BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 376-384

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_376_0>

MÉLANGES.

SUR LES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. G. DARBOUX.

I.

Dans son *Cours d'Analyse*, p. 64, M. Hermite a remarqué que, si l'on développe le radical

$$\sqrt{1 + 2\alpha x + 2\alpha' y + \beta x^2 + \beta' xy + \beta'' y^2}$$

suivant les puissances de x et de y, le groupe homogène des termes du second degré dans le développement de ce radical entre comme facteur dans le groupe homogène des termes du troisième degré et des degrés plus élevés. Ce résultat si curieux peut encore être formulé de la manière suivante : Si l'on considère la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{\varphi(x, y)},$$

où $\varphi(x, y)$ est un polynôme du second degré, et que l'on développe $f(x + dx, y + dy)$ suivant les puissances de dx, dy par la formule

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + df + \frac{1}{2} d^2 f + \ldots$$

$d^3 f$, $d^4 f, \ldots$ sont divisibles exactement par $d^2 f$, quelles que soient les différentielles dx, dy. Cette proportion est remarquable parce qu'elle s'applique à la suite indéfinie des différentielles à partir de la troisième; et elle paraît au premier abord extrêmement limitative.

Mais il est aisé de prouver que, si la différentielle troisième d'une fonction est exactement divisible par la différentielle seconde, il en sera de même de toutes les différentielles d'ordre supérieur à trois. Plus généralement, si la différentielle $n + 1^{\text{ième}}$ d'une fonction est divisible par la différentielle $n^{\text{ième}}$, il en sera de même de toutes les différentielles d'ordre supérieur à $n + 1$.

Considérons en effet une fonction f de μ variables $x_1, \ldots, x_\mu$ et supposons que l'on ait

$$d^{n+1}f = (A_1 dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu) d^n f;$$

on déduira de là par la différentiation

$$d^{n+2}f = (dA_1 dx_1 + \ldots + dA_\mu dx_\mu)\, d^n f + (A_1\, dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu)\, d^{n+1} f,$$

et par conséquent

$$d^{n+2}f = [dA_1 dx_1 + \ldots + dA_\mu dx_\mu + (A_1 dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu)^2]\, d^n f.$$

En différentiant de nouveau, on démontrera de même que $d^{n+3}f$ et les différentielles suivantes sont toutes divisibles par $d^n f$.

Je me suis proposé de résoudre d'une manière générale la question suivante :

Trouver toutes les fonctions de μ variables $x_1, \ldots, x_\mu$ pour lesquelles la différentielle $(n+1)^{ième}$ est exactement divisible par la différentielle $n^{ième}$, c'est-à-dire toutes celles pour lesquelles on a

$$(1) \qquad d^{n+1}f = (A_1 dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu) d^n f,$$

quelles que soient les différentielles $dx_1, \ldots, dx_\mu$. Je vais indiquer ici la marche que j'ai suivie et les résultats que j'ai obtenus.

Les deux membres de l'équation (1) sont des polynômes homogènes d'ordre $n+1$ par rapport aux différentielles $dx_1, \ldots, dx_\mu$. En écrivant que ces polynômes sont égaux terme à terme, on aura une suite d'équations qui feront connaître toutes les dérivées d'ordre $n+1$ de la fonction f, exprimées en fonction des dérivées d'ordre n et des quantités inconnues, $A_1, \ldots, A_\mu$. On pourrait éliminer ces quantités inconnues et l'on serait conduit à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles d'ordre $n+1$, auxquelles devrait satisfaire la fonction f, et qu'il s'agirait d'intégrer. J'ai suivi une marche différente dans laquelle on conserve les quantités A_i.

