Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 321-336

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_321_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LUCAS (ÉDOUARD). — RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES. — Paris, Gauthier-Villars, 1882. In-8°.

Le Livre que nous annonçons est le tome premier d'une œuvre que l'auteur, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, a l'intention de publier rapidement. Ce Volume se rapporte spécialement à l'Arithmétique supérieure et à cette branche de la Géométrie qu'on appelle *Géométrie de situation*. A en juger par ce travail, il n'y a pas grand mérite à prédire que l'Ouvrage sera pour notre siècle, avec plus d'originalité, ce que les *Problèmes plaisans et délectables* de Bachet et les *Récréations mathématiques* d'Ozanam ont été pour nos ancêtres : le Livre classique par excellence.

Après une Préface verveuse, que nous recommandons aux lecteurs qui auraient le malheur d'être sceptiques à l'égard des *Récréations mathématiques,* l'auteur consacre une brillante introduction à l'historique de la Géométrie de situation; il en poursuit les traces dans Leibniz, Euler, Vandermonde, etc., et remonte jusqu'aux Indiens pour les carrés magiques. Il signale les applications de la nouvelle Géométrie au tissage; il fait un rapprochement très imprévu entre la méthode de construction d'une espèce de carrés magiques qu'il vient de découvrir : les *carrés diaboliques,* et la manière de construire l'armure des satins réguliers, indiquée par lui en 1867. Enfin, dans le passage suivant, il a le double mérite de montrer le lien des diverses parties de son travail et de donner une lumineuse philosophie de ses jeux : « Les jeux des traversées, des ponts, des labyrinthes ne reposent que sur la théorie des nombres pairs et impairs, c'est-à-dire sur les congruences de module 2; le jeu du solitaire s'appuie sur les congruences des modules 2 et 3; le jeu du taquin sur celles des modules 2, 4, 8; le jeu du baguenaudier sur la numération binaire, ou, en d'autres termes, sur les congruences ayant pour modules toutes les puissances de 2; enfin le problème des reines, les carrés magiques, le tissage, sur les congruences de module quelconque. Ainsi, c'est toujours la théorie des congruences, mais habillée de vêtements aussi divers et aussi élégants que possible. »

La première récréation, intitulée le JEU DES TRAVERSÉES EN BATEAU, est le développement de ce vieux problème : *Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière et rencontrent un bateau sans batelier; ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter plus de deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.* — Tartaglia (¹) s'était proposé de résoudre la difficulté pour quatre ménages; mais il s'est trompé : la chose est impossible. Bachet le remarqua. Depuis, M. Labosne a généralisé le problème, mais sa solution laissait à désirer pour l'élégance. M. Lucas donne un premier essai plus simple; puis, dans une Note à la fin du Volume, une autre généralisation, qui est due à M. Delannoy.

La seconde récréation, le JEU DES PONTS ET DES ÎLES, est la traduction d'un Mémoire d'Euler sur le *Problème des ponts de Königsberg;* en voici l'énoncé : *Quelle que soit la forme d'un fleuve, sa distribution en bras, par des îles en nombre quelconque, et quel que soit le nombre de ponts jetés sur le fleuve, trouver si l'on peut franchir celui-ci en passant une fois, et une seule, sur chacun des ponts.* Cela revient, au point de vue géométrique, à ceci : On donne une figure quelconque réunie par des droites et des courbes, quel est le nombre minimum des traits continus, sans arrêt ni répétition, nécessaires à son tracé complet? Cette question, très importante dans la théorie des courbes unicursales, est traitée dans la Note II placée à la fin du Volume.

Le JEU DES LABYRINTHES, qui fait l'objet de la troisième récréation, est la réalisation du jeu suivant : Choisissez arbitrairement,

---

(¹) Mort en 1557 et non en 1559, comme le dit M. Lucas; c'est à M. le prince Boncompagni qu'on doit cette importante rectification (*Testamento inedito di Nicolo Tartaglia,* dans la collection de Mémoires mathématiques, publiée en souvenir du Père Chelini).

