Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 265-270

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_265_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PETERSEN (J.). — MÉTHODES ET THÉORIES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES, AVEC APPLICATION A PLUS DE 400 PROBLÈMES, traduit par O. CHEMIN. Paris, Gauthier-Villars, 1880; petit in-4°, 111 pages.

Nous sommes un peu en retard pour signaler à nos lecteurs cet Ouvrage excellent et original qui, publié en 1866 et en langue danoise [1], a fait peu à peu son chemin et sera bientôt traduit en anglais, en allemand et en italien. Voici comment l'auteur définit dans sa Préface le but qu'il a voulu atteindre :

« L'Ouvrage actuel a pour objet d'essayer d'apprendre aux élèves comment on doit attaquer un problème de construction. Après avoir résolu un grand nombre de questions, les unes originales, les autres extraites des nombreuses collections existantes, j'ai essayé d'analyser l'enchaînement des idées qui conduisent à la solution de chacune d'elles et d'en faire une classification sous forme de règles générales. S'il se trouve que mes solutions diffèrent de celles des autres auteurs et si, dans certains cas, elles paraissent plus compliquées, c'est que j'ai préféré celles qui sont méthodiques à celles qui semblent dues à un hasard heureux. L'objet que j'ai principalement en vue, c'est la méthode; dans la plupart des cas je n'ai fait qu'indiquer la clef de la solution et j'en ai laissé la discussion détaillée au lecteur ou au professeur. »

Ce que l'auteur ne dit pas, c'est qu'il a résolu bien des problèmes d'une manière absolument nouvelle et très intéressante. Son petit Recueil mérite d'être accueilli avec faveur; ce n'est pas une compilation, un ouvrage de seconde main : en bien des points M. Petersen a fait œuvre de géomètre.

M. Zeuthen a bien voulu nous envoyer la liste des questions proposées depuis 1872 aux candidats à l'École Polytechnique danoise, questions qui ont été résolues par la plupart des candidats. Le simple énoncé de ces questions prouvera quels services le

---

[1] *Methoder og Theorier til Lösning af geometriske Konstruktionsopgaver, anvendte paa c. 400 Opgaver*. Kjöbenhavn.

livre de M. Petersen a rendus à l'enseignement géométrique dans son pays. Voici quels sont ces sujets de composition :

1872. *Construire un trapèze, connaissant les diagonales, l'angle qu'elles font entre elles et l'angle formé par les côtés non parallèles.*

1873. *Construire un triangle* ABC, *le côté* BC *devant être tangent à un cercle donné, le côté* CA *devant être tangent à un autre cercle en* A, *pendant que le troisième côté* AB, *prolongé s'il est nécessaire, passe par un des deux centres de similitude des deux cercles, et l'angle* C *étant égal à* 60°. *Combien y a-t-il de solutions?*

1874. *Inscrire à un secteur de cercle* ABC *un secteur abc semblable au premier, de telle manière que le centre c se trouve en un point donné de l'arc de cercle* AB.

1875. *Construire un quadrilatère* ABCD, *connaissant les deux distances des milieux des côtés opposés, l'angle formé par les deux droites joignant ces milieux et deux angles du quadrilatère, ces deux angles pouvant être soit deux angles consécutifs, soit deux angles opposés.*

1876. *Un cercle et deux droites étant donnés dans un plan, construire une droite, de direction donnée, rencontrant le cercle en deux points* A, B, *et les droites en deux points a, b, tels que les distances* Aa, Bb *soient égales en grandeur.*

Comment résout-on la question si l'on remplace le cercle donné par une ellipse?

