Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

A.-E. PELLET

Sur un mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 393-395

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_393_0>

SUR UN MODE DE SÉPARATION DES RACINES DES ÉQUATIONS ET LA FORMULE DE LAGRANGE;

Par M. A.-E. PELLET.

Désignons par $F(x)$ la série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$, et, α_i représentant le module de a_i, supposons que l'équation

$$o = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} - \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

admette deux racines positives r_1 et $r_2 > r_1$; l'équation $F(x) = o$ a n racines de modules inférieurs à r_1, et les autres ont des modules supérieurs à r_2. En effet, x ayant un module compris entre r_1 et r_2, le terme $a_n x^n$ de $F(x)$ a un module supérieur à la somme des modules de tous les autres termes. Posons

$$F(x) = a_n x^n + f(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{f(x)}{a_n x^n} \right];$$

assignons au module de x une valeur comprise entre r_1 et r_2, et faisons varier son argument de o à 2π. Le module de $a_n x^n$ augmente de $2n\pi$; quant à celui de $\left[1 + \frac{f(x)}{a_n x^n} \right]$, il reprend sa valeur primitive; $F(x) = o$ a donc n racines de modules inférieurs à n (Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 31). D'ailleurs, cette proposition résultera de l'analyse qui va suivre.

Nous supposons que le module de x est compris entre r_1 et r_2. On a

$$\begin{aligned} lF(x) &= la_n + n.lx + l\left[1 + \frac{f(x)}{a_n x^n} \right] \\ &= la_n + n.lx + \frac{f(x)}{a_n x^n} - \frac{1}{2}\frac{f(x)^2}{a_n^2 x^{2n}} + \ldots + (-1)^{i-1} \frac{f(x)^i}{i a_n^i x^{ni}} + \ldots. \end{aligned}$$

La série des modules des termes de la série à double entrée qui figure dans la formule précédente est convergente; on peut donc ordonner cette série suivant les puissances positives et négatives de x. En prenant les dérivées des deux membres, il vient

$$(1)\quad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{n}{x} + \frac{d\frac{f(x)}{a_n x^n}}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d\frac{f(x)^2}{a_n^2 x^{2n}}}{dx} + \ldots + \frac{(-1)^i}{i}\frac{d\left[\frac{f(x)}{a_n x^n}\right]^i}{dx} + \ldots.$$

Dans la formule précédente, les fonctions qui suivent $\frac{n}{x}$ ne contiennent pas de terme en $\frac{1}{x}$. Ainsi $\frac{F'(x)}{F(x)}$ est développable pour les valeurs de x considérées suivant les puissances positives et négatives de x; le coefficient de $\frac{1}{x}$ étant n dans ce développement, l'équation $F(x) = 0$ a n racines de modules inférieurs à r_1; la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces n racines est égale au coefficient de $\frac{1}{x^{m-1}}$ dans le second membre de la formule (1).

Si l'on prend

$$f(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n \quad \text{et} \quad F(x) = x^n + f(x),$$

on est conduit à la formule de Waring pour exprimer la somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique. J'ai déjà donné cette démonstration dans les *Nouvelles Annales* (année 1875).

Faisons $F(x) = x - t f(x)$, $f(x)$ étant une fonction holomorphe pour $x = 0$. Désignons par $\mathcal{F}(x)$ ce que devient $f(x)$ lorsqu'on y remplace les divers coefficients de x par leur module, et par τ la plus grande valeur réelle de t pour laquelle l'équation $x - t\,\mathcal{F}(x) = 0$ admet deux racines positives; pour $t = \tau$, la racine positive de l'équation $x - \tau\,\mathcal{F}(x) = 0$ est double; nous la désignerons par ξ. t ayant un module inférieur à τ, l'équation $F(x) = 0$ a une seule racine (x_1) de module inférieur à ξ. Cette racine est égale au coefficient de $\frac{1}{x^2}$ dans la fonction

$$\frac{1}{x} - t\,\frac{d\,\frac{f(x)}{x}}{dx} - \frac{t^2}{2}\,\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2}{dx} - \ldots - \frac{t^i}{i}\,\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx} - \ldots.$$

Plus généralement, $\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe pour $x = 0$, $\varphi(x_1)$ est égale au coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\varphi(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}$, c'est-à-dire dans

$$\frac{\varphi(x)}{x} - t\,\varphi(x)\,\frac{d\,\frac{f(x)}{x}}{dx} - \ldots - \frac{t^i}{i}\,\varphi(x)\,\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx} - \ldots.$$

Or

$$\varphi(x)\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx}+\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i\varphi'(x)=\frac{d\,\varphi(x)\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx};$$

dans le second membre de cette formule, il n'y a pas de terme en $\frac{1}{x}$; donc

$$\begin{aligned}&\text{coeff. de } \frac{1}{x} \text{ dans } \varphi(x)\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx}\\ &=\text{coeff. de } \frac{1}{x} \text{ dans } -\varphi'(x)\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i\\ &=-\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)}\left[\frac{d^{i-1}\,\varphi'(x)f(x)^i}{dx^{i-1}}\right]_{x=0}.\end{aligned}$$

Remplaçant x par $a+x$, on voit que la fonction holomorphe $\varphi(x_1)$, x_1 satisfaisant à l'équation $x-a-tf(x)=0$ et se réduisant à a pour $t=0$, est égale à

$$\varphi(a)+t\,\varphi'(a)f(a)+\ldots+\frac{t^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\,\varphi'(a)f(a)^n}{da^{n-1}}+\ldots;$$

ce qui est la formule de Lagrange.

La démonstration précédente est au fond la même que celle donnée par Cauchy dans ses *Nouveaux Exercices*. Les développements que j'y ajoute me paraissent donner aux considérations de Cauchy plus de portée et de rigueur. La démonstration de Cauchy a déjà inspiré celle de M. Rouché (XXXIX[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*).