sur une feuille de papier blanc, un nombre quelconque de points; joignez-les deux à deux, et autant de fois que vous voudrez, par un nombre quelconque de lignes, droites ou courbes, de telle sorte qu'aucun point du système ne reste isolé des autres; vous aurez ainsi un réseau géométrique. Recouvrez-le d'une feuille de carton opaque, de manière à ne pas conserver le souvenir du plan du labyrinthe; cette feuille de carton est percée d'un *oculaire*, qui permet seulement d'apercevoir une petite fraction du réseau. Déplacez le carton ou l'*écran*, de telle sorte que l'oculaire se trouve placé sur un carrefour A. Il s'agit de lui faire parcourir deux fois toutes les lignes du réseau, d'une manière continue, et de revenir ensuite au point de départ A. Pour conserver le souvenir du passage de l'oculaire sur chacun des chemins qu'il parcourt, on trace sur chaque ligné suivie un petit trait transversal, à l'entrée et à la sortie des carrefours. Par conséquent, les deux extrémités de chaque chemin devront, après les pérégrinations du voyage, avoir été marquées deux fois, mais non davantage.

Ce problème est évidemment un cas particulier du problème précédent. Lorsque tous les points d'un réseau sont pairs, le réseau peut être décrit d'un seul trait; il en est de même si l'on double un tracé quelconque, puisque les points impairs deviennent pairs. Il y a cependant entre ce problème et le précédent la différence que, dans le cas présent, on peut décrire la figure sans la voir entièrement.

La quatrième récréation est consacrée au Problème des huit reines, dans le jeu des échecs. Il s'agit, comme on sait, de disposer sur l'échiquier huit reines, de façon que deux quelconques d'entre elles ne soient jamais situées sur une même ligne parallèle à l'un des bords ou à l'une des diagonales de l'échiquier. Après un historique très curieux de l'exposé de divers procédés, nous arrivons à la véritable méthode, celle de M. Laquière : elle consiste à écrire successivement tous les nombres sur un échiquier, comme dans un système de numération, et à déduire les diverses solutions des premières par la rotation ou le renversement de l'échiquier. Grâce à ce procédé, M. Laquière a pu faire effectuer par un enfant, dans une après-midi, le tableau des 92 solutions sur l'échiquier de 64 cases. Lorsque le nombre des cases devient très grand, le problème devient impossible. On doit alors se borner aux solutions en quinconces : M. Lucas donne des théorèmes qui permettent de résoudre en ce cas la question.

La cinquième récréation sur le Jeu du solitaire présente, après quelques exercices simples, une remarquable exposition des travaux du Dr Reiss et du capitaine Hermary sur la théorie des impossibilités de ce jeu : cette théorie n'est au fond que celle des résidus d'un système de trois nombres entiers x, y, z suivant le module 3 ; x et y désignant les coordonnées de la case du solitaire, et z le nombre de boules qui se trouvent sur cette case. La récréation se termine par une étude du solitaire de 33 cases, traduite du Dr Reiss, et par des théorèmes de M. Hermary sur les solitaires du $n^{\text{ième}}$ ordre, c'est-à-dire sur les solitaires dans lesquels la règle du coup est de faire franchir à une boule n cases consécutives et d'enlever une boule dans chacune des cases franchies.

La sixième récréation sur la Numération binaire est un élégant exposé des usages et des propriétés de ce système peu étudié : à propos de la théorie des nombres parfaits, l'auteur donne, dans la Note IV placée à la fin du Volume, d'importants renseignements, sur des formules par lesquelles il a pu décomposer un nombre de plus de 200 chiffres en 56 facteurs premiers.

La septième récréation sur le Jeu du baguenaudier offre un intéressant exemple de l'importance des notations en Mathématiques ; il est curieux de voir combien le problème général du baguenaudier est simplifié par l'ingénieuse notation de M. Gros. Tout récemment, M. Badoureau a publié (*Revue scientifique*, 8 octobre 1881) une étude sur les réussites au jeu de cartes. La théorie de l'une d'elles, toujours possible quel que soit le nombre des cartes, revient au fond à celle du baguenaudier.

La huitième récréation clôt dignement cette première série : c'est une étude de près de cinquante pages sur *le Taquin*. On y trouve, non pas seulement la généralisation du taquin bien connu, c'est-à-dire le taquin rectangulaire à dimension quelconque, mais l'auteur étudie un système continu de cases carrées juxtaposées, et de telle forme qu'on voudra : c'est le *Taquin continental.* Puis vient le *Taquin complet,* où il s'agit de choisir le cube à enlever de telle sorte que l'on puisse, en suivant la marche ordinaire, arriver à une position finale convenue. La solution de ce problème repose sur la théorie des écarts, de même que la solution des précédents s'appuie sur la théorie des inversions et des permutations.

