BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

R. RADAU

Travaux concernant le problème des trois corps et la théorie des perturbations

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 270-295
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_270_1>

MÉLANGES.

TRAVAUX CONCERNANT LE PROBLÈME DES TROIS CORPS ET LA THÉORIE DES PERTURBATIONS;

PAR M. R. RADAU.

La méthode de la variation des constantes, telle qu'on l'enseigne d'ordinaire, se montre hérissée d'épines dès qu'on a dépassé les premières étapes des approximations successives. Il se trouve aussi qu'elle n'assure pas toujours d'une manière suffisante l'économie du travail, de fortes variations des éléments elliptiques pouvant se compenser mutuellement et ne produire que de faibles changements des coordonnées. On a donc cherché d'autres voies, et essayé tour à tour des moyens d'intégration très divers. Au point de vue pratique, les méthodes de quadrature ont rendu de grands services, et elles n'ont pas dit leur dernier mot. Il faut ensuite citer les méthodes de Hansen, applicables aux perturbations spéciales comme aux perturbations absolues, qui commencent à se répandre aujourd'hui, et auxquelles se rattachent les récents travaux de M. Gyldén. Enfin on a tenté d'utiliser d'une manière plus directe les intégrales connues du problème des trois corps. C'est à ce sujet que je me propose d'entrer dans quelques détails. Je commencerai par rappeler brièvement les données du problème, en partant de la transformation orthogonale dont je me suis occupé plus longuement ailleurs (1).

1. On sait que, lorsque les coordonnées X, Y, Z sont remplacées par leurs différences, les équations différentielles du mouvement de trois corps perdent la forme canonique, en d'autres termes, que les accélérations ne sont plus les dérivées partielles d'une même fonction U. On peut leur rendre cette forme au moyen d'une transformation orthogonale indiquée par Jacobi, qui ne change pas la direction des axes, mais s'applique de la même façon aux coordonnées X, aux coordonnées Y et aux coordonnées Z. La manière la plus simple d'opérer cette transformation consiste à rapporter la planète principale (m) au corps central (m_0), et la planète troublante (m_1) au centre de gravité commun des corps m_0 et m (2). Lorsqu'il s'agit de la Lune, c'est la Terre qui est le corps central, et m_1 représente le Soleil.

On posera donc

$$\begin{aligned} X - X_0 &= x, \\ X_1 - X_0 &= x_1 + \frac{m}{M} x, \\ X_1 - X &= x_1 - \frac{m_0}{M} x, \end{aligned}$$

où $M = m_0 + m$, et des relations analogues serviront à trans-

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, t. V, 1868. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, mai 1869. — *Voir* aussi deux Mémoires de M. Émile Mathieu (*Journal de Mathématiques*, 1876 et 1877).

(2) D'après une remarque que je dois à M. Tisserand, Newton aurait déjà indiqué cette transformation spéciale pour Jupiter et Saturne.

former les coordonnées Y, Z. Soit encore

$$(1)\qquad M_1 = m_0 + m + m_1, \quad \mu = \frac{mm_0}{M}, \quad \mu_1 = \frac{m_1 M}{M_1};$$

les équations du mouvement prendront la forme

$$x'' = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad x''_1 = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial U}{\partial x_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La fonction des forces U dépend des trois distances planétaires r (distance de m à m_0), R (distance de m à m_1) et R_0 (distance de m_0 à m_1). En désignant par r_1 la distance de m_1 au centre de gravité de $m_0 + m$, nous aurons

$$R_0^2 = r_1^2 + \left(\frac{m}{M} r\right)^2 + \frac{2m}{M} r r_1 s,$$
$$R^2 = r_1^2 + \left(\frac{m_0}{M} r\right)^2 - 2\frac{m_0}{M} r r_1 s,$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$r r_1 s = x x_1 + y y_1 + z z_1.$$

La fonction des forces U et la fonction perturbatrice Ω ont pour expressions

$$U = \frac{m_0 m_1}{R_0} + \frac{m m_1}{R} + \frac{m m_0}{r},$$
$$\Omega = \frac{m_0 m_1}{R_0} + \frac{m m_1}{R} - \frac{m_1 M}{r_1}$$
$$= -\frac{m_1 \mu}{2 r_1}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left[1 - 3s^2 + \frac{m_0 - m}{m_0 + m}(3s - 5s^3)\frac{r}{r_1} + \ldots\right],$$

et les équations différentielles peuvent s'écrire

$$x'' + \frac{M x}{r^3} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad x''_1 + \frac{M_1 x_1}{r_1^3} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \Omega}{\partial x_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour simplifier l'écriture, je suppose ici que la constante de l'attraction $\varkappa$ est contenue dans dt, c'est-à-dire qu'on a mis partout dt^2 à la place de $\varkappa dt^2$. Les lettres accentuées représentent toujours des dérivées prises par rapport au temps.

2. En introduisant les variables $\mu x'$, $\mu y'$, $\mu z'$, et posant

$$T = \frac{1}{2}\mu(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$
$$H = T + T_1 - U,$$

où $T + T_1$ représente la force vive du système, les équations du mouvement pourraient encore s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(\mu x')}, \quad \frac{d(\mu x')}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et l'intégrale des forces vives serait $H = \text{const.}$

Soient encore

$$h = T - \frac{mm_0}{r}, \quad h_1 = T_1 - \frac{m_1 M}{r_1} \tag{2}$$

les deux fonctions qui deviennent les constantes des forces vives dans le mouvement non troublé, où

$$h = -\frac{mm_0}{2a}, \quad h_1 = -\frac{m_1 M}{2a_1},$$

en désignant par $2a$, $2a_1$ les grands axes des deux ellipses ; l'intégrale des forces vives prendra la forme

$$h + h_1 = \Omega + H. \tag{3}$$

En outre

$$\frac{dh}{dt} = x'\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z'\frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

ou bien, en regardant x, y, z comme fonctions du temps t, et x_1, y_1, z_1 comme fonctions du temps t_1,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{dh_1}{dt} = \frac{d\Omega}{dt_1}.$$

Les fonctions h, h_1 sont des constantes arbitraires, des *éléments* des orbites troublées; elles en déterminent les dimensions absolues.

