduira à des équations existant uniquement entre les dérivées de cette fonction, toutes les fois que le nombre des équations sera supérieur à celui des coefficients arbitraires, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}{1.2\ldots(m+1)}>\frac{(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)}{1.2\ldots(m-1)}-1,$$

ou

$$(46)\qquad \mu^2+\mu m \geqq m^2+m.$$

Ainsi, dès que le nombre μ des variables sera supérieur à la limite définie par cette inégalité, limite qui est évidemment plus petite que m, on sera assuré que l'équation (45) conduira, par l'élimination des arbitraires, à des équations aux dérivées partielles auxquelles devra satisfaire la fonction z.

Par exemple, dans le cas où $m=2$, il est clair que l'équation

$$d^3z=\mathrm{A}d^2z$$

n'exprime aucune propriété de z si z dépend d'une seule variable. Mais si μ est supérieur à 1, elle conduit à

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu+4)}{1.2.3}$$

équations du troisième ordre pour z.

De même, pour $m=3$, $m=4$, le nombre μ des variables doit être au moins égal à 3.

Mais il serait impossible de continuer ainsi en prenant pour base unique l'inégalité (46).

En effet, il est aisé de montrer que toutes les arbitraires entrant dans les polynômes A_i ne sont pas réellement distinctes et que l'on peut égaler à zéro quelques-uns des coefficients sans diminuer la généralité du second membre de l'équation (45).

Supposons, par exemple, que m soit égal à 4. L'égalité (45) deviendra

$$(47) \qquad d^5 z = A_1 d^4 z + A_2 d^3 z + A_3 d^1 z,$$

et elle peut évidemment s'écrire

$$d^5 z = A_1 d^4 z + (A_2 + B_0 d^2 z) d^3 z + (A_3 - B_0 d^3 z) d^1 z,$$

B_0 désignant une constante. Remplaçons maintenant $d^3 z$ par son expression et disposons de B_0 de manière à annuler un des coefficients de $A_3 - B_0 d^3 z$; nous retrouverons l'équation (47), mais avec un terme de moins dans A_3.

D'une manière générale, désignons par $\theta(m, \mu)$ le nombre des coefficients arbitraires réellement distincts contenus dans le second nombre de l'équation (45); l'inégalité à laquelle devra satisfaire μ pour chaque valeur de m sera

$$(47) \qquad \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}{1.2\ldots(m+1)} > \theta(m, \mu).$$

Nous indiquerons dans la Note qui termine ce Mémoire comment on peut déterminer $\theta(m, \mu)$.

Mais on peut encore généraliser et rendre plus précise la proposition que nous venons de démontrer relativement aux fonctions algébriques. Considérons, en effet, une telle fonction définie par une équation de degré m,

$$f(z, x_1, \ldots, x_\mu) = 0.$$

Il est aisé de démontrer qu'il existera, entre les différentielles totales de z, les deux relations

$$A_\rho d^m z = A_{\rho+1} d^{m-1} z + \ldots + A_{\rho+m} z,$$
$$B_\nu d^{m+1} z = B_{\nu+1} d^m z + \ldots + B_{\nu+m-1} d^2 z,$$

où A_i, B_i désignent des polynômes homogènes en $dx_1, \ldots, dx_\mu$, d'un degré marqué par leurs indices; mais de plus *les coefficients de ces polynômes sont des fonctions rationnelles de* $x_1, \ldots, x_\mu$. On a généralement pour ρ et ν les valeurs

$$\rho = \frac{m(m-1)}{2}, \quad \nu = \frac{(m+2)(m-1)}{2}.$$

Cette proposition se déduit aisément de celles que l'on connaît relativement aux fonctions d'une seule variable définies par une équation algébrique. Elle se rattache d'ailleurs indirectement à l'objet de ce Mémoire, et son étude m'entraînerait loin du problème que j'avais en vue. Je me contenterai donc d'ajouter à ce qui précède l'énoncé suivant :

Il y a toujours entre la fonction z et m quelconques de ses dérivées, ou entre $m+1$ dérivées de z, une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions entières des variables indépendantes. De plus, si parmi les quantités choisies se trouve une seule des fonctions

$$z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_\mu},$$

le coefficient de cette fonction dans la relation linéaire est nul.

En d'autres termes : *Quand toutes les dérivées sont au moins du second ordre, la relation a lieu entre m dérivées seulement. J'ajoute qu'il sera toujours possible de choisir dans cet ensemble de relations un certain nombre d'entre elles dont toutes les autres se déduiront par différentiation et élimination, et dont la solution commune se composera uniquement des diverses branches de la fonction z.*

Note sur une fonction numérique.