Chaque récréation est précédée d'un petit historique que relèvent souvent de piquants détails. Le Livre est suivi d'une liste complète de tous les Ouvrages publiés sur la matière : Brochures, Mémoires, Lettres, etc. Enfin le Volume sort, luxueusement imprimé, avec titre en deux couleurs, fleurons, culs-de-lampe, frontispices, etc., des presses de M. Gauthier-Villars ; nous n'en dirons pas davantage. L'auteur, qui s'entend en épigraphes, et l'éditeur semblent avoir pris pour devise certain précepte d'Horace : *Mêler l'utile à l'agréable;* ils y ont réussi à chaque page.

C. Henry.

GULDBERG (C.-M.) et MOHN (H.). — Étude sur les mouvements de l'atmosphère, IIe Partie. Programme de l'Université, à Christiania, pour le 2e semestre 1880 (en français), 53 pages.

Les auteurs présentent les équations générales hydrodynamiques en y introduisant la force centrifuge composée produite par la rotation de la Terre et les composantes du frottement. Il est évident que le frottement intérieur a lieu pendant les courants d'air et qu'il a sa valeur maximum à la surface de la Terre. Quant aux courants d'air horizontaux, la vitesse du vent croît avec la hauteur jusqu'à un maximum et en même temps l'angle entre le vent et l'isobare diminue.

Regardons un cyclone, c'est-à-dire un système de vents aux isobares circulaires autour d'un minimum barométrique à la surface de la Terre; aux couches supérieures il a un maximum barométrique. L'air afflue suivant la surface de la Terre de tous côtés et les courants horizontaux se transforment peu à peu en courants verticaux ascendants. A une certaine hauteur le mouvement vertical se transforme en un mouvement horizontal et l'air sort d'un maximum aux couches supérieures. On n'a pas encore réussi à représenter un tel système par des formules mathématiques; mais, en divisant le système en des parties diverses, on peut établir des équations qui montrent des analogies avec les systèmes de la nature.

S. L.

B. BONCOMPAGNI. — TESTAMENTO INEDITO DI NICOLO TARTAGLIA. — Napoli-Milano-Pisa, Ulrico Hœpli, 1881. In-8° de 50 pages et fac-similé.

Extrait de la collection qu'une société d'éminents géomètres vient de faire paraître en l'honneur de la mémoire du Père D. Chelini; ce travail n'est pas un des moindres joyaux de cette jolie publication. On y trouve, publié pour la première fois en texte imprimé et en fac-simile, le testament de Nicolas Tartaglia, conservé aux archives des notaires de Venise. M. le prince Boncompagni vient de donner là un excellent exemple, qu'il est désirable de voir suivi bien vite et généralisé par les érudits mathématiciens; on sait combien les archives de notaires apportent chaque jour de documents de premier ordre à l'histoire littéraire et à l'histoire de l'art.

L'original de ce testament présente deux feuillets : le premier, au recto et au verso, est occupé par le document même; sur le verso du second feuillet se trouve une note, d'où il résulte que le grand géomètre de Brescia est mort du lundi 13 au mardi 14 décembre 1557. La date de cette mort n'avait jamais été précisée et même avait été inexactement fixée par divers historiens et bibliographes célèbres, Libri, Poggendorff, Hankel, Terquem, etc. C'est donc une acquisition précieuse pour la biographie.

La question d'origine élucidée, le savant éditeur étudie l'authenticité de son document : d'abord il le trouve indiqué dans divers catalogues, puis copié sur un registre spécial avec quelques variantes par le notaire érudit Rocco de Benedetti : il a soin de publier cette copie immédiatement après la reproduction de l'original. Passant ensuite à l'étude du testament, il en rapproche diverses particularités d'emprunts judicieux faits aux œuvres de Tartaglia ou à d'autres sources : il précise le prénom du père de Tartaglia, l'existence d'un frère aîné, d'une sœur cadette, le vrai nom de Tartaglia, qui était Fontana, et qui a été changé par suite des horribles circonstances que l'on sait, l'habitation du célèbre géomètre lors de la rédaction de l'acte; il identifie deux libraires, cités dans le testament, avec les célèbres éditeurs de Tartaglia: Troiano et Giordano Ziletti; enfin il signale, à la Bibliothèque du Musée Correr de Venise, une pièce qui confirme l'existence du testament et ses principales données.

