Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Ad. Steen

Lettre adressée à M. Hermite

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 30-36

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_30_1>

LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

PAR M. AD. STEEN.

MONSIEUR,

Permettez-moi de vous présenter encore une intégration par intégrale définie, cette fois d'une équation différentielle que personne n'a encore traitée, que je sache. Quoique la méthode que j'ai employée dans ma Lettre du mois d'août m'ait paru très exceptionnelle, c'est pourtant essentiellement la même dont je me suis servi ici. Voilà pourquoi je nourris l'espoir de pouvoir l'appliquer désormais plus amplement. Elle est brièvement caractérisée ainsi : par des transformations successives, soit par exemple des différentiations ou des substitutions, on arrive à une équation intégrable, puis on remonte à l'intégration de la proposée par des intégrales multiples qu'il faut en dernier lieu changer en une intégrale définie. Quoique les transformations des deux cas traités jusqu'à ce jour produisent une équation intégrable seulement pour certaines valeurs des constantes, il en a pourtant réussi l'intégration finale pour presque toutes les valeurs de ces constantes.

Intégration d'une équation différentielle linéaire.

1. Une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad y'' + Py' + ay = 0,$$

P étant une fonction de x, a supposé constant, se change par la substitution $y' = u$ en

$$\frac{d.lu}{dx} + a\frac{\int u\,dx}{u} = -P.$$

Cela met en évidence qu'on peut intégrer la proposée dès qu'on peut former les deux parties $\frac{d.lu}{dx}$ et $a\frac{\int u\,dx}{u}$ de $-P$. Mais une telle division ne se fait que par des tentatives qui, dans la plupart des cas, ne réussissent pas.

On verra pourtant par ce qui suit que cette méthode n'est pas tout à fait stérile. Au moins on trouve facilement qu'il y a des équations différentielles tellement liées entre elles, que l'intégration de l'une s'ensuit de celle de l'autre.

Si l'on fait

$$\frac{d.lu}{dx} = z + \frac{d.lv}{dx} \quad \text{ou} \quad y' = u = \int v e^{\int z\,dx}\,dx,$$

la proposée se réduit à

$$v'' + (P + 2z)v' + [P' + z' + (P + z)z + a]v = 0,$$

qui, pour $z = -P$, revient à

$$(2) \qquad v'' - Pv' + av = 0.$$

Donc les intégrales particulières des équations (1) et (2) sont liées entre elles par les relations

$$y = v'e^{-\int P\,dx}, \quad v = y'e^{\int P\,dx}.$$

D'un autre côté, en faisant

$$P' + z' + (P + z)z = 0,$$

on trouve

$$z = \frac{dl \int e^{\int P\,dx}\,dx}{dx} - P,$$

ce qui rend à l'équation de v la forme

$$v'' + \left(2\frac{dl \int e^{\int P\,dx}\,dx}{dx} - P\right)v' + av = 0,$$

qui a l'intégrale particulière

$$v = y'\frac{dl \int e^{\int P\,dx}\,dx}{dx},$$

dépendante de celle de (1).

Par cette méthode on tire des intégrales connues de l'équation

$$y'' \pm a^2 y = 0$$

facilement celles de

$$v'' + \frac{2}{x}v' \pm a^2 v = 0,$$

puis celles de

$$v'' + \frac{4}{x}v' \pm a^2 v = 0, \quad \ldots,$$

et l'on parvient généralement à l'intégration de

$$v'' + \frac{2p}{x}v' \pm a^2 v = 0,$$

p étant un nombre positif entier.

2. Appliquons la méthode aux équations

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} & y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right)y' + cy = 0, \\ & v'' + \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right)v' + cv = \ , \end{aligned}\right.$$

pour lesquelles on a

$$y = v' x^a e^{\frac{x^2}{2b}}, \quad v = y' x^{-a} e^{-\frac{x^2}{2b}}.$$

Si l'on peut faire ici

$$\frac{d.lu}{dx} = \frac{\alpha}{x} + \frac{x}{\beta}, \quad u = x^\alpha e^{\frac{x^2}{2\beta}},$$

il faut que l'équation

$$c\int u\,dx = \left(\frac{a-\alpha}{x} + \frac{x}{b} - \frac{x}{\beta}\right)u$$

ou bien celle qui en est tirée par différentiation,

$$c = (a-\alpha)(\alpha+1)x^{-2} + (\alpha+1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\beta}\right) + \frac{a-\alpha}{\beta} + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\beta}\right)x^2,$$

soit identique; α et β sont donc déterminés par les équations

$$(a-\alpha)(\alpha+1) = 0,$$

$$(\alpha+1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\beta}\right) + \frac{a-\alpha}{\beta} = c,$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\beta}\right) = 0;$$

mais, le nombre des équations surpassant celui des inconnues, il n'est pas généralement possible d'effectuer l'intégration, quels que soient a et b.