Désignons, pour abréger, par $f^{n+1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu}$ la dérivée

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_\mu^{\alpha_\mu}},$$

dont nous avons une expression en fonction des quantités A_i et des dérivées d'ordre n de f. Si l'on substitue les expressions de ces dérivées dans les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f^{n+1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_\mu}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(f^{n+1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_{k-1},\ldots,\alpha_\mu}),$$

on sera conduit à des relations contenant les fonctions A_i et leurs dérivées premières, ainsi que les dérivées d'ordre n et $n+1$ de la fonction f. On pourra évidemment éliminer les dérivées d'ordre $n+1$ de f, en les remplaçant par leurs expressions connues, et il restera des relations entre les dérivées d'ordre n de f, les fonctions A_i et leurs dérivées premières. Ce sont ces relations qui serviront de point de départ à notre recherche, et nous allons d'abord les établir.

Il serait beaucoup trop long de les considérer isolément. Mais on peut les obtenir d'une manière rapide et les écrire sous une forme condensée assez élégante en opérant de la manière suivante. Nous désignerons, pour abréger, par $d^p\delta^{n-p}f$ la différentielle $n^{\text{ième}}$ dont l'expression symbolique est

$$d^p\delta^{n-p}f = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+dx_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^p\left(\delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\delta x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^{n-p}f.$$

C'est la différentielle $n^{\text{ième}}$ que l'on obtiendrait si l'on différentiait p fois la fonction f en employant le système des différentielles

$$dx_1,\ldots,dx_\mu$$

pour les variables indépendantes, et $n-p$ fois en employant le système

$$\delta x_1,\ldots,\delta x_\mu,$$

toutes ces différentielles étant d'ailleurs traitées comme des constantes dans les différentiations successives.

Posons, pour abréger,

$$u_d = A_1 dx_1+\ldots+A_\mu dx_\mu;$$

l'équation (1) pourra s'écrire

$$d^{n+1}f = u_d d^n f.$$

Si nous remplaçons partout la caractéristique d par

$$\lambda d + \delta,$$

c'est-à-dire

$$dx_i \quad \text{par} \quad \lambda dx_i + \delta x_i,$$

et que nous égalions les coefficients de λ^p, λ^{p+1} dans les deux membres, nous aurons les deux équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(n+1)d^p\delta^{n+1-p}f \\ &\quad = (n+1-p)u_\delta d^p\delta^{n-p}f + pu_d d^{p-1}\delta^{n-p+1}f, \\ &(n+1)d^{p+1}\delta^{n-p}f \\ &\quad = (n-p)u_\delta d^{p+1}\delta^{n-p-1}f + (p+1)u_d d^p\delta^{n-p}f. \end{aligned}\right.$$

Prenons la différentielle d de la première équation, et la différentielle δ de la seconde nous obtiendrons deux expressions de

$$d^{p+1}\delta^{n+1-p}f,$$

que nous pourrons égaler, ce qui nous conduit à la relation

$$\begin{aligned} &(n+1-p)du_\delta d^p\delta^{n-p}f + pdu_d\delta^{n-p+1}d^{p-1}f \\ &\quad - (n-p)\delta u_\delta d^{p+1}\delta^{n-p-1}f - (p+1)\delta u_d\delta^{n-p}d^p f \\ &\quad + u_\delta d^{p+1}\delta^{n-p}f - u_d d^p\delta^{n+1-p}f = 0. \end{aligned}$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons les différentielles

$$d^{p+1}\delta^{n-p}f, \quad d^p\delta^{n+1-p}f$$

par leurs expressionstirées des formules (2), nous serons conduits à la formule

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(n-p)\delta^{n-p-1}d^{p+1}f\left(\frac{u_\delta^2}{n+1} - \delta u_\delta\right) \\ &\quad + (p+1)\delta^{n-p}d^p f\left(-\delta u_d + \frac{u_d u_\delta}{n+1}\right) \\ &\quad + (n+1-p)d^p\delta^{n-p}f\left(du_\delta - \frac{u_d u_\delta}{n+1}\right) \\ &\quad + p\delta^{n-p+1}d^{p-1}f\left(du_d - \frac{u_d^2}{n+1}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

qui devra être vérifiée, quelles que soient les différentielles d, δ, pour toutes les valeurs du nombre entier, p de o à n inclusivement.