Ce travail, si remarquablement consciencieux, se termine par une intéressante liste des pièces précieuses exposées dans la vitrine qui renferme le testament de Tartaglia. C. H.

ROHN (K.). — LINEARE UND QUADRATISCHE TRANSFORMATION DER HYPERELLIPTISCHEN FUNCTIONEN $p = 2$, SOWIE IHRE BEDEUTUNG FÜR DIE KUMMERSCHE FLÄCHE (1).

Ce travail a pour but d'approfondir l'étude de la dépendance entre les fonctions hyperelliptiques et la surface de Kummer. L'objet final du Mémoire est spécialement d'élucider les relations mutuelles entre les diverses méthodes au moyen desquelles la surface de Kummer a été rattachée aux fonctions hyperelliptiques. La première méthode est due à Cayley, la seconde à Borchardt; elles se trouvent l'une et l'autre dans le tome 83 du *Journal de Crelle*. Une troisième méthode est développée dans le présent Mémoire. Les trois méthodes ont entre elles une relation très simple, consistant en ce qu'elles résultent toutes d'une transformation quadratique.

Pour atteindre le but que nous nous proposons, il est nécessaire, avant tout, d'étudier la transformation linéaire et quadratique en elle-même, et d'obtenir des formules aussi simples et aussi commodes que possible, qui permettent de bien saisir l'importance des transformations pour les fonctions ϑ. Tel est le contenu de la première Partie.

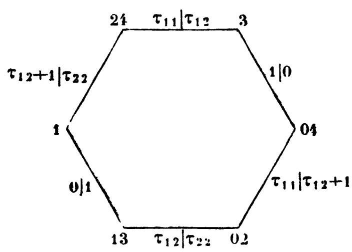
Par une *transformation linéaire*, toute fonction ϑ, abstraction faite peut-être d'une racine huitième de l'unité, se change en une autre fonction ϑ, tandis que les six ϑ impairs s'échangent entre

(1) *Mathematische Annalen*, t. XV, p. 315-354.

eux, ainsi que les dix ϑ pairs. En même temps, les relations qui ont lieu entre les ϑ se changent, dans chaque transformation, en d'autres relations entre les ϑ'. Pour décider maintenant en quelles fonctions ϑ' du système transformé se changent les fonctions ϑ du système donné, il faut établir la correspondance des périodes des deux systèmes.

On voit maintenant immédiatement que toutes les transformations qui diffèrent uniquement par le module de deux périodes entraînent la même correspondance entre les fonctions ϑ et ϑ', et qu'un changement dans les périodes doubles n'a d'influence que sur les coefficients composés avec les racines huitièmes de l'unité.

Tout le système doublement infini des périodes se réduit maintenant, mod. 2 périodes, *à quinze valeurs de périodes, qui*



naturellement peuvent se représenter par les quinze lignes de jonction de six points. Si l'on marque, en effet, six points (par exemple, aux sommets d'un hexagone régulier), et qu'on leur attribue les mêmes indices que ceux des six ϑ impairs : ϑ_{24}, ϑ_3, ϑ_{04}, ϑ_{02}, ϑ_{13}, ϑ_1, on pourra faire correspondre les quinze lignes de jonction aux quinze périodes de la manière suivante : en augmentant les arguments des ϑ impairs d'une demi-période quelconque, deux de ces fonctions se changeront toujours l'une dans l'autre. Elles sont représentées sur la figure par deux points portant les mêmes indices que ces fonctions; la ligne de jonction de ces deux points représentera dès lors la période *entière* correspondante; ainsi, aux lignes tracées répondent les périodes inscrites. En vertu de cette convention, la somme des valeurs des périodes, pour trois lignes contenant à elles toutes six points, sera $\equiv 0$(mod. 2 périodes; de même, la somme des périodes d'une figure fermée $\equiv 0$(mod. 2 pér.); de telle sorte que l'on obtiendra immédiatement, pour toutes les lignes de jonction, les valeurs des périodes correspondantes.

