Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 353-375

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_353_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JACOBI (C.-G.-J.). — GESAMMELTE WERKE. Erster Band, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT. — 1 vol. in-4°. Berlin, 1881.

STEINER (JACOB). — GESAMMELTE WERKE. Erster Band, herausgegeben von K. WEIERSTRASS. — 1 vol. in-4°. Berlin, 1881.

L'Académie des Sciences de Berlin a confié aux Membres de la Section de Mathématiques le soin de diriger l'édition des Œuvres complètes de Jacobi, de Steiner et de Lejeune-Dirichlet.

M. Borchardt s'était chargé de l'édition de Jacobi ; M. Weierstrass continue l'œuvre interrompue par la mort de M. Borchardt ; c'est lui aussi qui dirige l'édition des Œuvres de Steiner.

Le premier volume des Œuvres de Jacobi et le premier volume des Œuvres de Steiner ont paru il y a quelques mois. Ces éditions sont fort belles et paraissent avoir été faites avec un soin extrême ; les fautes d'impression des éditions précédentes et les *erreurs* ont été corrigées et signalées. Un portrait orne chaque volume.

Les Œuvres de Jacobi comprendront huit volumes. Les matériaux ont été groupés, puis, dans chaque groupe, classés d'après l'ordre chronologique ; ainsi les deux premiers volumes contiendront tout ce qui concerne les transcendantes elliptiques et abéliennes.

MM. Mertens, Netto, Schwarz, Schering, Roethig, Lampe, Wangerin, Hermite ont collaboré à l'édition du premier volume, en tête duquel on trouvera la célèbre Notice que Lejeune-Dirichlet a consacrée à la mémoire de Jacobi.

Les Œuvres de Steiner comprendront deux volumes ; les matières y sont rangées par ordre chronologique. Au premier volume ont collaboré MM. Schröter et Kiepert.

LAISANT. — INTRODUCTION A LA MÉTHODE DES QUATERNIONS. — 1 vol. in-8°, 242 pages. Paris, 1881.

Le livre de M. Laisant est un livre d'enseignement : il a les qualités qu'on voudrait toujours rencontrer dans les ouvrages de cette sorte ; il est clair, écrit avec simplicité et élégance. L'auteur souhaite vivement que la méthode des quaternions, qu'il cultive volontiers, soit plus connue qu'elle ne l'est en France, et que les géomètres de notre pays lui accordent au moins le degré de faveur qu'elle mérite sans doute. On est en droit de compter que son livre atteindra le but qu'il a poursuivi, et l'on doit reconnaître qu'il n'a rien négligé pour cela, que la lecture du texte est facile et que les nombreux exercices traités ou indiqués au lecteur permettent à ce dernier de se rendre familières les notations et la méthode.

Les notations employées sont les notations systématiques introduites par M. Hoüel ; leur adoption n'est pas seulement un hommage rendu à l'auteur de la *Théorie des quantités complexes,* dont les précieux conseils ne pouvaient, en cette occasion, manquer à M. Laisant : il n'est que juste de reconnaître que l'emploi de ces notations facilite singulièrement la lecture des calculs, dont elles permettent de retrouver à chaque instant la signification géométrique.

La marche suivie dans l'exposition de la méthode est inductive et nettement géométrique ; le lecteur n'est pas jeté de suite dans la profondeur du sujet ; il y descend entouré d'images familières et ne dépouille que peu à peu les habitudes qu'il lui faudra perdre ; les idées nouvelles s'acquièrent sans difficulté, et d'ailleurs leur introduction est justifiée de suite par des applications nombreuses, où l'esprit se reposerait au besoin. Ainsi, avant d'arriver à la notion de *quaternion,* M. Laisant a exposé avec soin les opérations relatives aux vecteurs et aux biradiales ; le quaternion est introduit comme *l'expression analytique d'une biradiale.* Pour établir la propriété *associative* de la multiplication des quaternions, l'auteur montre que la multiplication des biradiales est distributive par rapport à l'addition, tant en ce qui concerne le multiplicateur qu'en ce qui concerne le multiplicande ; la propriété associative établie pour les quantités réelles et pour les unités symboliques en résulte immédiatement dans toute sa généralité. Ces principes fondamentaux une fois posés, l'auteur les applique de suite à la géométrie de la ligne droite, du plan, du cercle et de la sphère; s'il interrompt un instant les applications pour traiter de la différentiation des quaternions, il y revient pour s'occuper, pendant trois chapitres, des courbes du second degré. Deux chapitres théoriques sont ensuite consacrés, l'un aux formules relatives à la multiplication de trois, quatre, etc., vecteurs; l'autre à la résolution de l'équation générale du premier degré, où figure un quaternion inconnu, et l'auteur termine par des applications aux surfaces du second degré.

On voit avec quel soin M. Laisant s'est efforcé de rassurer son lecteur et de ne pas le laisser trop longtemps dans le domaine de l'abstraction.

Un livre analogue : *Introduction to Quaternions,* avait été publié à Londres, en 1873, par MM. Kelland et Tait; il était tout naturel d'en profiter. M. Laisant déclare y avoir puisé la plupart des *exercices* qu'il a développés ou simplement indiqués.

GOURSAT. — SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE QUI ADMET POUR INTÉGRALE LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, 142 pages in-4°. Paris, 1881.

La première partie de la Thèse de M. Goursat est consacrée à l'intégration de l'équation célèbre

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta y = 0.$$

On sait, depuis Kummer, qu'il existe, en général, outre la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, vingt-trois séries qui vérifient cette équation; chacune d'elles s'obtient en multipliant par une expression de la forme $x^p(1-x)^q$ une série hypergéométrique dont les trois premiers éléments sont liés simplement à α, β, γ, et dont le quatrième élément est x, $\frac{1}{x}$, $1-x$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$

ou $\frac{x-1}{x}$. Dans la région commune aux domaines de convergence de trois de ces vingt-quatre séries, une certaine relation linéaire, dont les coefficients ne dépendent que de α, β, γ, existe évidemment entre les trois séries considérées. La connaissance complète des relations de cette nature permet de résoudre entièrement le problème de l'intégration, posé sous cette forme : étant donné un chemin continu qui part d'un point A du plan des x et qui aboutit à un point B ; étant donnée, en outre, une solution de l'équation hypergéométrique qui convienne à la région où se trouve le point A, et supposant que la variable x suive le chemin donné, déterminer la solution à laquelle on parvient au point B.