Considérons des fonctions homogènes et entières de μ variables

$$u_m, \quad u_{m-1}, \quad \ldots, \quad u_{m-p};$$

formons, avec des polynômes homogènes tout à fait arbitraires, d'ordre marqué par leur indice,

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_p,$$

la somme

$$A_0 u_m + A_1 u_{m-1} + \ldots + A_p u_{m-p}, \tag{1}$$

et proposons-nous de rechercher combien le polynôme d'ordre m, ainsi formé, contient de coefficients réellement arbitraires. Nous désignerons ce nombre par $\varphi(m, p)$. La fonction $\theta(m, \mu)$, que nous avons considérée à la fin de ce travail, se rattache évidemment à la fonction $\varphi(m,p)$ par l'égalité

$$(2) \qquad \theta(m,\mu) = \varphi(m+1, m-1) - 1.$$

Par suite, si l'on connaît l'expression générale de $\varphi(m,p)$, on pourra en déduire celle de la fonction θ. Nous allons voir qu'on peut exprimer φ au moyen de la fonction

$$\mathrm{N}(p,\mu),$$

qui donne le nombre des coefficients dans un polynôme homogène d'ordre p à μ variables. On a, comme on sait,

$$\mathrm{N}(p,\mu) = \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots p} = \frac{(p+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots(\mu-1)}.$$

Nous conviendrons de rendre nulle la fonction N toutes les fois que p sera négatif. Elle est ainsi définie pour toutes les valeurs entières de p.

En ce qui concerne la fonction $\varphi(m,p)$, on a évidemment

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(m,0) = 1, \\ \varphi(m,1) = \mathrm{N}(1,\mu+1) = \mu+1. \end{cases}$$

Nous conviendrons également de poser

$$(4) \qquad \varphi(m,p) = 0$$

dans le cas où, p étant négatif, la fonction n'aurait plus de sens.

Ces remarques une fois faites, nous allons établir une relation entre les fonctions φ et N.

Dans l'expression (1), nous pouvons évidemment substituer à A_p le polynôme

$$(5) \qquad \mathrm{A}'_p = \mathrm{A}_p - u_{m-p-1}\mathrm{B}_{2p-m-1} - \ldots - \mathrm{B}_0 u_p$$

(où les B_i sont des polynômes arbitraires d'un degré marqué par leurs indices, et que l'on supprimera quand cet indice deviendra négatif), à la condition de remplacer A_{p+q} par

$$\mathrm{A}'_{p+q} = \mathrm{A}_{p+q} + u_{m-p}\mathrm{B}_{2p+q-m},$$

et l'expression (1) prendra la nouvelle forme

$$(5) \qquad \mathrm{A}'_0 u_m + \ldots + \mathrm{A}'_p u_{m-p}.$$

Nous pouvons la décomposer en deux parties : l'une, formée des p premiers termes, toute semblable à l'expression primitive où l'on aurait changé p en $p-1$, et qui, par conséquent, contiendra $\varphi(m, p-1)$ coefficients arbitraires; l'autre, composée du dernier terme $A'_p u_{m-p}$, A'_p étant donné par l'équation (5).

A'_p se forme en retranchant de A_p une fonction

$$u_{m-p+1} B_{2p-m+1} + \ldots + B_0 u_p,$$

qui contient $\varphi(p, 2p-m-1)$ coefficients réellement distincts. On peut disposer de ces coefficients de manière à annuler un nombre égal de coefficients de A'_p, qui sera ainsi ramené à ne contenir que

$$N(p, \mu) - \varphi(p, 2p-m-1)$$

coefficients arbitraires. On a donc l'équation

$$\varphi(m, p) = \varphi(m, p-1) + N(p, \mu) - \varphi(p, 2p-m-1), \tag{7}$$

qui, jointe aux formules (3) et (4), va suffire à la détermination de φ.

Toutes les fois que l'on aura

$$p < \frac{m+1}{2}, \tag{8}$$

on aura aussi

$$\varphi(p, 2p-m-1) = 0,$$

et, par conséquent, l'équation (7) se réduira à

$$\varphi(m, p) = \varphi(m, p-1) + N(p, \mu).$$

Changeons p en $p-1$, $p-2$, ..., ce qui est permis, puisque p ne cessera de satisfaire à l'inégalité (8), et ajoutons toutes les équations ainsi obtenues; nous trouverons

$$\varphi(m, p) = N(p, \mu) + N(p-1, \mu) + \ldots,$$

ou

$$\varphi(m, p) = N(p, \mu+1).$$

Si nous introduisons la nouvelle fonction φ, définie par l'égalité

$$\varphi(m, p) = N(p, \mu+1) + \varphi_1(m, p), \tag{9}$$

on aura donc

$$(10) \qquad \varphi_1(m,p)=0 \quad \text{pour} \quad p<\frac{m+1}{2}.$$

Remplaçons, dans l'égalité (7), φ par son expression en φ_1; elle deviendra

$$(7^a) \left\{ \begin{aligned} &\varphi_1(m,p) \\ &\quad =\varphi_1(m,p-1)-\varphi_1(p,2p-m-1)-\mathrm{N}(2p-m-1,\mu+1). \end{aligned} \right.$$