Dans une transformation linéaire, aux quinze périodes qui sont distinctes suivant mod. 2 périodes doivent correspondre quinze périodes du nouveau système, jouissant de la même propriété, c'est-à-dire que la figure ci-dessus doit être rapportée à une seconde figure, ayant la même signification, par rapport au nouveau système d'intégrales, que la première figure par rapport au premier système d'intégrales. Cette transformation se réalise en faisant correspondre les six points de la nouvelle figure aux six points de l'ancienne figure, dans un ordre de succession tout à fait arbitraire; alors les quinze lignes de jonction de l'une et de l'autre figure se correspondent, et de même les quinze périodes de l'un et l'autre système. Il existe, d'après cela, 720 transformations linéaires, distinctes entre elles suivant mod. 2 périodes.

Pour voir encore comment se transforment les $\mathfrak{I}$ pairs, il est besoin d'une interprétation géométrique de ces fonctions dans la figure. Cette interprétation est facile à trouver. En effet, les six points peuvent se grouper de dix manières en sommets de deux triangles, et ces triangles ont la propriété que l'on parvient toujours à un $\mathfrak{I}$ *pair* en ajoutant à l'argument de la fonction $\mathfrak{I}$ impaire d'un sommet la moitié de la période représentée par le côté opposé, et de plus, tout couple de triangles conduit toujours *à une seule fonction* $\mathfrak{I}$ *paire,* de sorte que *ces dix paires de triangles représentent précisément les dix* $\mathfrak{I}$ *pairs.*

En déterminant ainsi comment doivent se correspondre les figures de deux systèmes d'intégrales, on obtient, en même temps, au moyen de cette correspondance, la coordination des périodes et des fonctions $\mathfrak{I}$ impaires et paires de ces systèmes d'intégrales. On parvient ainsi à des formules de la forme

$$\rho_\beta . \mathfrak{I}'_\alpha = \varkappa_\beta . \mathfrak{I}_\beta,$$

$\mathfrak{I}'_\alpha$ étant la fonction qui résulte de $\mathfrak{I}_\beta$ par la transformation linéaire, $\varkappa_\beta$ une racine huitième de l'unité, et ρ un facteur de proportionnalité. Pour déterminer, de plus, cette constante $\varkappa_\beta$, on s'appuie sur ce théorème, que, dans une transformation linéaire, les relations entre les $\mathfrak{I}$, et spécialement ici les *relations de Göpel,* doivent se changer en d'autres relations de même espèce. Dans le présent

Mémoire, on trouve un Tableau au moyen duquel on peut effectuer aisément le calcul des racines huitièmes de l'unité. On obtient, par exemple, la correspondance suivante :

$$\begin{array}{l}\vartheta'_5,\ \vartheta'_4,\ \vartheta'_{01},\ \vartheta'_{23};\quad \vartheta'_{12},\ \vartheta'_{03},\ \vartheta'_{02},\ \vartheta'_{13};\quad \vartheta'_{34},\ \vartheta'_3,\ \vartheta'_2,\ \vartheta'_{24};\quad \vartheta'_0,\ \vartheta'_{04},\ \vartheta'_1,\ \vartheta'_{14}.\\ \vartheta_{14},\ j\vartheta_4,\ \vartheta,\ j\vartheta_{01};\quad i\vartheta_2,\ j\vartheta_{12},\ i\vartheta_3,\ j\vartheta_{13};\quad \vartheta_5,\ j\vartheta_1,\ \vartheta_{23},\ j\vartheta_4;\quad \vartheta_{03},\ ij\vartheta_{24},\ \vartheta_{02},\ ij\vartheta_{34}.\end{array}$$

D'une telle correspondance on peut encore en déduire 31 autres par l'introduction des racines quatrièmes de l'unité. Ces transformations correspondantes ne diffèrent entre elles que suivant mod. 4 périodes; de chacune des correspondances ainsi obtenues, il en résulte encore quinze autres par des changements de signes; les transformations relatives ne diffèrent plus alors que suivant mod. 8 périodes.