C'est par l'étude des intégrales définies de la forme

$$\int_g^h V\,du,$$

où

$$V = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

et où g, h admettent les systèmes de valeurs $0, 1$; $0, -\infty$; $1, +\infty$; $0, \frac{1}{x}$; $1, \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}, +\infty$, que M. Goursat arrive à déterminer toutes ces relations ; ces intégrales définies vérifient, comme on sait, l'équation hypergéométrique, en supposant, bien entendu, qu'elles aient un sens.

L'intégrale

$$\int_0^1 V\,du,$$

par exemple, en supposant positives les parties réelles de β et de $\gamma-\beta$; en prenant pour chemin d'intégration la portion convenable de l'axe des x réels; en choisissant zéro pour argument de u et de $1-u$, et en prenant pour argument de $1-xu$ celui qui est nul pour $x=0$ définit, comme on le voit aisément, une fonction de x qui est uniforme dans tout le plan, à condition que le chemin suivi par la variable ne coupe pas la droite $1 - +\infty$. Dans l'intérieur du cercle de rayon 1, et dont le centre est le point zéro, on obtient immédiatement, par le développement de l'intégrale en série,

$$\int_0^1 V\,du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F'(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Maintenant, les changements de variables suivants, indiqués par Jacobi,

$$u = 1 - v,$$

$$u = \frac{v}{1 - x + vx},$$

$$u = \frac{1 - v}{1 - vx}.$$

conduisent à trois autres des intégrales indiquées par M. Kummer. En résumé, la considération de cette intégrale définie conduit à la notion de l'intégrale φ_1 de l'équation hypergéométrique, uniforme dans tout le plan, sous la restriction précédemment imposée, et susceptible d'être représentée par quatre séries, convergentes dans diverses régions du plan.

L'étude des cinq autres intégrales conduit à la notion d'intégrales φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6, uniformes dans tout le plan, sauf certaines restrictions imposées au chemin décrit par la variable, et susceptibles, chacune, d'être représentée par quatre séries.

Il reste à établir les formules de passage relatives à trois quelconques; ces formules sont au nombre de deux fois vingt: les vingt premières courant dans des portions du plan situées au-dessus de l'axe des x réels; les vingt autres dans des portions situées au-dessous. Pour parvenir à ces formules, M. Goursat applique le théorème de Cauchy à l'intégrale $\int V\,du$, prise le long d'un contour simple, à l'intérieur duquel la fonction V est holomorphe, et qui est constitué par les lignes suivantes : 1° un demi-cercle de rayon R, situé au-dessus des x réels et ayant pour centre le point zéro; 2° deux demi-cercles de rayons très petits, situés au-dessus de la même droite, et dont les centres sont les points zéro et 1; 3° les portions de l'axe des x réels qui, avec les lignes précédentes, complètent un contour fermé; si l'on fait tendre vers zéro les rayons des petits demi-cercles et augmenter indéfiniment le rayon R, on parvient à l'égalité

$$\int_{-\infty}^{0} V\,du + \int_{0}^{1} V\,du + \int_{1}^{-\infty} V\,du = 0,$$

où il est bien aisé de spécifier les valeurs qu'il convient de prendre pour les arguments de u et de $1 - u$.

Si maintenant on se reporte aux expressions, sous forme d'intégrales définies, des fonctions φ, on aperçoit que la relation précédente conduit immédiatement aux formules de passage cherchées.

Tout ce qui précède suppose que des nombres γ, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ aucun n'est entier. Si l'un d'eux est entier, on n'a plus qu'une intégrale dans l'un des groupes ; on en trouve alors une autre par un procédé bien connu, qui consiste à chercher la limite pour $r = r_1$ d'une expression de la forme

$$\frac{F(x,r) - F_1(x,r)}{r - r_1},$$

où $F(x,r)$, $F_1(x,r)$ désignent deux intégrales de l'équation, qui viennent se confondre pour $r = r_1$.

M. Goursat traite divers exemples particuliers qui mettent bien en évidence le parti qu'on peut tirer de ses formules.

Une application bien digne d'être signalée est celle qu'il fait de la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale de l'équation hypergéométrique soit admise ; on sait que cette question se trouve résolue dans un beau Mémoire de M. Schwarz (*Journal de Borchardt*, t. 73, p. 292). C'est par une voie tout élémentaire que M. Goursat retrouve les résultats obtenus par M. Schwarz.

Le problème résolu par M. Goursat dans la seconde partie de son travail ne présente pas moins d'intérêt.

Les Mémoires de Gauss et de Kummer sur la série hypergéométrique contiennent un grand nombre de formules qui supposent certaines relations entre les trois premiers, et dont le type général est le suivant :

$$x^{-p}(1 - x)^{-q}\,F(\alpha.\,\beta, \gamma, x) = t^{p'}(1 - t)^{q'}\,F(\alpha', \beta', \gamma', t),$$

t étant une fonction algébrique de x; la fonction

$$x^p(1-x)^q t^{p'}(1-t)^{q'} F(\alpha', \beta', \gamma', t)$$

est alors une intégrale de l'équation

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta y = 0.$$

M. Goursat se propose de rechercher *tous* les cas où il existe de pareilles intégrales.

Se plaçant, pour cela, au point de vue de Riemann, dans un Mémoire bien connu, il considère une fonction $P(x)$ n'admettant, dans toute l'étendue du plan, que trois points critiques 0, 1, ∞; holomorphe dans toute région du plan, à contour simple ne renfermant aucun de ces points, telle que, entre trois branches quelconques de la fonction, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants, telle enfin que chaque branche reste finie pour $x=0$, $x=1$, $x=\infty$, quand on la multiplie par une puissance convenable de x ou de $1-x$; une telle fonction vérifie toujours une équation de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2(x-1)^2\frac{d^2P}{dx^2} + [l-(l+m)x]x(1-x)\frac{dP}{dx} \\ & \qquad + (Ax^2+Bx+C)P = 0; \end{aligned}\right.$$

or on passe aisément d'une telle équation à l'équation hypergéométrique. Le problème se trouve ainsi ramené au suivant :