Je commencerai par examiner le cas où l'expression

$$\frac{u_\delta^2}{n+1} - \delta u_\delta = \frac{(A_1 \delta x_1 + \ldots + A_\mu \delta x_\mu)^2}{n+1} - (\delta A_1 \delta x_1 + \ldots + \delta A_\mu \delta x_\mu)^2,$$

sera nulle, quelles que soient les différentielles δx_i; alors on aura de même

$$(4) \qquad \frac{u_d^2}{n+1} = du_d,$$

et l'équation (3) se réduira à la suivante :

$$(p+1)\left(\delta u_d - \frac{u_d u_\delta}{n+1}\right) = (n+1-p)\left(du_\delta - \frac{u_d u_\delta}{n+1}\right),$$

qui, devant être vérifiée, quel que soit le nombre entier p, nous donne

$$\delta u_d = \delta u_\delta = \frac{u_d u_\delta}{n+1}.$$

L'équation

$$\delta u_d = d.u_\delta$$

entraîne les relations suivantes :

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i},$$

qui montrent que u_d est la différentielle d'une fonction. Nous pourrons donc poser

$$u_d = -\frac{(n+1)dv}{v},$$

ce qui donnera

$$du_d = \frac{-(n+1)d^2 v}{v} + \frac{(n+1)dv^2}{v^2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (4), nous aurons

$$d^2 v = 0,$$

et, par conséquent,

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\mu x_\mu + \alpha.$$

On ne peut supposer que toutes les quantités α_i soient nulles, car alors $d^{n+1}f$ serait nulle, et la fonction f serait un polynôme entier de degré n. Par suite, on pourra toujours, par une substitution linéaire à coefficients constants, ramener v à la forme

$$v = x_1,$$

et l'équation (1) deviendra

$$d^{n+1}f = -\frac{(n+1)dx_1}{x_1} d^n f. \tag{5}$$

Posons

$$d^n f = \frac{1}{x_1^{n+1}} F(x_1, \ldots, x_\mu, dx_1, \ldots, dx_\mu), \tag{6}$$

F désignant une fonction homogène d'ordre n de $dx_1, \ldots, dx_\mu$, qui reste à déterminer, et désignons, pour la commodité des notations, dx_μ par p_μ. On aura

$$d^{n+1}f = -\frac{n+1}{x_1^{n+2}} dx_1 F + \frac{1}{x_1^{n+1}}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}p_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_\mu}p_\mu\right),$$

et, si nous portons ces expressions des différentielles $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ dans l'équation (5), il restera

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}p_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_\mu}p_\mu = 0; \tag{7}$$

mais cette dernière équation n'est pas suffisante. Il nous reste à écrire les conditions qui expriment que le second membre de l'équation (6) est la différentielle $n^{\text{ième}}$ d'une fonction. Ici encore, pour éviter des calculs compliqués, nous ferons usage d'une proposition générale.

Considérons une fonction φ qui soit entière, homogène et d'ordre n par rapport aux quantités $p_i = dx_i$, les coefficients de ce polynôme étant d'ailleurs des fonctions quelconques des variables x_i, et cherchons les conditions qui sont nécessaires pour qu'il existe une fonction f satisfaisant à l'équation

$$d^n f = \varphi.$$

Si, dans les deux membres de cette équation, on remplace d par $d + \lambda\delta$, et que l'on égale les coefficients de λ dans les deux membres, on aura

$$nd^{n-1}\delta f = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}\delta x_\mu.$$

Le second membre devra donc être la différentielle δ de $nd^{n-1}f$.