Dans *la transformation quadratique,* on peut se servir, pour établir la correspondance des périodes, d'une figure tout à fait pareille à celle qui a servi dans la transformation linéaire. Marquons encore les six points des indices

$$24,\ 3,\ 04,\ 13,\ 02,\ 1;$$

tirons leurs quinze lignes de jonction, et attribuons à trois de ces lignes, contenant tous les six points, des périodes *entières,* et aux trois autres qui, avec les premières, complètent un hexagone, attribuons des *demi*-périodes. Les autres droites reçoivent alors des périodes telles que la somme des périodes de chaque figure fermée (prises avec les signes convenables) s'annule. Si l'on rapporte une telle figure à une autre dont les côtés, comme dans la transformation linéaire, représentent des périodes *entières,* on obtient la correspondance d'une transformation quadratique. Comme on le voit aisément, on peut, d'après la définition précédente, construire quinze figures différentes; elles correspondent aux quinze classes introduites par Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XL); deux transformations de même classe peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation linéaire.

On peut aussi se demander comment les fonctions Θ du système transformé peuvent s'exprimer au moyen des fonctions ϑ du système donné. La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant : *Toute transformation quadratique peut s'obtenir* *à l'aide de deux transformations linéaires et d'une transformation quadratique complètement déterminée,* qui aux périodes

$$\tau'_{11}/\tau'_{12},\quad \tau'_{12}/\tau'_{22},\quad 0/1,\quad 1/0$$

fait correspondre les périodes

$$\tau_{11}/\tau_{12},\quad \tau_{12}/\tau_{22},\quad 0/\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{2}/0.$$

De plus, on n'a besoin que d'établir le système complet de formules pour cette transformation quadratique spéciale pour en déduire, au moyen seulement de deux transformations linéaires, les formules relatives à une transformation quelconque.

Dans chacune des quinze classes de transformations quadratiques il existe un groupe de 24 transformations qui se distinguent particulièrement des autres. Désignons les six périodes qui forment les côtés d'un hexagone pour la figure du système donné, respectivement par

$$p_1,\quad p_2,\quad \ldots,\quad p_6;$$

pour la figure du système transformé, respectivement par

$$p'_1,\quad p'_2,\quad \ldots,\quad p'_6,$$

et rapportons les demi-périodes

$$\frac{p_1}{2},\quad \frac{p_3}{2},\quad \frac{p_5}{2}$$

respectivement à

$$p'_2,\quad p'_4,\quad p'_6,$$

et les périodes entières

$$p_2,\quad p_4,\quad p_6$$

respectivement à

$$p'_1,\quad p'_3,\quad p'_5;$$

on obtiendra ainsi une transformation singulière comme celle que nous avons annoncée.

Ces transformations singulières ont cette propriété, que, en les appliquant deux fois consécutivement, elles conduisent à la *bissection* des fonctions ϑ; on trouve dans le Mémoire un système de formules répondant à ce but.

Ici se termine la première Partie de ce travail, et commence la seconde Partie, qui traite de l'emploi de ces transformations dans l'étude de la surface de Kummer. Il existe *trois méthodes* pour relier la surface de Kummer avec les fonctions hyperelliptiques. La Géométrie des lignes nous fournit la *première méthode,* en faisant voir que, à chaque point de la surface de Kummer appartiennent deux paramètres, et qu'il y a toujours trente-deux points correspondants, comme possédant les mêmes paramètres. Si l'on part, en effet, d'un système confocal de complexes

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0,$$

toute droite de l'espace appartient à quatre complexes du système, tandis que quatre complexes se coupent suivant trente-deux droites correspondantes. Ces droites sont déterminées par les quatre paramètres des complexes; leurs coordonnées sont

$$\rho x_i^2 = \frac{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)(k_i - \lambda_3)(k_i - \lambda_4)}{f'(k_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Si deux paramètres deviennent égaux entre eux, les droites deviendront des tangentes à la surface de Kummer, laquelle est la surface des singularités du système de complexes confocaux. Si λ_1, λ_2 sont constants, et $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$ variables, on obtiendra trente-deux faisceaux des tangentes; aux points de contact de ces faisceaux (dont les tangentes ont toutes les deux paramètres λ_1, λ_2) on peut associer les paramètres λ_1, λ_2. Pour séparer les trente-deux points λ_1, λ_2, on formera les intégrales