Reconnaître pour quelles valeurs des constantes A, B, C, l, m *il existe des changements de variables* $x=\varphi(t)$ *par lesquels l'équation* (1) *ne change pas de forme,* A, B, C, l, m *étant seulement remplacés par des constantes nouvelles* A', B', C', l', m'.

Un calcul facile montre que ce problème se ramène lui-même au suivant :

Déterminer dans quels cas les équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x(1-x)}\,dx &= \frac{\sqrt{A't^2+B't+C'}}{t(1-t)}\,dt, \\ \frac{dx}{x^l(1-x)^m} &= \frac{K\,dt}{t^{l'}(1-t)^{m'}} \end{aligned}\right.$$

admettent une solution commune, les constantes A', B', C', l', m', K *étant arbitraires.*

De ces deux équations, on peut tirer une combinaison algébrique en x, t, savoir :

$$\frac{\{(2Ax+B)x(x-1)+2(Ax^2+Bx+C)[(l-1)(x-1)+(m-1)x]\}^2}{(Ax^2+Bx+C)^3}$$
$$=\frac{\{(2A't+B')t(t-1)+2(A't^2+B't+C')[(l'-1)(t-1)+(m'-1)t]\}^2}{(A't^2+B't+C')^3}.$$

Si cette relation n'est pas une identité, on voit qu'il existe entre x et t une relation qui sera au plus du sixième degré, par rapport à chacune des variables. L'auteur montre que, dans le cas où cette équation est identique, il existe une infinité de substitutions qui n'altèrent pas la forme de l'équation (1), mais que cette équation (ou l'équation hypergéométrique correspondante), s'intégrant alors par les fonctions élémentaires, exponentielles, circulaires ou logarithmiques, c'est à des relations entre des fonctions de cette nature que l'on est conduit.

Écartant ce cas particulier, M. Goursat cherche les transformations rationnelles

$$x=\frac{R}{S}$$

qui peuvent exister, R et S étant deux polynômes en t d'un degré au plus égal au sixième ; une discussion approfondie des différents cas qui peuvent se présenter montre qu'on peut se borner à considérer les quatre formes suivantes :

$$x=R^n t^r(1-t)^s,$$
$$x=R^n t^r,$$
$$x=R^n,$$
$$x=\frac{R^n}{t^r(1-t)^s}.$$

M. Goursat calcule ensuite les divers coefficients inconnus qui entrent dans ces transformations. La distinction des classes de transformation est liée à la distinction des cas où, pour $x=1$, aucune valeur de t n'est différente de 0, 1, ∞ de ceux où il en est autrement. Le premier cas fournit toutes les transformations signalées par M. Kummer, lorsque deux des trois éléments

α, β, γ sont arbitraires ; les autres cas conduisent à des transformations qui supposent deux relations entre ces trois éléments.

Toutes ces transformations rationnelles étant obtenues, l'œuvre de M. Goursat se trouve complétée par la démonstration du théorème suivant :

En combinant entre elles les transformations rationnelles que l'on peut effectuer pour les mêmes valeurs de A, B, C, l, m, on obtient de nouvelles transformations algébriques, mais non rationnelles ; on les obtient toutes de cette manière.

Il ne peut être question de reproduire ici le tableau des nombreuses transformations, des différents degrés possibles, trouvées par M. Goursat ; nous transcrirons au hasard une de ses formules, afin de faire saisir le genre d'intérêt qui s'attache aux résultats qu'il a obtenus, résultats qui complètent d'une façon si heureuse les belles découvertes de M. Kummer sur ce sujet difficile :

$$\begin{aligned}
&F\left(3\alpha, 3\alpha+\frac{1}{2}, 4\alpha+\frac{2}{3}, x\right)\\
&=(1-x)^{\frac{1}{6}-2\alpha}F\left(\alpha+\frac{1}{6}, \alpha+\frac{2}{3}, 4\alpha+\frac{2}{3}, x\right)\\
&=\left(1-\frac{9x}{8}\right)^{-2\alpha}F\left[\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{5}{6}, \frac{-27x^2(1-x)}{(9x-8)^2}\right]\\
&=\left(1-\frac{3x}{4}\right)^{-3\alpha}F\left[\alpha, \alpha+\frac{1}{3}, 2\alpha+\frac{5}{6}, \frac{-27x^2(1-x)}{(3x-4)^3}\right].
\end{aligned}$$

ROHN (K.). — DIE VERSCHIEDENEN GESTALTEN DER KUMMERSCHEN FLÄCHE (1).

Ce travail a pour objet l'étude *des rapports de réalité de la surface générale de Kummer,* et, comme appendice, *des formes des surfaces réglées du quatrième ordre à deux droites doubles,* en laissant de côté tous les autres cas spéciaux que présente la surface générale de Kummer. Pour atteindre le but proposé, nous avons développé dans ce travail trois méthodes différentes, que nous allons successivement expliquer avec quelque détail.

(1) *Mathematische Annalen,* Bd. XVIII.

