G. MITTAG-LEFFLER

Recherches sur la théorie des fonctions

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 388-392
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_388_1>

RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS;

PAR M. G. MITTAG-LEFFLER (1).

Il y a, comme on sait, deux formes, essentiellement différentes, au moyen desquelles on peut exprimer une fonction algébrique rationnelle d'une variable indépendante. L'une de ces formes est un quotient de deux produits qui n'ont entre eux aucun zéro commun, et dont chaque facteur présente un seul zéro. L'autre est la somme d'un certain nombre de fonctions rationnelles dont chacune a un seul infini.

M. Weierstrass a fait voir (2) comment la première de ces deux

(1) *Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societätens Förhandlingær*, t. XXIII. Traduit du suédois.

(2) K. WEIERSTRASS, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.* (*Abhandlungen der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*, 1876).

formes subsiste, même pour des fonctions de caractère rationnel, c'est-à-dire pour des fonctions qui ne se distinguent des fonctions rationnelles qu'en ce qu'une telle fonction, lorsque la variable indépendante devient infinie, ne se comporte plus comme pour une valeur régulière ou sans singularité essentielle, mais se comporte, au contraire, comme pour une valeur véritablement et essentiellement singulière. Mais l'autre forme fondamentale des fonctions algébriques rationnelles, qui, en réalité, est la plus générale, s'applique aussi elle-même aux fonctions de caractère rationnel. C'est ce que j'ai démontré dans plusieurs Mémoires publiés dans les *Comptes rendus* de l'Académie de Stockholm (1).

M. Weierstrass a publié depuis (2) une nouvelle démonstration du théorème qui a servi de base à mes recherches, et qui diffère essentiellement de celui que j'avais moi-même primitivement trouvé. Cette démonstration, toutefois, avait été établie par moi, sans que j'aie connu la démonstration de M. Weierstrass, plus d'un an auparavant, vers la fin du printemps de l'année 1879, dans mes leçons publiques à l'Université de Helsingfors. D'autres démonstrations de mes théorèmes ont été données depuis par MM. Dini (3), Hermite (4), Schering (5). Je reviendrai une autre fois sur l'examen de ces diverses démonstrations, sur les différences qu'elles présentent entre elles et sur ce qu'il peut y avoir de véritablement nouveau dans chacune.

Ici, je remarquerai seulement que M. Weierstrass, dans un Mé-

---

(1) *En metod att analytiskt framställa en funktion af rationel karakter, hvilken blir oändlig altid och endast uti vissa oändighetspunkter, hvilkas konstanter äro på förhand angifna.* (7 juin 1876).

Ytterligare om den analytiska framställningen af funktioner af rationel karakter. Ire Partie, janvier 1877.

Voir, à ce sujet, *Extrait d'une Lettre à M. Hermite,* par M. Mittag-Leffler (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* III_1, p. 269; 1879).

(2) *Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler* (*Monatsb. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin,* août 1880).

(3) *Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa.* Milano, 1880.

(4) *Sur quelques points de la théorie des fonctions. Extrait d'une Lettre de M. Hermite à M. Mittag-Leffler* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ,* t. XII. — *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. XCI).

(5) *Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen* (*Abhandl. d. Königl. Akad. der Wiss. zu Göttingen,* t. XXVII; 1880).

moire extrêmement remarquable [1], publié depuis, renverse la question primitive, qui était d'exprimer une fonction de caractère rationnel au moyen d'une série de fonctions algébriques rationnelles, et, au lieu de cela, se propose le problème inverse, d'étudier une série donnée quelconque de cette espèce. Il parvient ainsi à ce résultat inattendu, qu'il existe des séries telles que, leurs termes étant des fonctions algébriques rationnelles, ces séries représentent dans les différentes parties du plan des fonctions analytiques différentes. Ainsi la série

$$\frac{2}{\pi}(x+x^{-1})+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu,\nu'}\left[\frac{1}{(1-2\nu-2\nu' x i)(2\nu+2\nu' x i)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1-2\nu-2\nu' x^{-1} i)(2\nu+2\nu' x^{-1} i)^2}\right],$$

pour citer un des exemples les plus simples, représente la fonction analytique $+1$, dès que la partie réelle de x est positive, et la fonction analytique -1, dès que la partie réelle de x est négative. M. Weierstrass a joint à cela un autre résultat, qu'il avait déjà communiqué à l'Académie de Berlin. La série de puissances

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu x^{a^\nu},$$

dans laquelle a est un nombre entier impair et positif, b une quantité positive, moindre que l'unité, avec la condition

$$ab > 1+\tfrac{3}{2}\pi,$$

série dont ainsi les divers termes sont encore des fonctions algébriques rationnelles, définit une fonction qui n'existe pas en dehors de la région de convergence de la série, et qui, par suite, existe seulement pour les valeurs de x dont le module ne surpasse pas l'unité.