Sans entrer dans plus de détails, il suffit ici d'indiquer les deux formes suivantes de la première équation (3), dont on peut trouver les intégrales, savoir

$$y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{cx}{2}\right)y' + cy = 0 \quad \text{avec l'intégrale} \quad y = x^2 + 2\,\frac{a-1}{c},$$

$$y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{cx}{a-1}\right)y' + cy = 0 \quad \text{»} \quad y = e^{\frac{cx^2}{2(a-1)}}.$$

Il s'ensuit pour

$$v'' + \left(\frac{a}{x} + \frac{cx}{2}\right)v' + cv = 0 \quad \text{l'intégrale} \quad v = x^{1-a}e^{\frac{cx^2}{4}},$$

$$v'' + \left(\frac{a}{x} + \frac{cx}{a-1}\right)v' + cv = 0 \quad \text{»} \quad v = \frac{x^{1-a}}{1-a}.$$

Maintenant, il y a lieu de chercher si une forme algébrique ressemblant à celle de deux de ces dernières intégrales convient à des équations plus générales des formes (3). En effet, on trouve sans difficulté les équations

$$y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{cx}{2p}\right)y' + cy = 0$$

et

$$y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{cx}{a + 2p + 1}\right)y' + cy = 0,$$

intégrées par des polynômes en x des degrés $2p$ et $a + 2p + 1$ respectivement, ou plutôt en x^2 des degrés p et $\frac{1}{2}(a + 2p + 1)$.

3. Les derniers résultats nous mettent sur une nouvelle voie qui mène à l'intégration des équations (3), car on voit que

$$u = y' = xz_1,$$

où z_1 est un polynôme en x^2 du degré $p - 1$ ou $\frac{1}{2}(a + 2p - 1)$. On a donc

$$\frac{d.lu}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{z'_1}{z_1},$$

par conséquent

$$\int u\,dx = \left(a - 1 - \frac{x^2}{b}\right)z_1 - z'_1 x,$$

qui conduit à l'équation

$$z''_1 - \left(\frac{a-2}{x} + \frac{x}{b}\right)z'_1 + \frac{bc-2}{b}z_1 = 0.$$

Or, si $bc = 2p$, p entier positif, la série suivante de substitutions

$$z'_1 = xz_2, \quad z'_2 = xz_3, \quad \ldots, \quad z'_{p-1} = xz_p$$

aboutira à l'équation

$$z''_p - \left(\frac{a-2p}{x} + \frac{cx}{2p}\right)z'_p = 0,$$

ce qui donne

$$z_p = \int x^{a-2p} e^{\frac{cx^2}{4p}}\,dx,$$

partant

$$y = \int x\,dx \int x\,dx \ldots \int x\,dx \int x^{a-2p} e^{\frac{cx^2}{4p}}\,dx.$$

Pour faciliter la transformation de cette expression, qui exige $p + 1$

intégrations, posons $x^2 = t$, de sorte qu'on ait

$$y = \frac{1}{2^{p+1}} \int^{p+1} t^{\frac{a-2p-1}{2}} e^{\frac{ct}{4p}} dt^{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}[p]} \int_k^{x^2} (x^2 - \alpha)^p \alpha^{\frac{a-2p-1}{2}} e^{\frac{c\alpha}{4p}} d\alpha.$$

On a omis le polynôme en x^2 du degré p provenant par les constantes des intégrations, parce qu'il faut déterminer k de façon que ce polynôme puissere présenter l'intégrale particulière de l'article **2**.

Mais laissons de côté ce détail et cherchons directement l'intégrale de la première des équations (3), en faisant dans l'intégrale déjà définie $2p = bc$ et en omettant son coefficient constant, c'est-à-dire supposons

$$y = \int_k^{x^2} (x^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}bc} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha.$$

Il faut donc trouver une valeur de k qui satisfasse à l'équation

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & bc(bc-2)x^2 \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-2} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha \\ & \quad + (bc - abc - cx^2) \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha \\ & \qquad + c \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha = 0. \end{aligned} \right.$$

La dernière intégrale se change facilement en

$$cx^2 \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha - c \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc+1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha,$$

dont le premier terme s'évanouit avec l'avant-dernier de l'équation (4).

Puis on a, par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} & \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc+1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha \\ & = 2b \left[(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc+1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} \right]_k^{x^2} \\ & \quad + bc(bc-2) \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-2} \alpha^{\frac{a-bc+1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha \\ & \quad - b(a-bc+1) \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha, \end{aligned}$$

dont le premier terme s'évanouit si $bc > 2$ et $k = -\infty$; le deuxième, multiplié par $-c$, se réduit avec la première de (4) à

$$bc(bc-2)\int_{-\infty}^{x^2}(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1}\alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}e^{\frac{\alpha}{2b}}d\alpha.$$

Après ces réductions, il ne reste dans l'équation (4) que cette dernière intégrale, dont le coefficient

$$bc(bc-2)+bc(1-a)+bc(a-bc+1)$$

est évidemment égal à zéro.

Donc *l'équation*

$$y''-\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{b}\right)y'+cy=0$$

a pour $bc > 2$ *l'intégrale particulière*

$$y=\int_{-\infty}^{x^2}(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc}\alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}e^{\frac{\alpha}{2b}}d\alpha,$$

et l'on en tire pour l'équation

$$v''+\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{b}\right)v'+cv=0$$

l'intégrale

$$v=y'.x^{-a}e^{-\frac{x^2}{2b}}=x^{1-a}e^{-\frac{x^2}{2b}}\int_{-\infty}^{x^2}(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1}\alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}e^{\frac{\alpha}{2b}}d\alpha.$$

Voilà, Monsieur, les choses élémentaires dont je vous importune aujourd'hui. Je ne suis pas sans espoir d'entendre quelque jour votre opinion là-dessus. Je serais assez heureux si ce petit travail vous plaisait aussi bien que le précédent.

Recevez, Monsieur, l'expression de la plus haute considération de votre confrère dévoué. AD. STEEN.