I. — *Méthode de la Géométrie de la ligne.*

L'équation d'un complexe du second degré peut se ramener à la forme

$$\frac{z_1^2}{k_1-\lambda}-\frac{z_2^2}{k_2-\lambda}+\frac{z_3^2}{k_3-\lambda}-\frac{z_4^2}{k_4-\lambda}+\frac{z_2^5}{k_5-\lambda}-\frac{z_6^2}{h_6-\lambda}=0,$$

tandis qu'en même temps la relation entre les coordonnées de lignes prend la forme

$$z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^3+z_5^2-z_6^2=0.$$

Ce résultat peut toujours s'obtenir par une transformation linéaire *réelle*. Pour ramener maintenant l'identité entre les coordonnées de lignes à une somme de carrés positifs, il faut employer des transformations *imaginaires,* lesquelles fournissent les quatre *types* suivants des systèmes de coordonnées de lignes :

1. Les coordonnées 1, 3, 5 sont réelles; 2, 4, 6 sont imaginaires;

2. Les coordonnées 1, 3 sont réelles, et 2, 4 imaginaires pures, tandis que 5, 6 sont des imaginaires conjuguées;

3. La coordonnée 1 est réelle et 2 est imaginaire; au contraire, 3, 4, ainsi que 5, 6, sont imaginaires conjuguées;

4. Les coordonnées sont deux à deux imaginaires conjuguées.

Si l'on donne à trente-deux droites quelconques, dont les coordonnées diffèrent par les signes, le nom de *conjointes* (*zusammengehörig*), alors, dans le premier cas, les 32 droites seront réelles; dans le second cas, 16 seront réelles; dans le troisième et le quatrième, il n'y en aura que 8 de réelles.

Par l'étude de chacun des divers types, on parvient au résultat suivant :

La surface de Kummer ou surface des singularités du système de complexes CONFOCAL

$$\sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i-\lambda}=0,\quad \sum_1^6 x_i^2=0$$

est réelle (c'est-à-dire possède une équation à coefficients réels) *dans les cas suivants, et dans ces cas seulement : lorsque tous les k sont réels, dans le type* I; *lorsque* k_5 *et* k_6 *sont des imaginaires conjuguées, tous les autres* k *étant réels, dans le type* II; *lorsque* k_5 *et* k_6, *ainsi que* k_3 *et* k_4 *sont des imaginaires conjuguées, et* k_1 *et* k_2 *réels, dans le type* III ; *lorsque les* k *sont deux à deux des imaginaires conjuguées ou des imaginaires diamétrales* (¹), *dans le type* IV.

Après avoir reconnu ce théorème, on passe à l'étude des formes de la surface de Kummer pour chacun des types en particulier. Ces formes dépendent encore uniquement des valeurs des constantes $k_1, k_2, \ldots, k_6$.

Dans le type I, où tous les k sont réels, *on trouve encore trois surfaces différentes.* En effet, si l'on fait abstraction de la condition que les indices des k soient égaux à ceux des x correspondants, de sorte que l'équation du système de complexes confocaux se change en celle-ci :

$$\sum \frac{x_i^2}{k_\alpha - \lambda} = 0,$$

où les indices α et i parcourent, indépendamment l'un de l'autre, les valeurs $1, 2, \ldots, 6$, on pourra choisir les indices des k de telle manière que l'on ait

$$k_1 > k_2 > k_3 > k_4 > k_5 > k_6.$$

On obtient alors trois surfaces différentes, correspondantes aux trois systèmes de complexes suivantes :

$$\mathrm{I}_a \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_5-\lambda} + \frac{x_6^3}{k_6-\lambda} = 0,$$

$$\mathrm{I}_b \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_6-\lambda} + \frac{x_6^2}{k_5-\lambda} = 0,$$

$$\mathrm{I}_c \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_6-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_5-\lambda} + \frac{x_6^2}{k_3-\lambda} = 0.$$

(¹) Nous entendons par *diamétralement imaginaires* celles qui, représentées sur la sphère complexe, donnent des points diamétraux, et par suite qui sont de la forme $\rho e^{i\varphi}$ et $-\frac{1}{\rho} e^{i\varphi}$.

Toutes les autres équations que l'on peut déduire de

$$\sum \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0,$$

par l'échange des k, peuvent se ramener à l'une des trois équations I_a, I_b, I_c.

Nous allons maintenant examiner à part chacun de ces trois cas.

Dans le cas I_a, les coordonnées d'une droite dans l'espace sont déterminées par les équations

$$\rho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 6).$$

Si, des quatre paramètres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, deux deviennent égaux entre eux, la droite correspondante deviendra une tangente à la surface de Kummer. Si trois paramètres deviennent égaux entre eux, la droite deviendra une tangente principale. Si quatre paramètres sont égaux deux à deux, la droite correspondante passera par un point nodal ou dans un plan double. Or, dans le type I_a, une droite n'étant réelle que si ses coordonnées x_1, x_3, x_5 sont réelles et x_2, x_4, x_6 imaginaires pures, on pourra tirer par ce moyen des conclusions sur la réalité d'une droite de paramètres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. On trouve que *la droite est réelle lorsque ses paramètres sont deux à deux des imaginaires conjuguées, ou deux à deux compris dans le même intervalle* (¹) *des* k. A l'aide de ce théorème, on peut décider de la réalité des points de la surface de Kummer, de ses tangentes principales, ainsi que de ses points nodaux et de ses plans doubles, et en même temps de la forme générale de la surface. En poursuivant ces études, on obtient le résultat suivant :

Les six complexes 1, 2, 3, 4, 5, 6 déterminent neuf couples réels de directrices, qui peuvent être comprises dans trois tétraèdres, savoir :

12, 34, 56; 23, 45, 61; 14, 25, 36.

(¹) Nous entendons par un tel intervalle celui qui est compris entre deux k consécutifs.