$$\int_\alpha^{\lambda_1^+} dv_1'' + \int_\alpha^{\lambda_2^+} dv_1'' \Big| \int_\beta^{\lambda_1^+} dv_2'' + \int_\beta^{\lambda_2^+} dv_2'',$$

et

$$\int_\alpha^{\lambda_1^+} dv_1'' + \int_\alpha^{\lambda_2^-} dv_1'' \Big| \int_\beta^{\lambda_1^+} dv_2'' + \int_\beta^{\lambda_2^-} dv_2'',$$

où, suivant Prym (¹), v_1'' et v_2'' sont les intégrales normales de pre-

(¹) *Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen.*

mière espèce, appartenant à la forme

$$R = \sqrt{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)\ldots(k_6 - \lambda)}.$$

Les limites inférieures α, β sont ici choisies de telle sorte que l'on ait

$$\mathfrak{I}\left(\int_\alpha^\lambda dv_1 \Big/ \int_\beta^\lambda dv_2\right) = 0,$$

ainsi que Prym le fait dans le Mémoire cité.

De ces deux intégrales on tire en tout 32 valeurs distinctes suivant le module d'une période entière, et l'on peut se demander comment les valeurs de ces intégrales correspondent individuellement aux 32 points qui leur sont associés. Or les six fonctions $\mathfrak{I}$ impaires formées au moyen de ces intégrales sont proportionnelles aux quantités $\pm\sqrt{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)}$. En conséquence, on attribuera comme paramètre à chaque point les deux intégrales pour lesquelles les $\mathfrak{I}$ impairs entraînent la même combinaison de signes pour les radicaux $\pm\sqrt{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)}$ que celle qui répond aux coordonnées

$$x_i = \pm\sqrt{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)}\,\frac{k_i - \lambda}{\sqrt{f'(k_i)}}$$

des tangentes du point.

Cette détermination fait correspondre à chaque point de la surface de Kummer *un et un seul* couple de paramètres. Dans cette représentation des points par des intégrales hyperelliptiques, on obtient des résultats très simples. Les 16 points nodaux ont pour paramètres les 16 couples de périodes entières (mod. 2 périodes, de sorte que $0/0$ se présente aussi comme paramètre). Les paramètres des 16 points des coniques dans les 16 plans doubles deviennent

$$2\int_\alpha^\lambda dv''_1 \Big/ 2\int_\beta^\lambda dv''_2.$$

Pour les courbes tangentes principales singulières, on trouve

$$\int_{x_i}^\lambda dv''_1 \Big/ \int_{x_i}^\lambda dv''_2,$$

c'est-à-dire que, *pour chacune de ces courbes, s'évanouit une* *fonction ϑ impaire, ou ces fonctions, étant égalées à zéro, représentent ces courbes. Les dix fonctions ϑ impaires, égalées à zéro, donnent les dix surfaces fondamentales du second degré, c'est-à-dire leurs courbes d'intersection avec la surface de Kummer.*

Il est aisé de voir que les coordonnées d'une droite quelconque se représentent sous la forme de produits de deux ϑ impairs, dont les arguments sont formés des intégrales du système précédent. On a

$$\rho x_1 = \vartheta''_{24}(u_1+u_2)\vartheta''_{24}(u_3+u_4), \quad \rho x_2 = \frac{1}{i}\vartheta''_3(u_1+u_2)\vartheta''_3(u_3+u_4),$$

$$\rho x_3 = \vartheta''_{04}(u_1+u_2)\vartheta''_{04}(u_3+u_4), \quad \rho x_4 = \frac{1}{i}\vartheta''_{13}(u_1+u_2)\vartheta''_{13}(u_3+u_4),$$

$$\rho x_5 = \vartheta''_{02}(u_1+u_2)\vartheta''_{02}(u_3+u_4), \quad \rho x_6 = \frac{1}{i}\vartheta''_1(u_1+u_2)\vartheta''_1(u_3+u_4),$$

où l'on pose, pour abréger,

$$u_1+u_2 \,\big|\, u'_1+u'_2 = \int_\alpha^{\lambda_1} du + \int_\alpha^{\lambda_2} du \,\Big|\, \int_\beta^{\lambda_1} du' + \int_\beta^{\lambda_2} du'.$$