Remarquons, en passant, qu'on a aussi

$$(4) \qquad \frac{1}{2}(\mu r^2)'' = 2\mathrm{T} + r\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} = 2h + \frac{mm_0}{r} + r\frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

$$(5) \qquad \frac{1}{2}(\mu r^2 + \mu_1 r_1^2)'' = \mathrm{U} + 2\mathrm{H}.$$

Si l'on désigne encore par f la vitesse aréolaire, par $\alpha\beta\gamma$ les cosinus qui en déterminent le plan (le plan de l'orbite instantanée), les trois projections de f seront

$$f\alpha = yz' - zy', \quad f\beta = zx' - xz', \quad f\gamma = xy' - yx',$$

et, en posant

$$\mu f = k, \quad \mu_1 f_1 = k_1,$$

les intégrales des aires, rapportées au plan invariable, pourront s'écrire comme il suit :

$$(6) \qquad k\alpha + k_1\alpha_1 = 0, \quad k\beta + k_1\beta_1 = 0, \quad k\gamma + k_1\gamma_1 = \mathrm{K};$$

d'où l'on voit que les deux orbites se coupent dans le plan invariable (K étant la résultante de k, k_1, si l'on considère K, k, k_1 comme des forces normales au plan fixe et aux deux orbites).

Les fonctions f, f_1, ou bien k, k_1, deviennent les constantes des aires dans le mouvement non troublé, où $f = \sqrt{\mathrm{M}p}$, $f_1 = \sqrt{\mathrm{M}_1 p_1}$, en désignant par p, p_1 les paramètres des deux ellipses. On voit que k (aussi bien que $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma$) peut jouer le rôle de constante arbitraire, d'*élément* de l'orbite troublée.

3. Comme les orbites planétaires sont approximativement planes, il est naturel d'introduire, à titre de constantes arbitraires, les deux angles qui déterminent le plan de l'orbite instantanée. Une méthode plus élégante consiste à introduire, avec Hansen, trois axes mobiles dont deux sont situés dans le plan de l'orbite, et qui dépendent de *trois* constantes arbitraires.

Hansen appelle *coordonnées idéales* des coordonnées mobiles ξ, η, ζ, déterminées de telle manière que non seulement ξ, η, ζ, mais encore ξ', η', ζ' soient les mêmes fonctions du temps et des éléments dans le mouvement troublé que dans le mouvement non troublé; en posant, par exemple,

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

on aura

$$\xi' = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$
$$o = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$

et de même pour η, ζ. Il se trouve alors que l'axe instantané de rotation du système doit toujours coïncider avec le rayon vecteur. Si nous prenons pour plan des $\xi\eta$ le plan de l'orbite instantanée, nous aurons $\zeta = o$, $\zeta' = o$, et les équations du mouvement deviennent, pour la planète considérée,

$$\xi'' = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \eta'' = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\xi^0 \eta' - \eta^0 \xi' = \frac{r^0}{r}(\xi\eta' - \eta\xi') = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial \zeta},$$

où ξ^0, η^0 sont les rotations du système autour des axes ξ, η, et r^0 sa rotation totale, qui a lieu autour du rayon vecteur. Il est entendu qu'après la différentiation on fera $\zeta = o$.

Soit encore u la longitude dans l'orbite, comptée à partir de l'axe des ξ; on aura

$$\xi = r\cos u, \quad \eta = r\sin u,$$

et r, u seront, comme ξ, η, des coordonnées idéales, c'est-à-dire qu'on aura

$$\delta r = o, \quad \delta u = o, \quad \delta\xi = o, \quad \delta\eta = o,$$

comme on a $\delta x = o$, $\delta y = o$, $\delta z = o$, en indiquant par le symbole δ la différentiation par rapport aux constantes arbitraires qui figurent dans l'expression des coordonnées, lorsqu'on introduit les éléments elliptiques. Mais il y a là une difficulté sur laquelle Jacobi appelle l'attention dans une lettre adressée à Hansen, que l'on trouve dans le Tome II des *Opuscula mathematica*.

En effet, Jacobi critique la définition des coordonnées idéales, proposée par Hansen, parce que les quantités qui déterminent la situation de l'axe des ξ ne sont pas de véritables constantes arbitraires ou éléments, dans l'acception consacrée du mot. Si nous désignons par σ la distance de cet axe à la ligne des nœuds, l'angle σ est déterminée par l'équation différentielle

$$d\sigma = \cos i\, d\vartheta,$$

qui n'est pas directement intégrable; on ne saurait donc considérer

σ comme une fonction des constantes arbitraires i, ϑ. Toutefois Jacobi, en s'appuyant sur un précédent créé par Lagrange, propose d'étendre le nom d'*éléments* à des quantités de cette nature, définies par des intégrales de la forme

$$\int(\mathrm{A}\,da + \mathrm{B}\,db + \ldots),$$

où A, B, ... sont des fonctions des constantes arbitraires a, b, ... On pourra donc appeler *éléments* l'angle σ, l'angle ϖ qui exprime la distance du périhélie à l'axe des ξ, etc., et, en posant $u = v + \varpi$, où v est l'anomalie vraie dans l'ellipse osculatrice, on aura

$$u' = v' + \varpi' = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \delta u = \delta v + \varpi'\,dt = 0,$$

en indiquant toujours par des accents les dérivées totales.

4. Les relations

$$\xi = r\cos u, \quad \eta = r\sin u$$

donnent

$$\xi\eta' - \eta\xi' = r^2 u' = f,$$

et les équations du mouvement deviennent, pour la première orbite,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} r'' - \frac{f^2}{r^3} &= \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r},\\ f' &= \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u},\\ f r^0 &= \frac{r}{\mu}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \zeta}.\end{aligned}\right.$$

En même temps

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,\mu\left(r'^2 + \frac{f^2}{r^2}\right).$$

Si l'on fait toujours $\mathrm{H} = \mathrm{T} + \mathrm{T}_1 - \mathrm{U}$, et qu'on observe que U ne renferme pas les vitesses, comme $\mathrm{T} + \mathrm{T}_1$ ne renferme pas les angles u, u_1, on pourra donner aux deux premières de ces trois équations la forme suivante :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial(\mu r')}, \quad \frac{d(\mu r')}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r},$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial(\mu f)}, \quad \frac{d(\mu f)}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}.$$

A ces équations, qui déterminent le mouvement orbitaire, il faut ajouter celles qui déterminent le plan de l'orbite.

Soient :

i l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe,
ϑ la longitude du nœud dans le plan fixe,
σ la longitude du nœud dans l'orbite,
υ l'angle que fait le rayon vecteur avec le nœud ascendant (ce qu'on appelle l'*argument de la latitude*).