La surface de Kummer I_a *possède* 16 *points nodaux réels et* 16 *plans doubles; elle se compose de huit nappes séparées. Chaque sommet du tétraèdre* 12, 34, 56 *est intérieur à une nappe de cette surface, chaque nappe étant limitée par quatre points nodaux. Il en est de même pour le tétraèdre* 23, 45, 61 ; *aux points nodaux, les quatre premières nappes nommées plus haut se rencontrent avec les quatre dernières. Chacune des huit nappes, dont est composée la surface de Kummer tout entière, est de la forme d'un tétraèdre dont les faces seraient remplacées par des segments elliptiques et les arêtes par des segments hyperboliques.*

Les segments elliptiques (au nombre de 32) sont limités chacun par trois arcs de courbes, qui se rencontrent en trois points nodaux; les segments hyperboliques (au nombre de 48) sont limités chacun par deux arcs de courbes et deux points nodaux. Sur chacun des segments hyperboliques est situé un point d'inflexion double, lequel est coupé par la directrice correspondante.

Les lignes de courbure se composent de 8 branches, situées sur 8 segments hyperboliques. Les 6 lignes de courbure singulières qui appartiennent au système des lignes de courbure, en comptant chacune pour une ligne double, sont toutes les 6 réelles.

En chaque point de la surface il y a 6 *tangentes doubles réelles.*

Dans le cas I_b, les coordonnées d'une droite de l'espace deviennent

$$\rho x_i^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)}, \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \end{cases}$$

en faisant correspondre à chaque indice i l'indice α du tableau qui se trouve au-dessous. On conclut de là qu'*une droite est réelle si un de ses paramètres est compris entre* k_4 *et* k_5, *et si les deux autres paramètres sont compris dans le même intervalle des* k, *ou s'ils sont deux imaginaires conjuguées.*

En appliquant cette remarque aux tangentes quelconques, aux tangentes principales, aux tangentes doubles, etc., on obtient l'image suivante de la surface :

La surface de Kummer I_b *ne possède ni points doubles réels ni tangentes doubles réelles. Elle se compose de deux nappes,* *qui ont partout une courbure hyperbolique, et qui peuvent se contenir l'une l'autre, ou être extérieures l'une à l'autre.*

Les nappes sont recouvertes par deux systèmes de lignes de courbure; à chaque système appartiennent deux lignes de courbures singulières. Une telle courbe se compose de quatre branches impaires; sur chaque nappe sont situées deux de ces courbes, dont chacune se compose de huit branches impaires, savoir de quatre branches sur chaque nappe.

En chaque point il existe six tangentes doubles réelles.

Dans le cas I_c, une droite dans l'espace a pour coordonnées

$$\rho x_i^2 = \frac{(k_\alpha-\lambda_1)(k_\alpha-\lambda_2)(k_\alpha-\lambda_3)(k_\alpha-\lambda_4)}{f'(k_\alpha)}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ \alpha = 1, 2, 6, 4, 5, 3. \end{cases}$$

En conséquence, *une telle droite ne peut être réelle que si ses quatre paramètres sont situés entre* k_1 *et* k_2, *entre* k_3 *et* k_4 *entre* k_5 et k_6 *et entre* k_6 et k_1. Il résulte de là immédiatement que *la surface* I_c *est entièrement imaginaire; mais elle possède encore des tangentes doubles réelles.*

Si l'on passe au type II, où k_5 et k_6 sont des imaginaires conjuguées, et si l'on range les indices des autres k de manière à satisfaire aux inégalités $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$, on trouve que tous les cas possibles peuvent se réduire aux deux suivants :

$$\mathrm{II}_a \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_5-\lambda} + \frac{x_6^2}{k_6-\lambda} = 0,$$

$$\mathrm{II}_b \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_5-\lambda} + \frac{x_6^2}{k_6-\lambda} = 0.$$

L'étude de ces deux cas se fait de la même manière que celle de I_a et I_b; il faut seulement avoir toujours égard à ce que, sur 32 éléments correspondants entre eux (droites, tangentes ou points de la surface), il n'y en a que les $\frac{7}{16}$ qui soient réels.

Par l'examen du cas II_a, on voit qu'*une droite ne peut être réelle que si ses paramètres sont des imaginaires conjuguées deux à deux, ou si ils sont compris deux à deux dans le même intervalle entre les* k (ces intervalles étant ici limités seulement par les quatre k réels).

Le développement ultérieur de cette remarque, joint au théorème que, de 32 éléments correspondants entre eux, la moitié seulement sont toujours réels, conduit à la forme suivante :

La surface II_a *possède huit points nodaux réels et huit plans doubles; elle se compose de quatre nappes, qui se décomposent en deux groupes. Les nappes de l'un des groupes confinent dans les points nodaux à celles de l'autre groupe; les premières sont coupées par les directrices* 12 *et* 34, *les secondes par les directrices* 23 *et* 14, *tandis que le couple de directrices* 56 *coupe toutes les quatre nappes. Chacune des nappes a la forme d'un tétraèdre, dont deux paires d'arêtes opposées sont remplacées par des segments hyperboliques, tandis que chaque ensemble de deux faces, avec l'arête qui les sépare, est remplacé par un segment elliptique.*

Les segments elliptiques, au nombre de 8, sont limités par 4 arcs de courbe et 4 points nodaux; les segments hyperboliques, au nombre de 16, sont limités par deux points nodaux et deux arcs de courbe, et présentent chacun un point d'inflexion double. Les lignes de courbure ne sont plus formées que de quatre branches; à ces courbes n'appartiennent plus que quatre courbes singulières réelles. En chaque point de la surface, il existe encore quatre tangentes doubles réelles.

Le cas II_b se traite absolument comme le cas I_b. *Une surface* II_b, *qui ne possède aucun point nodal réel et aucun point double, se compose d'une nappe unique, présentant partout une courbure hyperbolique.*

La disposition des lignes de courbure sur cette surface est exactement la même que pour une nappe de la surface I_b. Ici encore il n'y a en chaque point que quatre tangentes doubles réelles.

