

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

LIPSCHITZ

Sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x)^{a+b} \cos(a-b)x dx$

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 5, n^o 1 (1881), p. 387-388

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_387_1>

© Gauthier-Villars, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x)^{a+b} \cos(a-b)x \, dx$;

PAR M. LIPSCHITZ.

Soit, pour un moment, en désignant par a et b deux quantités négatives, dont la somme, prise absolument, ne surpasse pas la valeur de l'unité,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x)^{a+b} \cos(a-b)x \, dx,$$

ou plutôt

$$2J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2 \cos x)^{a+b} \cos(a-b)x \, dx;$$

j'introduirai, au lieu des fonctions trigonométriques, les exponentielles imaginaires, et je ferai $a = -g$, $b = -h$, ce qui donnera l'expression suivante :

$$2J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{2ix} + 1)^{-g-h} \frac{e^{2ix(g-1)} + e^{2ix(h-1)}}{4i} d(e^{2ix}).$$

Mais le premier terme est donné par l'intégrale

$$\frac{1}{4i} \int (z+1)^{-g-h} z^{g-1} dz,$$

en posant $z = e^{2ix}$, selon le principe de l'intégration complexe; on aura le même résultat si l'on intègre de $z = -1$ à $z = 0$ en faisant

$z = \xi e^{-i\pi}$, ou si l'on intègre de $z = 0$ à $z = -1$ en faisant $z = \xi e^{i\pi}$.
On en conclut cette valeur

$$\frac{1}{2} \sin g\pi \int_0^1 (1-\xi)^{-g-h} \xi^{g-1} d\xi = \frac{1}{2} \sin g\pi \frac{\Gamma(1-g-h)\Gamma(g)}{\Gamma(1-h)}.$$

De la même manière, on obtient, pour le second terme de l'intégrale proposée,

$$\frac{1}{2} \sin h\pi \frac{\Gamma(1-g-h)\Gamma(h)}{\Gamma(1-g)}.$$

Mais ces deux valeurs coïncident en vertu des formules

$$\frac{\pi}{\sin g\pi} = \Gamma(g)\Gamma(1-g), \quad \frac{\pi}{\sin h\pi} = \Gamma(h)\Gamma(1-h),$$

et l'on parvient ainsi à l'expression, donnée pour la première fois par Cauchy,

$$J = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(1-g-h)}{\Gamma(1-g)\Gamma(1-h)} = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(1+a+b)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}.$$