On aura d'abord $u = \upsilon + \sigma$; le cosinus de l'angle (r, r_1), qui figure dans U et dans Ω, et que nous avons désigné par s, s'exprimera par $\upsilon, \upsilon_1, i, i_1, \vartheta - \vartheta_1$, et l'on aura

$$\frac{\partial U}{\partial \upsilon} = \frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{\partial U}{\partial \sigma},$$

en mettant $u - \sigma$ à la place de υ. Par suite de l'introduction des axes mobiles, dont la position initiale est arbitraire, le nombre des variables contenues dans A est maintenant de quatorze au lieu de douze; mais, si nous conservons υ au lieu de $u - \sigma$, les variables σ, σ_1 restent en dehors du système à intégrer. Il faut maintenant chercher l'expression de la dérivée υ'.

Par des considérations géométriques très simples, on trouve d'abord

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} r^0 \cos\upsilon &= i', \\ r^0 \sin\upsilon &= \vartheta' \sin i, \\ \sigma' &= \vartheta' \cos i, \end{aligned} \right.$$

i' étant la rotation du plan de l'orbite autour de la ligne des nœuds, et $r^0 \sin\upsilon$ sa rotation autour d'un axe perpendiculaire à cette ligne.

Puis l'on voit aisément que $\frac{\partial U}{\partial \zeta}$ est la force perturbatrice normale au plan de l'orbite, qui produit la rotation actuelle de ce plan autour du rayon vecteur, et que le déplacement virtuel $\delta\zeta$ équivaut à une rotation $\delta i = \frac{\delta\zeta}{r \sin\upsilon}$ autour du nœud. Il s'ensuit, en posant toujours $\mu f = k$,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} k r^0 &= r\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{1}{\sin \upsilon}\frac{\partial U}{\partial i}, \\ k i' &= \cot \upsilon \frac{\partial U}{\partial i}, \\ k \vartheta' &= \frac{1}{\sin i}\frac{\partial U}{\partial i}, \\ k \sigma' &= \cot i \frac{\partial U}{\partial i}. \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(k\cos i)' = \frac{\partial U}{\partial \vartheta},$$

en vertu de l'identité

$$\frac{\partial s}{\partial \vartheta} - \cos i\frac{\partial s}{\partial \upsilon} + \cot \upsilon \sin i \frac{\partial s}{\partial i} = 0,$$

et, puisque

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta_1} = 0,$$

on peut écrire l'intégrale

$$k\cos i + k_1 \cos i_1 = \mathrm{K}.$$

Ensuite

$$k \sin i = k_1 \sin i_1,$$
$$\vartheta_1 - \vartheta = 180^\circ.$$

Ce sont les intégrales des aires, que nous n'avons plus besoin de démontrer, puisque nous les avons établies plus haut sous une forme peu différente; nous avons déjà dit que les deux orbites se coupent dans le plan invariable, sur lequel se comptent les longitudes ϑ, ϑ_1.

5. Nous désignerons par $\mathrm{J} = i + i_1$ l'inclinaison mutuelle des orbites, et nous compterons les angles υ, υ_1 du nœud ascendant de chaque orbite; nous aurons dès lors

$$\begin{aligned} -s &= \cos\upsilon\cos\upsilon_1 + \sin\upsilon\sin\upsilon_1\cos\mathrm{J} \\ &= \cos(\upsilon - \upsilon_1) - 2\sin\upsilon\sin\upsilon_1\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{J}, \end{aligned}$$

et les intégrales des aires donnent encore

$$\text{(10)} \qquad \frac{\sin i}{k_1} = \frac{\sin i_1}{k} = \frac{\sin J}{K},$$

$$K^2 = k^2 + k_1^2 + 2kk_1 \cos J = (k + k_1)^2 - 4kk_1 \sin^2 \frac{1}{2} J,$$

d'où il résulte que la somme des vitesses aérolaires $k + k_1$ varie fort peu, si les orbites sont peu inclinées l'une sur l'autre.

On voit que s ne dépend que des trois angles υ, υ_1, J. Le nœud a été éliminé; et si nous remplaçons $\cos J$ par sa valeur tirée des intégrales des aires, les inclinaisons disparaissent à leur tour et il ne reste dans H que les huit variables r, r_1, r', r_1', υ, υ_1, k, k_1.

En différentiant l'expression de la constante K par rapport à k, on trouve d'ailleurs

$$\cos i - k \sin i \frac{\partial J}{\partial k} = 0,$$

et il s'ensuit qu'en remplaçant $\cos J$ par sa valeur on aura

$$\sigma' = \frac{\partial U}{\partial k}.$$

Or on avait $u' = \dfrac{\partial T}{\partial k}$; et, puisque $\upsilon' = u' - \sigma'$, il vient

$$\upsilon' = \frac{\partial H}{\partial k},$$

les vitesses k, k_1 étant contenues à la fois dans $T + T_1$ et dans U. Les équations du mouvement prennent donc la forme suivante :

$$\text{(11)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial(\mu r')}, & \frac{d(\mu r')}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{dr}, \\ \frac{d\upsilon}{dt} &= \frac{\partial H}{dk}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \upsilon}. \end{aligned} \right.$$

Leur ensemble forme un système de huit équations simultanées du premier ordre, qui peut s'intégrer séparément, et auquel s'ajoute la quadrature

$$\text{(12)} \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial K}.$$

Les inclinaisons i, i_1 se déterminent finalement par k, k_1. On a d'ailleurs l'intégrale des forces vives $H = \text{const.}$ Mais, le système ci-dessus ne pouvant jamais être intégré que par approximation, il importe d'introduire d'autres variables qui puissent jouer le rôle de constantes arbitraires, d'éléments des orbites troublées, ce qui veut dire que leurs variations ne doivent dépendre que de la fonction perturbatrice. A cet égard, il est à remarquer que k, ϑ, σ jouissent déjà de cette propriété, car on a évidemment

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial K}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial \upsilon} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}.$$

Il en est de même de la variable h, déjà définie plus haut, que l'on peut introduire à la place de r', en vertu des relations

$$h = \frac{1}{2}\mu\left(r'^2 + \frac{f^2}{r^2} - \frac{2M}{r}\right),$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial r}r' + \frac{\partial\Omega}{\partial u}u',$$

$$= \frac{\partial\Omega}{\partial r}r' + \frac{\partial\Omega}{\partial \upsilon}\frac{f}{r^2},$$

où $f = \frac{k}{\mu}$. Si nous exprimons les coordonnées polaires r, u en fonction de $t+\tau$ et de diverses constantes arbitraires, de telle façon que leurs dérivées totales se confondent avec leurs dérivées partielles prises par rapport à t ou à τ, nous aurons