Le type III est caractérisé par des valeurs imaginaires conjuguées de k_3, k_4 et de k_5, k_6. A ce type appartient une seule surface. La forme de cette surface se conclut, d'une part, de ce que sur 32 éléments correspondants, 8 sont encore réels; d'autre part, de ce qu'*une tangente ne peut être réelle que si ses deux paramètres simples sont des imaginaires conjuguées, ou s'ils sont réels, mais que* k_1 et k_2 *ne soient pas séparés*. On parvient au résultat suivant :

Il existe trois couples de directrices réelles, 12, 34, 56, *qui* *forment les arêtes d'un tétraèdre. La surface* III *se compose maintenant de deux nappes, dont chacune renferme un sommet du tétraèdre, et les sommets renfermés sont situés sur une seule et même arête* 12. *Les deux nappes se rencontrent aux quatre points nodaux, et présentent deux segments hyperboliques et un segment elliptique.* Les segments hyperboliques ont la même forme que dans I_a et II_a ; les segments elliptiques sont limités par deux contours, dont chacun se compose de deux arcs de courbe et de deux points nodaux. En un point de la surface, il n'y a plus que deux tangentes réelles.

Le type IV présente encore deux cas possibles pour les k, et par suite encore deux surfaces différentes.

Si les six k sont deux à deux des imaginaires conjuguées, on obtient alors *la surface* IV_a, *dont la forme est représentée par la surface des ondes de Fresnel. Elle se compose de deux nappes elliptiques renfermées l'une dans l'autre, qui se traversent aux quatre points nodaux réels. De là résultent, sur la nappe extérieure, quatre segments hyperboliques, qui sont chacun limités par une conique et un point nodal.*

Si les six k sont deux à deux des imaginaires diamétrales, alors *on obtient la surface* IV_b, *qui n'offre que quatre points nodaux réels et quatre plans doubles réels, et qui d'ailleurs est imaginaire.*

Dans tous les cas énumérés ici, l'auteur a aussi étudié en détail les six systèmes de tangentes doubles de la surface, et chaque fois il a indiqué si un tel système renferme des tangentes doubles à points de contact réels, s'il renferme des tangentes doubles réelles à points de contact imaginaires (isolé), et s'il renferme des tangentes doubles entièrement imaginaires.

II. — *Méthode topologique.*

Soient donnés six complexes linéaires en involution, et par suite aussi leurs congruences, leurs surfaces réglées et leurs directrices ; si l'on choisit un point arbitraire, il existera toujours une surface de Kummer ayant ce point pour point nodal, et pour laquelle ces six complexes sont les complexes fondamentaux. Car si l'on cherche tous les plans et tous les points qui correspondent à ce point en vertu des six complexes, des quinze congruences et des dix surfaces réglées, ces plans et ces points forment les 16 points nodaux et les 16 plans doubles d'une surface de Kummer, laquelle est ainsi déterminée.

Si l'on conserve maintenant les mêmes six complexes, et qu'on fasse mouvoir d'une manière continue dans l'espace un point nodal (et avec lui tous les autres), la surface de Kummer variera également d'une manière continue.

Il se produit de cette manière un nombre triplement infini de surfaces de Kummer, auxquelles appartiennent aussi, en les comptant double, les dix surfaces réglées. Ces surfaces réglées se présentent ainsi comme *cas limites* des surfaces de Kummer, et l'on peut, par un mouvement continu des points nodaux, transformer la seconde dans la première, en même temps que la forme de la surface parvient, d'une manière continue, à la forme d'une double surface réglée. La double surface réglée est composée évidemment de deux espèces de régions : d'abord de régions qui résultent d'une concentration du déplacement d'ensemble de points *réels,* et ensuite de régions résultant d'une concentration d'un déplacement d'ensemble de points imaginaires. Si l'on veut, réciproquement, passer de la surface réglée à la surface générale de Kummer, il faut partager la région de première espèce en deux feuilles *réelles* et négliger (considérer comme imaginaire) la région de seconde espèce. Les régions de l'une des espèces sont séparées par des courbes des régions de l'autre espèce, et les deux feuilles qui résultent d'une des régions doivent se rattacher entre elles le long de cette délimitation.

Ainsi tout revient à trouver cette délimitation. Le cas limite de la surface réglée se présente lorsqu'on fait mouvoir un point nodal, et par suite aussi tous les autres sur une des dix surfaces réglées. Les seize points nodaux se présentent ici comme points d'intersection de quatre génératrices d'une série de la surface réglée avec quatre génératrices de l'autre série, tandis que les seize plans doubles contiennent chacun une génératrice de chaque série. Comme maintenant la surface de Kummer ne peut en aucun point être située des deux côtés par rapport à un plan double, on voit que *ces huit génératrices elles-mêmes séparent les régions des génératrices d'une espèce de celles des génératrices de l'autre espèce.*

Nous obtiendrons maintenant toutes les formes de la surface en examinant tous les cas possibles qui peuvent se présenter ici. On ne peut, en effet, oublier aucune forme, puisqu'il y a toujours des surfaces limites *réelles,* et que la surface générale peut toujours être amenée *d'une manière continue* à la position limite.

Dans le type I nous distinguerons trois cas. La surface limite est ici un hyperboloïde, et il peut se faire ou que les huit génératrices (qui séparent les régions d'espèce différente) soient toutes réelles, ou que les quatre génératrices d'une série soient réelles et celles de l'autre série imaginaires, ou enfin que les huit génératrices soient toutes imaginaires.

Dans le premier cas, l'hyperboloïde est partagé en seize régions quadrangulaires; dans le second cas, en quatre bandes infinies; dans le troisième cas, il reste intact. Dans le premier cas, on a à recouvrir huit régions de l'hyperboloïde à deux nappes, non adjacentes les unes aux autres, et l'on obtient ainsi le cas limite de la surface I_a, et en même temps une bonne image de la surface générale. Dans le second cas, il faut recouvrir doublement deux bandes non contiguës, et l'on obtient la surface I_b à deux nappes extérieures l'une à l'autre. Dans le troisième cas, où l'hyperboloïde entier se compose d'une seule région, on devra recouvrir doublement l'hyperboloïde, ou ne pas le recouvrir du tout, selon qu'on le considérera comme une région de l'une ou de l'autre espèce. Ainsi l'on obtiendra la surface I_b, composée de deux nappes l'une à l'intérieur de l'autre, ou la surface imaginaire I_c.