En vertu de l'équation (10), appliquée à $\varphi_1(p,\ 2p-m-1)$, on aura

$$\varphi_1(p,\ 2p-m-1)=0,$$

toutes les fois que p satisfera à l'inégalité

$$2p-m-1<\frac{p+1}{2}$$

ou

$$(8^a) \qquad p<\frac{2m}{3}+1.$$

Dès que cette condition relative à p sera remplie, l'équation (7^a) se réduira à la suivante :

$$\varphi_1(m,p)=\varphi_1(m,p-1)-\mathrm{N}(2p-m-1,\ \mu+1).$$

Ici encore on peut changer p en $p-1, \ldots$, et ajouter les égalités obtenues, ce qui donnera

$$\varphi_1(m,p)=-\sum_{q=0}\mathrm{N}(2p-m-1-2q,\ \mu+1),$$

la somme devant être prolongée jusqu'à ce que l'argument de N devienne négatif. Si donc on pose, pour abréger,

$$\mathrm{N}_1(h)=-\sum_{q=0}\mathrm{N}(h-2q,\ \mu+1),$$

on pourra écrire

$$\varphi_1(m,p)=\mathrm{N}_1(2p-m-1)+\varphi_2(m,p),$$

et l'on aura

$$(10^a) \qquad \varphi_2(m,p)=0 \quad \text{pour} \quad p<\frac{2m}{3}+1.$$

En répétant indéfiniment la série des raisonnements que nous venons de faire, on sera conduit, on le reconnaîtra aisément, au résultat suivant.

Définissons les fonctions suivantes :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &N_1(h) = -\sum_{q=0} N(h-2q, \mu+1),\\ &N_2(h) = -\sum_{q=0} N_1(h-3q),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &N_i(h) = -\sum_{q=0} N_{i-1}[h-(i+1)q],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

q prenant toutes les valeurs entières et positives pour lesquelles l'argument des fonctions N_i est positif; on aura

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m,p) = {} & N(p, \mu+1)\\ & + N_1(2p-m-1) + N_2(3p-2m-3) + \ldots\\ & + N_i\left[(i+1)p - im - \frac{i(i+1)}{2}\right] + \ldots, \end{aligned}\right.$$

la somme étant prolongée jusqu'à ce que l'argument de la fonction N_i devienne négatif. Comme on déduit aisément des formules (11)

$$N_i(h) = (-1)^i \Sigma\Sigma\Sigma\ldots N[h - 2q_2 - 3q_3 - \ldots - (i+1)q_{i+1}, \mu+1],$$

on voit que l'on pourra prendre aussi pour l'expression générale de $\varphi(m,p)$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(m,p)\\ &\quad = \Sigma\Sigma\Sigma\ldots(-1)^i N\Big[(i+1)p - im - \frac{i(i+1)}{2}\\ &\qquad\qquad - 2q_2 - 3q_3 - \ldots - (i+1)q_{i+1}, \mu+1\Big], \end{aligned}\right.$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, de $i, q_2, \ldots, q_{i+1}$ pour lesquelles l'argument de N est positif. Par conséquent cette somme se composera d'un nombre fini de termes.

Il suit de là que l'on peut écrire

$$(14)\qquad \varphi(m,p) = \Sigma H(\alpha) N(p-\alpha, \mu+1),$$

α étant entier et positif ou nul, et $H(\alpha)$ étant une fonction numérique que l'on peut définir comme il suit.

Considérons toutes les solutions possibles de l'équation

$$\alpha = i(m-p) + \frac{i(i+1)}{2} + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + (i+1)q_{i+1},$$

où $i, q_2, \ldots q_{i+1}$ sont des entiers positifs ou nuls. $H(\alpha)$ sera l'excès du nombre de ces solutions pour lesquelles i est pair sur le nombre de celles pour lesquelles i est impair.

Il suit de là, d'après les principes de la partition des nombres, que, si l'on considère la fonction

$$f(x) = \Sigma H(\alpha) x^\alpha,$$

elle aura pour expression

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \frac{x^{i(m-p)+\frac{i(i+1)}{2}}}{(1-x^2)\ldots(1-x^i)},$$

le produit $(1-x^2)\ldots(1-x^i)$ devant être remplacé par 1 pour $i=0$. Cette propriété va nous permettre de déterminer $H(\alpha)$.