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}. \tag{13}$$

6. On y arrive par l'emploi d'une ellipse osculatrice qui satisfait aux équations du mouvement dans l'hypothèse de $\Omega = 0$. L'élément h représente alors le grand axe $\left(h = -\frac{mm_0}{2a}\right)$, et k le paramètre $(k = \sqrt{Mp})$; les mêmes éléments déterminent encore l'excentricité e et le moyen mouvement n, car on a

$$\frac{p}{a} = 1 - e^2, \quad \frac{M}{a^3} = n^2.$$

Les nouvelles constantes arbitraires qui achèvent de définir l'ellipse keplérienne sont l'époque τ et la longitude du périhélie ϖ, comptée à partir de l'axe des ξ, que l'on peut aussi remplacer par la distance du périhélie au nœud π; on a dans ce cas $\varpi = \pi + \sigma$. En désignant par v l'anomalie vraie, par ε l'anomalie excentrique, on a les relations

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v, \quad \frac{r}{a} = 1 - e\cos\varepsilon,$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon, \quad \varepsilon - e\sin\varepsilon = n(t+\tau),$$

$$u = v + \varpi, \quad \upsilon = v + \pi.$$

Les vitesses elliptiques devant coïncider avec les vitesses orbitaires, les dérivées r', u' sont égales aux dérivées partielles des variables r, u prises par rapport à τ; par conséquent,

$$r' = \frac{\partial r}{\partial \tau},$$

$$u' = v' + \varpi' = \frac{\partial v}{\partial \tau}.$$

En partant de ces relations, on trouve

$$(14)\quad \begin{cases} h' = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\tau}, & \tau' = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial h}, \\[2ex] k' = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\pi}, & \pi' = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial k}. \end{cases}$$

En prenant la dérivée partielle de Ω par rapport à k, on suppose ici que k existe dans les expressions des coordonnées r, v aussi bien que dans $\cos J$. On a vu plus haut qu'en prenant k seulement dans $\cos J$ on avait

$$\sigma' = \frac{\partial\Omega}{\partial k};$$

on a de même

$$\varpi' = -\frac{\partial\Omega}{\partial k}$$

en prenant k seulement dans les coordonnées r, v; cela résulte de la relation $\varpi' = \pi' + \sigma'$. Enfin

$$\vartheta' = -\frac{\partial\Omega}{\partial K}.$$

On voit aussi qu'on aura

$$(15)\quad (k + k_1)' = 2\sin^2\frac{1}{2}J\sin(\upsilon + \upsilon_1)\frac{\partial\Omega}{\partial s}.$$

Sous cette forme, les équations sont préparées pour la variation des constantes. Nous allons les modifier de manière à éviter l'emploi des éléments elliptiques variables, le point de départ étant dès lors une ellipse invariable, comme dans l'une des méthodes du Livre II de la *Mécanique céleste.* On verra comment M. Weiler a tenté de résoudre le problème ainsi modifié. Mais auparavant il ne sera pas sans intérêt de rappeler brièvement certains détails des méthodes de Hansen, à cause des rapprochements qui s'offriront d'eux-mêmes.

7. On sait que, pour le calcul des perturbations spéciales des petites planètes, Hansen a renoncé à l'ellipse osculatrice. Dans sa méthode, on emploie une ellipse keplérienne où l'époque τ est seule variable ([1]), tandis que a, p, e, n, ϖ sont des constantes absolues, déterminées une fois pour toutes de manière à représenter des éléments osculateurs à l'origine du temps. Au rayon vecteur fictif r_e pris dans cette ellipse, on compare le rayon vecteur actuel r, en posant $r = r_e(1+\rho)$ et en les faisant coïncider en direction, de sorte que $u = v + \varpi$. On a donc

$$(16)\qquad f = r^2 u' = r^2 v' = (1+\rho)^2 r_e^2 v',$$

et

$$(17)\qquad r_e^2 v' = f_0(1+\tau'),$$

où $f_0 = \sqrt{\mathrm{M}p}$ est la valeur de f à l'origine du temps. Par définition, on a aussi, à l'origine du temps, $\rho = 0$, $\rho' = 0$, $\tau = \tau_0$, $\tau' = 0$, les dérivées des variables ρ, τ devant, pour $t = 0$, se confondre avec les dérivées nulles des quantités analogues prises sur une ellipse osculatrice. Pour déterminer f, on a la quadrature

$$(18)\qquad f - f_0 = \int \frac{\partial \Omega}{\partial v}\,dt$$

(nous écrivons ici Ω sous sa forme ordinaire). Puis

$$\tau' = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \left(\frac{f-f_0}{f_0} - 2\rho - \rho^2\right),$$

([1]) Hansen met à la place de t une fonction du temps $z = t + \delta z$; mais cela revient à faire varier l'époque.

et, en supprimant les termes du second ordre,

$$(19) \qquad \tau - \tau_0 = \int \left(\frac{f - f_0}{f_0} - 2\rho \right) dt,$$

les intégrales étant toujours prises de manière qu'elles s'annulent pour $t = 0$. La valeur de ρ se trouve par une double quadrature. En différentiant l'équation

$$\frac{1+\rho}{r} = \frac{1 + e\cos v}{p},$$

on a d'abord

$$r\rho' - (1+\rho)r' = -\frac{e}{p}\sin v f,$$

puis

$$r\rho'' - (1+\rho)r'' = -\frac{e}{p}\sin v f' - \frac{e}{p}\cos v \frac{f^2}{r^2}.$$

Les dérivées r'' et f' étant remplacées par leurs valeurs tirées des équations du mouvement, il vient

$$(20) \qquad \rho'' + \frac{M\rho}{r^3} = \frac{1}{r_c}\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{e\sin v}{pr}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{M}{r^3}\left(\frac{f^2}{f_0^2} - 1\right).$$

On a d'ailleurs $\rho = 0$, $\rho' = 0$, pour $t = 0$. Le facteur $\left(\frac{f^2}{f_0^2} - 1\right)$ peut être remplacé par $2\frac{f - f_0}{f_0}$.