Les paramètres des quatre points d'intersection d'une telle droite deviennent

$$u_1+u_2+u_3+u_4, \quad u_1+u_2-u_3-u_4,$$
$$u_1-u_2+u_3+u_4, \quad u_1-u_2-u_3+u_4,$$

ce qu'on peut aisément interpréter relativement aux tangentes, aux doubles tangentes, etc. On arrive ainsi à ce résultat, que *les seize points*

$$u_1+\varepsilon u_2+\varepsilon' u_3+\varepsilon'' u_4+\varepsilon''' u_5+\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' u_6$$
$$\big|\, u'_1+\varepsilon u'_2+\varepsilon'' u'_3+\varepsilon''' u_4+\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' u'_5,$$

où $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''' = \pm 1$ *forment sur la surface donnée une* configuration de Kummer. *Ces seize points sont situés seize fois six à six dans un plan sur une conique; les plans touchent la surface de Kummer donnée, et les coniques passent par les points de contact correspondants.* En général, seize points de cette espèce forment les points nodaux d'une surface de Kummer, tangente à la surface donnée le long d'une courbe du huitième ordre.

Si l'on applique au système d'intégrales ci-dessus une *transformation quadratique,* on parvient à la deuxième méthode de représentation de la surface de Kummer au moyen des fonctions hyperelliptiques d'après Borchardt. Ce passage peut s'effectuer de quinze manières différentes, correspondant aux quinze classes de transformations quadratiques. Il y a toujours ici quatre fonctions singulières, par exemple ϑ'_5, ϑ'_{01}, ϑ'_{34}, ϑ'_2, et l'on obtient ce théorème : *Les quatre fonctions thêta,* $\vartheta'_5, \vartheta'_{01}, \vartheta'_{34}, \vartheta'_2$ *représentent les coordonnées ponctuelles du point correspondant de la surface de Kummer, rapporté à l'un des quinze tétraèdres fondamentaux; la relation de Göpel entre ces* ϑ *est l'équation de la surface.*

Les fonctions $\vartheta'_5, \vartheta'_{01}, \vartheta'_{34}, \vartheta'_2$ égalées à zéro donnent les courbes d'intersection de la surface avec les faces du tétraèdre fondamental; l'annulation de toute autre fonction thêta donne une courbe du quatrième ordre passant par huit points nodaux, le long de laquelle la surface est touchée par une surface du second ordre.

En effectuant de nouveau une *transformation quadratique* sur les fonctions ϑ', on parvient aux nouvelles fonctions ϑ'', que Cayley a rattachées à la surface de Kummer. Les thêta égalés à zéro fournissent ici les seize coniques dans les plans doubles; les seize points nodaux obtiennent par là les demi-périodes pour paramètres.

A ces trois méthodes, pour représenter la surface de Kummer au moyen de fonctions hyperelliptiques, l'auteur rattache la question des courbes le long desquelles la surface est touchée par d'autres surfaces. La surface de Kummer est enveloppée par trente faisceaux de surfaces du second degré; chaque faisceau passe par huit points nodaux. Les courbes de contact sont représentées par des équations de la forme

$$\vartheta_5\vartheta_{01} + \mu\vartheta_2\vartheta_{34} = 0, \quad \ldots$$

On en déduit aisément l'équation des surfaces enveloppantes. Outre ces surfaces du second degré, il existe encore un nombre sextuplement infini de surfaces de Kummer, tangentes à la surface donnée suivant des courbes du huitième ordre, dont l'équation est une fonction linéaire des six thêta impairs ϑ''_{24}, ϑ''_{04}, ϑ''_{02}, ϑ''_3, ϑ''_{13}, ϑ''_1.

Enfin on trouve ensuite l'équation

$$\sum_{\alpha} \pm \vartheta_\alpha\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_\alpha\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_\alpha\left(v+\frac{P}{2}\right)\vartheta_\alpha\left(v+\frac{P'}{2}\right)=0,$$

où l'on prend pour valeurs successives de α les indices

$$24,\ 3,\ 04,\ 13,\ 02,\ 1,$$

les signes des termes étant alternativement positifs et négatifs. De cette équation on peut déduire toutes les relations qui ont lieu entre les carrés de thêta et les produits de thêta, au moyen d'un choix convenable de P et de P'. ROHN.