En effet, dans l'équation bien connue

$$(1+xz)(1+x^2z)\ldots = 1 + \frac{xz}{1-x} + \frac{x^3z^2}{(1-x)(1-x^2)} + \ldots + \frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}}z^i}{(1-x)\ldots(1-x^i)},$$

faisons $z = -x^{m-p-1}$; nous obtiendrons la formule

$$\prod_{\mu=0}^{\mu=\infty}(1-x^{m-p+\mu}) = 1 - \frac{x^{m-p}}{1-x} + \ldots + (-1)^{i+1}\frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}+i(m-p)}}{(1+x)\ldots(1-x^{i+1})} + \ldots,$$

et, si nous comparons au développement de $f(x)$, donné par la formule (15), nous trouverons

$$\frac{x^{m-p}f(x)}{1-2} = 1 - (1-x^{m-p})(1-x^{m-p+1})\ldots.$$

C'est l'équation que nous voulions obtenir. On peut encore la mettre sous la forme

$$(16)\quad \Sigma\, \mathrm{H}(\alpha) x^{\alpha+m-p} = 1 - x - \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=\infty} (1-x^\mu)}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{m-p-1})}.$$

On connaît la belle formule d'Euler

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=\infty} (1-x^\mu) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$$
$$= \Sigma(-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}.$$

Il ne reste plus qu'à développer le quotient

$$\frac{1}{(1-x^2)\ldots(1-x^{m-p-1})},$$

ce qui ne saurait offrir de difficulté.

Le cas particulier qui nous intéresse surtout est celui où l'on a $m - q = 2$. Nous aurons alors

$$\Sigma\, \mathrm{H}(\alpha) x^{\alpha+2} = 1 - x - (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots,$$

ou, en employant le développement d'Euler

$$\Sigma\, \mathrm{H}(\alpha) x^{\alpha+2} = x^2 - x^5 - x^7 + x^{12} + x^{15} - x^{22} - x^{26} + \ldots,$$

équation qui détermine $\mathrm{H}(\alpha)$. On en conclut

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(m, m-2) = {} & \mathrm{N}(m-2, \mu+1) - \mathrm{N}(m-5, \mu+1) \\ & - \mathrm{N}(m-7, \mu+1) + \mathrm{N}(m-12, \mu+1) \\ & + \mathrm{N}(m-15, \mu+1) - \ldots, \end{aligned} \right.$$

le terme général étant

$$(-1)^{n-1} \mathrm{N}\left(m - \frac{3n^2 \pm n}{2}, \mu+1\right).$$

La formule (7) nous donne, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} \varphi(m, m-1) &= \varphi(m, m-2) + \mathrm{N}(m-1, \mu) - \varphi(m-1, m-3), \\ \varphi(m, m) &= \mathrm{N}(m, \mu). \end{aligned}$$

Toutes les autres valeurs de $\varphi(m, p)$ se déduiront du développement (16).

De l'expression de $\varphi(m, m-2)$ on déduit facilement celle de la fonction θ définie par la formule (2)

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &1+\theta(m, p) = \mathrm{N}(m-1, \mu+1) - \mathrm{N}(m-4, \mu+1)\\ &\quad - \mathrm{N}(m-6, \mu+1) + \mathrm{N}(m-11, \mu+1) + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons maintenant apprécier les différences des valeurs fournies par les inégalités (46) et (47), qui font connaître des limites inférieures pour μ lorsque m est donné. Voici ces valeurs pour les 10 premiers degrés :

Valeurs de m.	Valeurs de μ données par l'inégalité (46).	Valeurs exactes de μ données par l'inégalité (47).
2	2	2
3	3	3
4	3	3
5	4	4
6	5	4
7	5	5
8	6	5
9	6	5
10	7	6

Je ferai remarquer, en terminant, que l'on déduit de la formule (16) l'expression suivante de $\varphi(m, p)$:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(m, p) = \Sigma\mathrm{N}(m-i, \mu) - \Sigma\Sigma\mathrm{N}(m-i-k, \mu)\\ &\qquad + \Sigma\Sigma\Sigma\mathrm{N}(m-i-k-l, \mu) - \ldots,\end{aligned}\right.$$

où les sommes sont étendues à toutes les valeurs différentes de $i, k, l, \ldots$, comprises dans la suite

$$m, m-1, \ldots, m-p.$$

Réciproquement, on pourrait démontrer d'une manière directe la formule (18) et en déduire les résultats qui précèdent.