8. Les valeurs de ρ et de τ une fois obtenues par des quadratures, on connaît les coordonnées polaires r, u, c'est-à-dire la position de la planète par rapport aux axes mobiles qui tournent avec l'orbite. Il reste à tenir compte du déplacement de ces axes. Par une ingénieuse transformation, Hansen a ramené cette partie du calcul à la recherche de la différence

$$\Delta z = z - z_0,$$

où z_0 signifie la valeur de z qu'on obtient en remplaçant les variables i, σ par i_0, σ_0. Cela revient à faire tourner les axes mobiles (ξ, η, ζ) d'un angle $\sigma - \sigma_0$ autour de la normale à l'orbite, et d'un angle $i - i_0$ autour de la ligne des nœuds. Les axes (ξ, η) sont ainsi amenés dans les positions (ξ_0, η_0), et r dans la position r_0, sans rien changer aux valeurs des variables ξ, η, r, u, déjà déterminées. On a évidemment

$$z = r\cos(z, r) = \xi\cos(z, \xi) + \eta\cos(z, \eta),$$
$$z_0 = r\cos(z, r_0) = \xi\cos(z, \xi_0) + \eta\cos(z, \eta_0);$$

la variable z_0 est donc simplement une fonction linéaire donnée de ξ, η. En posant $\Delta z = rs$, nous avons

$$\begin{aligned} s &= \cos(z, r) - \cos(z, r_0) \\ &= \sin i \sin(u - \sigma) - \sin i_0 \sin(u - \sigma_0). \end{aligned}$$

Cette expression représente ce qu'on pourrait appeler la perturbation de la latitude b, puisque $\cos(z, r) = \sin b$. Comme elle n'est pas affectée par la rotation instantanée de l'orbite, on peut la différentier en traitant i, σ comme des constantes, et il vient

$$\frac{r^2}{f} s' = \sin i \cos(u - \sigma) - \sin i_0 \cos(u - \sigma_0);$$

le second membre représente la perturbation de la latitude du rayon vecteur perpendiculaire à r; je le désignerai par s_p.

En nous rappelant que les équations du mouvement ont la même forme en z et en ξ, η, nous pouvons écrire (¹)

$$(\Delta z)'' + \frac{M}{r^3}\Delta z = \frac{\partial\Omega}{\partial z} - \frac{\partial\Omega}{\partial z_0} = \cos i \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta} + s_\xi \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + s_\eta \frac{\partial\Omega}{\partial\eta},$$

où s_ξ, s_η sont les perturbations de la latitude des deux axes.

Si l'on fait tour à tour coïncider l'axe des ξ avec le rayon vecteur r et avec un rayon vecteur χ parallèle à la projection de la force perturbatrice sur l'orbite, on voit facilement que la somme des deux derniers termes peut être représentée par

$$s\frac{\partial\Omega}{\partial r} + s_p \frac{\partial\Omega}{r\,\partial u} = s_\chi \frac{\partial\Omega}{\partial\chi}.$$

Ces termes sont du second ordre et peuvent généralement être

(¹) Je me suis efforcé de simplifier la démonstration de ces équations. On peut consulter, sur la méthode de Hansen, une thèse de M. Périgaud (1877). Une démonstration géométrique des formules (23) a été donnée par M. L. Hopff, en 1862 (*Astronom. Nachrichten*, n° 1353).

négligés. On trouve donc rs par la double quadrature

$$(21)\qquad (rs)'' + \frac{M}{r^3}(rs) = \cos i \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.$$

La latitude b s'obtient ensuite par la formule

$$(22)\qquad \sin b = \sin i_0 \sin(u - \sigma_0) + s.$$

Faisons maintenant tourner le système (ξ_0, η_0) autour de l'axe des z d'un angle $\vartheta - \vartheta_0 - \Gamma$; le nœud deviendra $\vartheta_0 + \Gamma$, et l'angle Γ pourra être choisi de manière que les différences $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, des coordonnées relatives à la nouvelle ligne des nœuds soient proportionnelles à Δz, ou que les rapports des Δ soient indépendants de u. Cette condition est remplie quand r et r_0 *coïncident* pour l'intersection des plans (ξ, η) et (ξ_0, η_0). En effet, cette intersection fait alors des angles égaux avec les axes ξ et ξ_0, et avec deux rayons conjugués quelconques r, r_0, d'où il suit que les lignes qui joignent les extrémités des couples r, r_0 sont toutes parallèles, et que leurs projections Δx, Δy, Δz ont les mêmes rapports, quel que soit u. Les équations qui fournissent la longitude l peuvent dès lors être mises sous cette forme :

$$(23)\left\{\begin{aligned} &\cos b \sin(l - \vartheta_0 - \Gamma) = \cos i_0 \sin(u - \sigma_0) - s \tang i_0 - \frac{sq}{\varkappa \cos i_0},\\ &\cos b \cos(l - \vartheta_0 - \Gamma) = \cos(u - \sigma_0) + \frac{sp}{\varkappa},\end{aligned}\right.$$

où

$$\begin{gathered} p = \sin i \sin(\sigma - \sigma_0), \quad q = \sin i \cos(\sigma - \sigma_0) - \sin i_0,\\ \varkappa = 1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \sigma_0)\\ \varkappa \sin(\vartheta - \vartheta_0 - \Gamma) = (\cos i + \cos i_0)\sin(\sigma - \sigma_0).\end{gathered}$$

On prend d'habitude $\sigma_0 = \vartheta_0$. Les quantités Γ, sp, sq sont du second ordre et le plus souvent négligeables; mais on peut les déterminer aisément en fonction de s et s_p.

9. Au lieu de faire varier l'époque τ, comme le veut cette méthode, il y aurait peut-être avantage à faire varier le périhélie ϖ. Le point de départ serait alors une ellipse keplérienne complètement déterminée, qui changerait seulement de position ; r_e et v

seraient des fonctions *données* du temps. On aurait, dans ce cas,

$$r_e^2 v' = f_0, \quad r^2 v' = f_0(1+\rho)^2, \tag{24}$$

$$u' = v' + \varpi', \quad f = f_0(1+\rho)^2 + r^2\varpi'. \tag{25}$$

Après avoir déterminé $f - f_0$ comme dans le cas précédent, on trouverait ϖ par la quadrature

$$\varpi - \varpi_0 = \int [f - f_0 - (2\rho + \rho^2) f_0] \frac{dt}{r^2}. \tag{26}$$

L'équation différentielle en ρ peut s'établir comme il suit.