Réciproquement, toutes les fois que l'expression

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}\delta x_\mu,$$

où les quantités $p_1, \ldots, p_\mu$ sont regardées comme des constantes, sera une différentielle exacte pour toutes les valeurs possibles de ces constantes, il sera possible de trouver une fonction dont φ sera la différentielle $n^{\text{ième}}$. Ainsi les conditions pour que la fonction φ soit une différentielle $n^{\text{ième}}$ exacte sont les suivantes :

$$(8) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i \partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_k \partial x_i},$$

qui doivent être vérifiées, quelles que soient les quantités p_i.

Appliquons cette proposition générale, dont la démonstration est facile, au problème particulier que nous avons à traiter. Ici, nous prenons pour φ l'expression

$$\varphi = \frac{F(x_1, \ldots, x_\mu, p_1, \ldots, p_\mu)}{x_1^{n+1}},$$

F satisfaisant déjà à l'équation (7). Les équations (8) prennent la forme suivante :

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial x_i},$$

dans le cas où les deux indices i et k sont supposés différents de l'unité. Si l'un d'eux est égal à 1, on a

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial x_i} - \frac{n+1}{x_1}\frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

Il faut donc déterminer la fonction F qui satisfait en même temps aux équations (7), (9), (10).

Différentions l'équation (7) par rapport à p_1, et tenons compte des équations (10). Le résultat de cette différentiation prendra la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \sum_i p_i \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial x_1} - \frac{n+1}{x_1}\sum p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0.$$

En vertu du théorème des fonctions homogènes, on a

$$\sum_i p_i \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial x_1} = n \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

$$\sum_i p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = nF.$$

L'équation précédente peut donc aussi être écrite sous la forme

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} = nF. \tag{11}$$

Différentions maintenant l'équation (7) par rapport à p_i, i étant différent de 1.; on trouvera, en suivant la même marche et tenant compte des formules (9) et (10),

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_1 \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0. \tag{12}$$

Il est maintenant facile de déterminer la fonction F satisfaisant aux équations (7), (11), (12).

Posons, en effet,

$$p_{1k} = p_1 x_k - p_k x_1.$$

Nous pourrons exprimer $p_2 \ldots p_\mu$ en fonction de $p_1, p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{1\mu}$ et des quantités x_i, et par conséquent donner à F la forme d'un polynôme homogène par rapport à $p_1, p_{12}, \ldots, p_{1\mu}$, les coefficients de ce polynôme pouvant être des fonctions des variables x_i. Mais alors les équations (12) nous donnent

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i > 1,$$

et l'équation (7),

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0;$$

F sera donc une fonction homogène entière *à coefficients constants* des quantités

$$dx_1, \; x_k dx_1 - x_1 dx_k,$$

et il est aisé de voir que toutes les conditions (9), (10) seront vérifiées quel que soit ce polynôme.

Il nous reste à trouver la fonction f satisfaisant à l'équation

$$d^n f = \frac{1}{x_1^{n+1}} F(dx_1, x_2 dx_1 - x_1 dx_2, \ldots, x_\mu dx_1 - x_1 dx_\mu),$$

où F est ce polynôme à coefficients constants que nous venons de définir. On trouve sans difficulté, par la considération du coefficient de dx_1^n,

$$f = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n x_1} F(1, x_2, x_3, \ldots, x_\mu),$$

en négligeant un polynôme entier d'ordre $n-1$, dont la différentielle $n^{\text{ième}}$ est évidemment nulle. Le numérateur de l'expression de f est le polynôme entier le plus général d'ordre n en $x_2, \ldots, x_\mu$. On peut lui ajouter évidemment des termes contenant x_1 en facteur, d'ordre égal ou inférieur à n, puisque ces termes, divisés par x_1, donneront un quotient entier qui disparaîtra dans la différentielle $n^{\text{ième}}$. Si l'on se rappelle enfin que nous avons fait une substitution linéaire, on voit que notre première solution nous conduit à la fonction f, dont l'expression est

$$(13) \qquad f = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)}{P},$$

où F est le polynôme le plus général d'ordre n, et P une fonction linéaire quelconque:

(*A suivre.*)