Le type II, où les surfaces limites sont encore des hyperboloïdes, admet encore deux cas. Parmi les génératrices de l'une des séries, deux doivent toujours être réelles et deux imaginaires, tandis que les génératrices de l'autre série doivent être ou toutes réelles ou toutes imaginaires. Dans le premier cas, où il faut recouvrir doublement quatre régions non contiguës, apparaît la surface II_a; dans le second cas, où il faut recouvrir une bande infinie, on obtient la surface II_b.

Dans le type III aussi les surfaces-limites sont des hyperboloïdes, et ici, sur quatre génératrices de chaque série, il y en a nécessairement deux réelles et deux imaginaires. On trouve de cette manière, sur l'hyperboloïde, quatre régions dont deux doivent être doublement recouvertes, et donnent naissance à la surface III.

Le type IV, enfin, a pour surfaces-limites des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à deux nappes. Par conséquent les quatre génératrices de l'une des séries devront être les imaginaires conjuguées de celles de l'autre série, ce qui détermine sur la surface-limite quatre points réels. Maintenant, suivant que l'ellipsoïde (ou l'hyperboloïde à deux nappes) sera doublement recouvert ou ne le sera pas du tout, on obtiendra la surface IV_a ou les surfaces IV_b. La première se compose de deux ellipsoïdes renfermés l'un dans l'autre, et qui se touchent aux quatre points en question; la seconde a ces quatre points comme points nodaux, et elle est, d'ailleurs, entièrement imaginaire.

III. — *Représentation analytique en coordonnées de points.*

Notre point de départ sera ici la surface à 16 points nodaux réels, de l'équation de laquelle on peut déduire les équations de toutes les autres *par des transformations réelles ou imaginaires.*

Les coordonnées de lignes, dans le type I, sont de la forme

$$\begin{aligned}
x_1 &= (p_{12}+p_{34}) = (w_1x_2 - x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2),\\
x_2 &= \frac{1}{i}(p_{12}-p_{34}) = \frac{1}{i}(w_1x_2 - x_1w_2 - y_1z_2 + z_1y_2),\\
x_3 &= (p_{13}+p_{42}) = (w_1y_2 - y_1w_2 + z_1x_2 - x_1z_2),\\
x_4 &= \frac{1}{i}(p_{13}-p_{42}) = \frac{1}{i}(w_1y_2 - y_1w_2 - z_1x_2 + x_1z_2),\\
x_5 &= (p_{14}+p_{23}) = (w_1z_2 - z_1w_2 + x_1y_2 - y_1x_2),\\
x_6 &= \frac{1}{i}(p_{14}-p_{23}) = \frac{1}{i}(w_1z_2 - z_1w_2 - x_1y_2 + y_1x_2).
\end{aligned}$$

De là résultent, pour les surfaces réglées du second degré, les équations

123, 456	$2(wy - xz) = 0$,
124, 356	$2(wy + xz) = 0$,
126, 345	$2(wz - xy) = 0$,
125, 346	$2(wz + xy) = 0$,
156, 234	$2(wx - yz) = 0$,
134, 256	$2(wx + yz) = 0$,

135, 246...... $(w^2+x^2+y^2+z^2=0,$

136, 245...... $(w^2-x^2-y^2+z^2=0,$

145, 236...... $(w^2-x^2+y^2-z^2=0,$

146, 235...... $(w^2+x^2-y^2-z^2=0.$

L'équation de la surface à seize points nodaux réels est, comme on sait,

$$\left.\begin{aligned} & w^4+x^4+y^4+z^4 \\ & \quad +2\,\frac{w_0x_0y_0z_0\Pi_{\varepsilon,\varepsilon'}(w_0^2+\varepsilon x_0^2+\varepsilon' y_0^2+\varepsilon\varepsilon' z_0^2)\,wxyz}{(w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2)(w_0^2y_0^2-x_0^2z_0^2)(w_0^2z_0^2-x_0^2y_0^2)} \\ & \quad -\frac{w_0^4+x_0^4-y_0^4-z_0^4}{w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2}(w^2x^2+y^2z^2) \\ & \quad -\frac{w_0^4+y_0^4-x_0^4-z_0^4}{w_0^2y_0^2-x_0^2z_0^2}(w^2y^2+x^2z^2) \\ & \quad -\frac{w_0^4+z_0^4-x_0^4-y_0^4}{w_0^2z_0^2-x_0^2y_0^2}(w^2z^2-x^2y^2), \end{aligned}\right\} = 0,$$

en supposant $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$.

Si l'on fait maintenant la substitution $w'=w$, $x'=ix$, $y'=iy$, $z'=z$, alors les six complexes linéaires $x_1=0$, $x_2=0, \ldots, x_6=0$ resteront sans altération dans leur ensemble, à l'échange près entre $x_5=0$ et $x_6=0$. De même, les dix surfaces du second degré n'éprouvent aucun changement. *La surface de Kummer* I_a *doit donc, dans la substitution en question, se changer en une autre surface du type* I. On voit maintenant, de plus, que les points nodaux de la nouvelle surface sont imaginaires, que cette substitution transforme la surface I_a dans la surface I_b ou I_c, et l'on obtient ainsi l'une ou l'autre de ces dernières, suivant que l'on a

$$w_0^4+z_0^4-x_0^4-y_0^4 > 2w_0z_0^2-x_0^2y_0^2,$$

ou non, comme les recherches de l'auteur le font voir.