La relation $1 + \rho = \dfrac{r}{r_e}$ donne d'abord

$$(r_e^2 \rho')' = r_e r'' - r r_e'',$$

puis, en remplaçant r'', r_e'' par leurs valeurs,

$$(r_e^2\rho')' + \frac{f_0^2}{r_e^2}\rho = r_e\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{f^2 - f_0^2}{r^3}\right) + \mathrm{M} r_e (r - p)\left(\frac{1}{r_e^3} - \frac{1}{r^3}\right).$$

Mais cette équation se prête mal aux quadratures, et il y a lieu de la transformer.

Pour y arriver, remarquons que les deux coordonnées fictives

$$x_e = r_e \cos v, \quad y_e = r_e \sin v$$

sont des fonctions données du temps qui satisfont aux équations différentielles

$$x_e'' + \frac{\mathrm{M} x_e}{r_e^3} = 0, \quad y_e'' + \frac{\mathrm{M} y_e}{r_e^3} = 0.$$

Soit maintenant φ une fonction des coordonnées véritables, et posons

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \alpha x_e + \beta y_e, \\ \varphi' &= \alpha x_e' + \beta y_e', \\ 0 &= \alpha' x_e + \beta' y_e, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

nous aurons

$$\varphi'' + \frac{\mathrm{M}\varphi}{r_e^3} = \alpha' x_e' + \beta' y_e',$$

et par suite

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} -f_0.\alpha' &= y_e\left(\varphi'' + \frac{M\varphi}{r_e^3}\right),\\ f_0.\beta' &= x_e\left(\varphi'' + \frac{M\varphi}{r_e^3}\right),\end{aligned}\right.$$

puisque $x_e y_e' - y_e x_e' = f_0$.

Si nous prenons $\varphi = r - r_e$, nous aurons, d'une part,

$$r = r_e + \alpha x_e + \beta y_e,$$

et de l'autre

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} -f_0.\alpha' &= y_e\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{f^2 - f_0^2}{r^3}\right) + My_e(r-p)\left(\frac{1}{r_e^3} - \frac{1}{r^3}\right),\\ f_0.\beta' &= x_e\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{f^2 - f_0^2}{r_1^3}\right) + Mx_e(r-p)\left(\frac{1}{r_e^3} - \frac{1}{r^3}\right),\end{aligned}\right.$$

ou bien, en négligeant des termes très petits,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} -f_0\,\alpha' &= r_e \sin v\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2f_0\frac{f - f_0}{r_e^3}\right) + \frac{3M\rho}{r_e}(\rho - e\cos v)\sin v,\\ f_0\,\beta' &= r_e \cos v\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2f_0\frac{f - f_0}{r_e^3}\right) + \frac{3M\rho}{r_e}(\rho - e\cos v)\cos v.\end{aligned}\right.$$

Ces deux quadratures fournissent α, β. Les intégrales doivent s'annuler pour $t = 0$, puisque $\rho = 0$, $\rho' = 0$, à l'origine du temps.

Pour appliquer sa méthode au calcul des perturbations absolues, Hansen introduit les éléments de l'ellipse osculatrice à côté des éléments constants qui sont employés ici. Mais nous n'avons pas, pour le moment, à nous occuper de cette application, qui nous écarterait trop de notre sujet.

10. On pourrait encore modifier l'énoncé de la méthode en écrivant p_0 à la place de p et posant $p_0(1 + \rho) = p$, de sorte que l'équation de l'ellipse deviendrait

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v.$$

A la place de la variable r, on introduirait ainsi le paramètre variable d'une ellipse keplérienne, dans laquelle les éléments e, n, τ seraient des constantes numériques données; la relation

$n^2 a^3 = M$ n'aurait plus lieu, puisque a serait variable en vertu de la relation $p = a(1 - e^2)$. Mais cette conception, qui est le point de départ des récents travaux de M. Weiler, me paraît moins claire que celle d'une ellipse auxiliaire invariable. L'emploi du paramètre variable ne sert qu'à compliquer sans nécessité les démonstrations. Notre équation $r^2 v' = f_0(1 + \rho)^2$ devient, chez M. Weiler,

$$v' = \frac{f_0}{p_0^2}\left(\frac{p}{r}\right)^2 = l\left(\frac{p}{r}\right)^2,$$

où l est une constante absolue. Mais, sous prétexte d'abréger l'écriture, il modifie ensuite l'unité de temps, l'unité de longueur, etc., de sorte que les distances et les vitesses n'ont plus chez lui la signification qu'on y attache d'ordinaire, ce qui rend la lecture de ses Mémoires difficile [1]. Je me bornerai donc à donner une idée de ses recherches, en suivant une marche différente qui me paraît plus simple.

Il s'agit de déterminer les perturbations mutuelles de trois corps célestes, en partant des équations transformées par la substitution orthogonale de Jacobi. Nous nous servirons pour cela d'une ellipse auxiliaire invariable, qui change seulement de position ($u' = v' + \varpi'$). Mais il faut maintenant aborder le problème dans toute sa généralité, tandis que, dans la méthode exposée au n° **10**, on n'a en vue qu'une première approximation numérique.

11. Cherchons d'abord à établir les relations qui nous fourniront r en fonction de r_e. Nous y arriverons en posant, comme au n° **9**,

$$\varphi = \alpha x_e + \beta y_e,$$

mais en prenant cette fois $2\varphi = r^2 - r_e^2$.

Les nouvelles variables α, β seront alors déterminées par les équations différentielles

$$f_0 . \alpha' = - y_e\left(\varphi'' + \frac{M\varphi}{r_e^3}\right),$$

$$f_0 . \beta' = \quad x_e\left(\varphi'' + \frac{M\varphi}{r_e^3}\right),$$

[1] *Grundzüge einer neuen Störungstheorie*. Leipzig, 1872. — *Astronom. Nachrichten*, n°s 2291-2292, 2311-2317; 1880.

où il reste à remplacer φ par sa valeur. Si l'on admet que l'ellipse auxiliaire était une ellipse osculatrice à l'origine du temps, on aura, pour $t=0$, $\varphi=0$, $\varphi'=0$, puisque r' coïncide alors avec r'_e, et il s'ensuit qu'il faudra prendre $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$ pour $t=0$. Cette condition détermine les constantes qui entrent dans les intégrales par lesquelles se trouvent α, β.

