BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

LIPSCHITZ

Sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b} \cos(a-b)x dx$

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, no 1 (1881), p. 387-388

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_387_1>

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b} \cos(a-b)x\,dx$;

PAR M. LIPSCHITZ.

Soit, pour un moment, en désignant par a et b deux quantités négatives, dont la somme, prise absolument, ne surpasse pas la valeur de l'unité,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b} \cos(a-b)x.dx,$$

ou plutôt

$$2J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b} \cos(a-b)x.dx;$$

j'introduirai, au lieu des fonctions trigonométriques, les exponentielles imaginaires, et je ferai $a = -g$, $b = -h$, ce qui donnera l'expression suivante :

$$2J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{2ix}+1)^{-g-h}\, \frac{e^{2ix(g-1)} + e^{2ix(h-1)}}{4i}\, d(e^{2ix}).$$

Mais le premier terme est donné par l'intégrale

$$\frac{1}{4i}\int (z+1)^{-g-h} z^{g-1}\,dz,$$

en posant $z = e^{2ix}$, selon le principe de l'intégration complexe ; on aura le même résultat si l'on intègre de $z = -1$ à $z = 0$ en faisant

$z = \xi e^{-i\pi}$, ou si l'on intègre de $z = 0$ à $z = -1$ en faisant $z = \xi e^{i\pi}$. On en conclut cette valeur

$$\frac{1}{2}\sin g\pi \int_0^1 (1-\xi)^{-g-h}\xi^{g-1}d\xi = \frac{1}{2}\sin g\pi \frac{\Gamma(1-g-h)\Gamma(g)}{\Gamma(1-h)}.$$

De la même manière, on obtient, pour le second terme de l'intégrale proposée,

$$\frac{1}{2}\sin h\pi \frac{\Gamma(1-g-h)\Gamma(h)}{\Gamma(1-g)}.$$

Mais ces deux valeurs coïncident en vertu des formules

$$\frac{\pi}{\sin g\pi} = \Gamma(g)\Gamma(1-g), \quad \frac{\pi}{\sin h\pi} = \Gamma(h)\Gamma(1-h),$$

et l'on parvient ainsi à l'expression, donnée pour la première fois par Cauchy,

$$J = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(1-g-h)}{\Gamma(1-g)\Gamma(1-h)} = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(1+a+b)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}.$$