Pour transformer les six complexes linéaires du type I dans ceux du type II, on peut se servir de la transformation

$$w=jw', \quad x=x', \quad y=y', \quad z=jz',$$

où $j=\sqrt{i}$, parce que les complexes $x_5=0$ et $x_6=0$ se changent alors en des complexes imaginaires conjugués, tandis que les autres complexes restent réels. La même transformation change naturellement aussi les dix surfaces du second degré du type I dans les surfaces correspondantes du type II, et la surface de Kummer I_a en une surface du type II. Cette surface, il est vrai, est encore entièrement imaginaire, puisque son équation acquiert des coefficients imaginaires. Mais si l'on pose, en même temps que les équations

$$w = jw', \quad x = x_1, \quad y = y', \quad z = jz',$$

celles-ci :

$$w_0 = jw'_0, \quad x_0 = x'_0, \quad y_0 = y'_0, \quad z_0 = jz'_0,$$

la surface transformée deviendra réelle. Cette surface, possédant huit points nodaux réels, est par suite identique avec II_a. Par la nouvelle substitution $w = w'$, $x = ix'$, $y = y'$, $z = iz'$, II_a se change en II_b.

Les six complexes linéaires du type III se déduisent des complexes correspondants du type I par la substitution

$$w = iw', \quad x = x', \quad y = jy', \quad z = jz'.$$

En posant, de plus,

$$w_0 = iw'_0, \quad x_0 = x'_0, \quad y_0 = jy'_0, \quad z_0 = jz'_0,$$

l'équation de la surface I_a se change dans l'équation de la surface III.

En appliquant la substitution

$$w = iw', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z',$$

les complexes du type I se changent dans les complexes conjugués deux à deux du type IV. Par la même substitution, la surface I_a se change en une surface du type IV, dont l'équation contient encore des coefficients imaginaires, Mais si, dans l'équation de la surface I_a, on substitue iw et iw_0 à la place de w et de w_0, l'équation deviendra réelle et représentera ou la surface IV_a ou la surface IV_b suivant que le produit

$$\begin{aligned}(-w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(w_0^2 - x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)\\ \times (w_0^2 + x_0^2 - y_0^2 + z_0^2)(w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - z_0^2)\end{aligned}$$

sera négatif ou positif, comme on le voit en développant les calculs.

SURFACES RÉGLÉES.

Dans le deuxième et le troisième paragraphe de ce travail, l'auteur traite encore en peu de mots les surfaces réglées du quatrième ordre à deux droites doubles, comme cas particuliers de la surface de Kummer. Ces surfaces s'obtiennent en faisant coïncider les points nodaux de la surface de Kummer deux à deux sur les directrices. On fait voir qu'*il existe encore un nombre simplement infini de surfaces réglées ayant les mêmes huit points cuspidaux; que d'ailleurs les points cuspidaux ne sont pas entièrement arbitraires, mais que leur rapport anharmonique doit être toujours le même sur les deux droites doubles.*

Quant à la forme de ces surfaces développables, on distinguera les cas suivants :

1. La surface réglée à droite double réelle et à huit points cuspidaux réels. Son équation est

$$(w^2y^2+x^2z^2)(c^2y_0^2-z_0^2) \\ +(w^2z^2+x^2y^2)(y_0^2-c^2z_0^2)+2wxyz\,\frac{c(y_0^4-z_0^4)}{y_0z_0}=0.$$

La surface se compose de deux nappes, qui se traversent ellesmêmes suivant la droite double.

2. Les deux surfaces réglées à droite double réelle et à points cuspidaux imaginaires. Leur équation se tire de la précédente par la substitution

$$w'=w,\quad x'=ix,\quad y'=iy,\quad z'=z.$$

L'une de ces deux surfaces se compose de deux nappes, qui se traversent mutuellement suivant la droite double; l'autre, en dehors de la droite double, ne possède aucun point réel. Suivant que $c^2(y_0^4+z_0^4)$ est ou non plus grand que $(c^4+1)y_0^2z_0^2$, on se trouve dans le premier cas ou dans le second.

3. La surface réglée à deux droites doubles, ayant seulement quatre points cuspidaux réels (situés deux à deux sur chaque droite). Son équation se déduit de la précédente par les substitutions

$$w = w', \quad x = jx', \quad y = jy', \quad z = z', \quad \text{et} \quad y_0 = jy'_0, \quad c = jc'.$$

Elle se compose d'une seule nappe qui se traverse elle-même suivant la droite double.

4. Les deux surfaces réglées à droites doubles conjuguées imaginaires. Leur équation est

$$\begin{aligned} 0 = {} & (w^2 + x^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 \\ & + 2(wy - xz)^2 \frac{cx_0^3 - y_0^3}{x_0 y_0 (c y_0 - x_0)} - 2(wz + xy)^3 \frac{cx_0^3 + y_0^3}{x_0 y_0 (c y_0 + x_0)}. \end{aligned}$$

Si l'on a

$$2x_0 y_0 (c y_0 + x_0) > (x_0^2 - y_0^2)(c x_0 - y_0),$$

la surface aura deux nappes réelles, qui peuvent être intérieures ou extérieures l'une à l'autre; mais, si cette inégalité n'a pas lieu, la surface sera imaginaire.

5. La surface réglée à droite double imaginaire conjuguée, et à *une seule* nappe réelle. Son équation se déduit de la précédente par la substitution

$$w = jw', \quad x = jx', \quad \text{et} \quad c = jc', \quad x_0 = jx_0.$$

6. La surface réglée à deux droites doubles réelles, ayant quatre points cuspidaux réels sur l'une de ces droites, et quatre autres imaginaires sur l'autre droite. Son équation se déduit de celle de la surface réglée à huit points cuspidaux réels, au moyen des substitutions $z = iz'$ et $z_0 = iz'_0$. Cette surface réglée se compose de deux nappes, dont chacune se traverse elle-même le long de l'une des droites doubles, tandis que les deux nappes se traversent mutuellement suivant l'autre droite double. Nous l'avons passée inaperçue dans notre Mémoire des *Mathem. Annalen*.

Il existe donc en totalité huit surfaces réglées différentes.

ROHN.