En vertu de (4), nous avons

$$\frac{\mu}{2}(r^2)''=2h+\frac{mm_0}{r}+r\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

d'où

$$\mu\left(\varphi''+\frac{M\varphi}{r_e^3}\right)=r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+2(h-h_0)+\mathbf{r},$$

en désignant par $\mathbf{r}$ le terme du second ordre

$$\mathbf{r}=\frac{mm_0}{2}\frac{2r_e+r}{rr_e^3}(r-r_e)^2=\frac{\mu M}{2r}(3\rho^2+\rho^3).$$

Par conséquent,

$$(31)\qquad \begin{cases} \mu f_0.\alpha'=-y_e\left[\dfrac{r\partial\Omega}{\partial r}+2(h-h_0)+\mathbf{r}\right], \\ \mu f_0.\beta'=\quad x_e\left[\dfrac{r\partial\Omega}{\partial r}+2(h-h_0)+\mathbf{r}\right]. \end{cases}$$

Ces deux équations sont, au fond, identiques avec celles qui, chez M. Weiler, déterminent le paramètre variable, et qui servent de base à sa théorie des perturbations. Mais M. Weiler ne fait pas $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$, ce qui suppose que l'ellipse auxiliaire n'est pas osculatrice pour $t=0$.

Les seconds membres des équations ci-dessus dépendent de l'élément $(h-h_0)$, et l'on se rappelle que

$$2h=\mu\left(r'^2+\frac{f^2}{r^2}-\frac{2M}{r}\right),$$

$$h'=r'\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{f}{r^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

L'intégrale des forces vives donne encore

$$h-h_0+h_1-h_{10}=\Omega-\Omega_0,$$

où Ω_0 est une constante comme h_0 et h_{10}; on a enfin l'identité

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + r_1\frac{\partial\Omega}{\partial r_1} + \Omega = 0,$$

et ces deux relations permettent d'introduire h_1 et $\frac{\partial\Omega}{\partial r_1}$ à la place de h et de $\frac{\partial\Omega}{\partial r}$.

Dans son Mémoire de 1872, M. Weiler propose de déterminer d'abord l'élément $q = 2(h - h_0)$, après quoi on procéderait à la détermination des éléments α, β (chez lui k, h), d'où se déduirait le paramètre p à l'aide de la relation

$$\frac{1}{2p_0}(p^2 - p_0^2) = \frac{p}{r}(\alpha\cos v + \beta\sin v).$$

Connaissant p, on tirerait la valeur de f de l'équation qui définit h, et l'on trouverait l'élément π par l'équation

$$\varpi' = \pi' + \cos i\,\vartheta' = \frac{f - lp^2}{r^2},$$

ϑ et i étant déterminés par les équations connues.

Mais, dans sa dernière publication, M. Weiler abandonne ce mode d'intégration pour s'engager dans une voie toute différente, qu'il nous reste à indiquer.

12. M. Weiler commence par déterminer l'élément

$$S = \mu f + \mu_1 f_1$$

à l'aide de l'équation

$$S' = 2\sin^2\frac{1}{2}J.\sin(\upsilon + \upsilon_1)\frac{\partial\Omega}{\partial s}, \tag{15}$$

qui a été établie au n° 6, et dont le second membre est très petit, si l'inclinaison J est petite. Connaissant S, on peut se servir de l'intégrale des forces vives pour exprimer f et f_1 en fonction d'autres variables, susceptibles d'être déterminées directement comme S. Pour y arriver, il y a lieu d'introduire d'abord, à la place de $h - h_0$, le nouvel élément

$$g = 2(h - h_0) - \mu\frac{f^2 - f_0^2}{r^2}, \tag{32}$$

qui ne contient plus f. En effet, nous avons (en faisant $f_0^2 = \mathrm{M}p_0$)

$$\frac{1}{\mu} g = r'^2 - r_e'^2 - \frac{2\mathrm{M}}{r} + \frac{2\mathrm{M}}{r_e} - \mathrm{M}p_0\left(\frac{1}{r_e^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

En tenant compte des relations

$$2\varphi = r^2 - r_e^2, \quad rr' = r_e r_e' + \varphi', \quad f_0 r_e r_e' = \mathrm{M} e y_e,$$
$$f_0 \alpha = y_e' \varphi - y_e \varphi',$$

on trouve

$$(33) \qquad \frac{1}{\mu} g r^2 = -2\mathrm{M}e\alpha + \varphi'^2 + \frac{\mathrm{M}}{r_e}(r - r_e)^2.$$

Posant toujours

$$r = r_e(1 + \rho),$$

on a encore

$$\frac{1}{\mu} g r_e^2 = -2\mathrm{M}e\alpha + r_e^4 \rho'^2 + \frac{\mathrm{M}p_0}{r^2 r_e^2}(r^2 - r_e^2)^2 - \mathrm{M}\frac{2r_e + r}{r r_e}(r - r_e)^2.$$

On voit que, en négligeant les termes du second ordre, on aurait simplement

$$(34) \qquad g = -2\mu \mathrm{M} e \frac{\alpha}{r_e^2}.$$

Ces relations nous permettront de démontrer que la dérivée de la fonction

$$(35) \qquad \psi = \frac{\mu \mathrm{M} e \alpha f_{10} + \mu_1 \mathrm{M}_1 e_1 \alpha_1 f_0}{r_e^2 f_{10} - r_{1e}^2 f_0}$$

peut s'intégrer directement, tandis que celle de la variable α n'a pas cette propriété.

En indiquant toujours par le signe Σ la somme de deux termes symétriques, correspondant aux deux orbites, nous avons d'abord

$$\Sigma g r^2 f_{10} = -2\,\Sigma \mu \mathrm{M} e \alpha f_{10} + \gamma,$$

où γ représente l'ensemble des termes du second ordre. Ensuite

$$\Sigma g r^2 f_{10} = \Sigma\, 2(h - h_0) r^2 f_{10} - 2 f_0 f_{10}(\mathrm{S} - \mathrm{S}_0) - \lambda,$$

où le terme

$$\lambda = \mu f_{10}(f - f_0)^2 + \mu_1 f_0 (f_1 - f_{10})^2$$

est encore du second ordre. On tire de là

$$2\Sigma\mu M e\alpha f_{10} = -\Sigma 2(h-h_0) r^2 f_{10} + 2 f_0 f_{10}(S-S_0) + \lambda + \gamma,$$

ou bien

$$2\Sigma\mu M e\alpha f_{10} = -\Sigma 2(h-h_0) r_e^2 f_{10} + 2 f_0 f_{10}(S-S_0) + \varepsilon,$$

en désignant par ε la somme $\lambda+\gamma$ augmentée d'un terme qui dépend de $(h-h_0)(r^2-r_e^2)$.