Dans le Mémoire que M. Hermite a récemment publié dans les

---

(1) *Zur Functionenlehre.* (*Monatsb. der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin,* août 1880).

Actes de la Société (¹), le grand géomètre français a éclairé d'un point de vue tout nouveau les deux découvertes de M. Weierstrass que nous venons de citer. Il a, en effet, montré, d'une part, comment il existe une expression intégrale qui, dans les différentes parties du plan, représente des fonctions différentes, et, d'autre part, il indique aussi comment il est vraisemblablement possible de former d'autres expressions intégrales, définissant des fonctions qui n'existent que dans une certaine région du plan, et pour lesquelles les autres régions, comme cela a lieu pour la série de puissances de Weierstrass, forment un *espace lacunaire*. Dans une Note du même Mémoire, il communique encore une formule remarquable, due à M. Poincaré, professeur à la Faculté des Sciences de Caen, connu aussi par d'autres recherches, récemment publiées, sur la théorie des fonctions, d'un caractère profond et original. Cette formule est de la forme suivante :

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_p} \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_p a_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}},$$

u_1, u_2, ..., u_p étant des quantités données, dont la valeur absolue est moindre que l'unité, et α_1, α_2,..., α_p étant des constantes arbitraires. Si l'on désigne maintenant par P un polygone convexe, dont les sommets sont des points faisant partie du système α_1, α_2, ..., α_n, et tels que les points restants soient situés à l'intérieur du polygone ou sur ses côtés, alors l'expression de M. Poincaré représente, en tout point extérieur au polygone, une certaine fonction analytique uniforme. A l'intérieur du polygone ou sur son contour, au contraire, il ne se trouve aucun point tel que, dans une région aussi petite que l'on voudra, cette expression puisse être égalée à une série convergente de puissances. On ne peut pas toutefois conclure de là, sans plus ample démonstration, qu'il soit impossible que la fonction analytique, représentée à l'extérieur du polygone P par la formule de Poincaré, existe aussi à l'intérieur de ce polygone. La formule de Weierstrass, que j'ai citée tout à l'heure, représente bien, dans une moitié du plan, la fonction ana-

(¹) *Sur quelques points de la théorie des fonctions. Extrait d'une Lettre de M. Ch. Hermite à M. Mittag-Leffler.* (*Acta,* t. XII).

lytique $+1$, et cette fonction existe aussi dans l'autre moitié du plan, bien que la formule cesse de la donner et fournisse en son lieu une autre fonction analytique.

Dans un Mémoire que m'a envoyé M. Poincaré, et dont j'ai aujourd'hui l'honneur de proposer l'insertion dans les *Actes* de la Société, cette question trouve une explication aussi complète qu'ingénieuse. M. Poincaré montre comment la formule dont il s'agit est, en réalité, une expression d'une seule fonction analytique, pour laquelle le polygone P est un véritable « espace lacunaire », et, par cette remarque, il est le premier qui, après Weierstrass, ait donné un exemple concret de l'existence de fonctions de cette nature. M. Poincaré étudie également, en partant de la conception de la théorie des fonctions, propre à M. Weierstrass, certaines autres fonctions de même nature, ayant des « espaces lacunaires ».

Je me permets aussi de demander en même temps l'insertion dans les *Actes* d'un Mémoire de l'un de mes élèves actuels, M. Th. Homén, dans lequel, sur mon invitation, l'auteur, suivant les traces de MM. Weierstrass et Poincaré, s'est posé le problème de chercher, d'une part, à former de nouvelles séries de fonctions algébriques rationnelles qui, dans les différentes parties du plan, représentent des fonctions analytiques différentes, et, d'autre part, à établir d'autres séries de cette nature qui soient réellement des fonctions à *espace lacunaire*.

Je demande également pour ma part qu'il me soit réservé dans les *Actes* une place pour un Mémoire assez étendu, où seront publiées les recherches auxquelles je me suis livré depuis plusieurs années, et qui se rapportent aux différentes singularités qui peuvent se rencontrer dans les fonctions analytiques uniformes, ainsi qu'à la construction de formules générales, au moyen desquelles on peut représenter généralement les diverses classes des fonctions de cette espèce qui sont possibles.