La dérivée de l'expression ci-dessus, qui représente le numérateur de ψ, peut être formée à l'aide de l'équation par laquelle se détermine α'. En nous rappelant que $M e y_e = f_0 r_e r'_e$, nous trouvons

$$-2\Sigma\mu M e\alpha' f_{10} = \Sigma\left[2(h-h_0) + r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \mathbf{r}\right](r_e^2 f_{10})'.$$

Pour abréger, je poserai

$$r_e^2 f_{10} = a, \quad r_{1e}^2 f_0 = b,$$

d'où

$$\psi = \frac{\Sigma\mu M e\alpha f_{10}}{a-b};$$

on trouvera ψ' en formant

$$(a-b)\Sigma\mu M e\alpha f_{10} - (a'-b')\Sigma\mu M e\alpha' f_{10}.$$

Or, on a, d'une manière générale,

$$(a-b)(Aa'+Bb') - (a'-b')(Aa+Bb) = (A+B)(ab'-ba').$$

En faisant ici

$$A = 2(h-h_0), \quad B = 2(h_1-h_{10}),$$

remarquant que

$$A+B = 2(\Omega-\Omega_0),$$

et laissant de côté les termes du second ordre, l'application de cette formule donne

$$-2(a-b)^2\psi' = 2(\Omega-\Omega_0)(ab'-ba') \\ + (a-b)\Sigma r\frac{\partial\Omega}{\partial r}a' + (a'-b')\,2 f_0 f_{10}(S-S_0).$$

En tenant compte de l'identité

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+r_1\frac{\partial\Omega}{\partial r_1}+\Omega=0,$$

on aurait encore

$$(a-b)\Sigma r\frac{\partial\Omega}{\partial r}a'=(a'-b')\Sigma r\frac{\partial\Omega}{\partial r}a-\Omega(ab'-ba');$$

par conséquent,

$$-2\psi'=(\Omega-2\Omega_0)\frac{ab'-ba'}{(a-b)^2}+\frac{a'-b'}{(a-b)^2}\left[\Sigma r\frac{\partial\Omega}{\partial r}a+2f_0f_{10}(S-S_0)\right].$$

On voit que ψ' ne dépend que de la fonction perturbatrice Ω et de S, en dehors des quantités données a, b et des termes du second ordre que nous avons supprimés ici. L'élément ψ s'obtient donc, comme S, par une quadrature. Connaissant S et ψ, on pourra aussi intégrer les équations en α', β'. En effet, nous avons

$$-2\Sigma\mu Me\alpha f_{10}=\Sigma 2(h-h_0)a-2f_0f_{10}(S-S_0)-\varepsilon.$$

Or,

$$\Sigma 2(h-h_0)a=2(h-h_0)(a-b)+2(\Omega-\Omega_0)b;$$

par suite,

$$(36)\qquad -\psi=h-h_0+\frac{b(\Omega-\Omega_0)-f_0f_{10}(S-S_0)}{a-b},$$

en supprimant le terme du second ordre ε. On peut donc exprimer $(h-h_0)$ en fonction des variables S, ψ, déjà connues, et les équations différentielles en α', β' deviennent ainsi des quadratures.

13. Il nous reste à exprimer par les mêmes variables l'inconnue f. Nous avons

$$(32)\qquad \mu\frac{f^2-f_0^2}{2r^2}=h-h_0-\frac{1}{2}g,$$

d'où, en ne conservant que les termes du premier ordre,

$$(37)\qquad \frac{\mu f_0}{r^2}(f-f_0)=\frac{\mu Me}{r^2}\alpha-\psi-\frac{b(\Omega-\Omega_0)-f_0f_{10}(S-S_0)}{a-b}.$$

On a ainsi f en fonction de S, ψ, α et de quantités données.

En confondant ici r avec r_e, et nous rappelant que $r_e^2 v' = f_0$, cette relation peut s'écrire

$$\mu(f-f_0)(v'-v'_1) = \frac{\mu M e}{r^2}\alpha + \frac{\mu_1 M_1 e_1}{r_1^2}\alpha_1 + \Omega - \Omega_0 - v'_1(S-S_0),$$

et sous cette forme on voit qu'elle peut se déduire directement de la suivante :

$$\Sigma\mu(f-f_0)v' = \Sigma\left(h - h_0 - \frac{1}{2}g\right).$$

Pour trouver les termes du second ordre qui ont été négligés, il suffit de remarquer que l'équation $f^2 - f_0^2 = 2C$ donne

$$f - f_0 = \frac{C}{f_0} - \frac{C^2}{2f_0^3} + \frac{C^3}{2f_0^5} - \frac{5C^4}{8f_0^7} + \ldots.$$

La marche que j'ai suivie ici est beaucoup plus directe que celle par laquelle M. Weiler arrive aux mêmes résultats en partant de l'équation

$$\Sigma\mu\frac{f^2 - f_0^2}{r^2} = 2(\Omega - \Omega_0) - g - g_1,$$

dans laquelle il remplace $\mu_1 f_1$ par $S - \mu f$.

Lorsqu'on a déterminé $f - f_0$ à l'aide de l'équation (37), la relation $S = \mu f + \mu_1 f_1$ fournit la valeur de f_1, les inclinaisons i, i_1, J se déduisent des intégrales des aires, le nœud ϑ s'obtient par une quadrature, et le périhélie par la relation suivante :

$$\pi' + \cos i\,\vartheta' = \frac{f}{r^2} - \frac{f_0}{r_e^2}.$$

14. Cette esquisse rapide suffira pour donner une idée des principes sur lesquels repose la méthode de M. Weiler. Je ne crois pas nécessaire d'entrer ici dans de plus amples détails sur l'intégration des équations destinées à fournir successivement les valeurs des éléments troublés. Il est d'ailleurs à présumer que la méthode en question, telle qu'elle a été ébauchée par M. Weiler, n'a pas encore reçu sa forme définitive, et qu'il sera possible de la simplifier sous plus d'un rapport. M. Weiler affirme qu'elle procure de grands avantages au point de vue des inégalités séculaires; mais les indications qu'il a données à ce sujet sont encore trop vagues pour qu'on puisse se rendre un compte exact de la réalité de ces avantages.