1877. *Construire un trapèze, connaissant les deux diagonales, la distance de leurs milieux et la hauteur.*

1878. 1° *Construire un triangle dont les côtés sont parallèles à des droites données et dont les sommets se trouvent sur des droites données.*

2° *Mener une droite parallèle à une droite donnée de telle manière qu'elle divise dans le même rapport deux côtés opposés d'un quadrilatère plan. Montrer que la même question n'est résoluble pour un quadrilatère gauche que dans le cas où la* *droite donnée se trouve dans un plan parallèle aux côtés qu'on ne divise pas.*

1879. 1° *Construire un triangle dont on connaît un angle, le côté opposé et le rapport des deux autres côtés.*

2° *Construire un quadrilatère* ABCD *circonscriptible à un cercle, connaissant la différence des angles opposés* B *et* D, *la différence des côtés* AB *et* AD *et les rapports* $\frac{OB}{OD}$ *et* $\frac{OA}{OC}$ *des distances du centre du cercle inscrit aux sommets opposés.*

Les candidats à l'École Polytechnique ne connaissant que la Géométrie élémentaire, il faut convenir avec M. Zeuthen que la possibilité d'avoir de bonnes solutions de ces questions témoigne favorablement des bons fruits qu'a portés en Danemark la première édition du Livre de M. Petersen. Nous espérons que, dans sa traduction française, ce Livre sera consulté par tous nos professeurs, et nous n'hésitons pas à le leur recommander sans restriction.

WORPITZKY (J.). — LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG. 1 vol in-8°, 794 pages. Berlin, 1880.

M. Worpitzky enseigne le Calcul différentiel et intégral à la *Kriegs-Akademie,* et c'est le résumé de ses leçons qu'il donne au public.

Il est intéressant de voir, sur cet exemple, quelle peut être la nature de l'enseignement scientifique dans une école pratique d'Allemagne. On est tout d'abord frappé, en parcourant le livre de M. Worpitzky, de l'absence de préoccupations utilitaires : évidemment le but principal de l'auteur n'est pas de rendre ses lecteurs familiers avec les procédés de calcul qu'ils pourront avoir à appliquer pour la solution de problèmes pratiques, mais bien de leur donner des idées justes sur les éléments de la Science et de leur inspirer tout au moins le goût de la haute science. Au surplus, il s'explique longuement dans sa Préface sur l'importance qu'il attribue à l'étude des Mathématiques pour la formation et le développement des intelligences, et c'est ce développement qui le préoccupe tout d'abord.

M. Worpitzky n'a pas cru devoir séparer le Calcul intégral du Calcul différentiel; il est certain que cette séparation est souvent artificielle. La notion d'intégrale définie ou indéfinie est liée intimement à la notion de dérivée et il est parfois incommode de vouloir se passer de cette notion pour la démonstration de certains théorèmes que l'on regarde habituellement comme appartenant au Calcul différentiel. On remarquera encore que l'auteur a exclu systématiquement la notion de différentielle, et, à la vérité, cette notion n'a guère d'utilité ([1]) tant qu'on n'aborde pas la théorie des équations différentielles.

Après avoir précisé le sens du mot *fonction*, l'auteur définit les dérivées et donne les règles principales de différentiation; il établit ensuite la notion d'intégrale définie, en se bornant d'ailleurs au cas où l'on peut décomposer l'intervalle compris entre les limites d'intégration en intervalles partiels, en nombre fini, tels que, dans chacun d'eux, la fonction soit finie, continue et varie dans le même sens. Il donne ensuite les règles élémentaires d'intégration; nous noterons, en passant, la forme générale que M. Worpitzky donne à la règle d'intégration par parties, règle qui consiste pour lui dans l'égalité :

$$\begin{aligned}\int f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\,dx &= \int f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\,\partial x \\ &\quad - \sum_{i=1}^{i=n} \int \left[\frac{\partial}{\partial u_i}\int f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\,\partial x\right]\frac{du_i}{dx}\,dx,\end{aligned}$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des fonctions quelconques de x.

Il traite ensuite de la répétition des opérations de différentiation et d'intégration; puis il aborde le théorème de Taylor : ce théorème est démontré en donnant au reste la forme d'une intégrale définie, puis appliqué au développement de $(1 + x)^m$; ce dé-

([1]) Nous ne pouvons accepter sans réserves cette assertion de notre savant collaborateur. J. H.

veloppement conduit à la notion de la fonction exponentielle, et cette dernière à la notion de la fonction logarithmique. L'auteur fait avec soin l'étude de la façon dont se comporte, pour x infini, la fonction

$$\varphi(x, n, p) = l^0 x \, l^1 x \, l^2 x \ldots l^{n-1} x (l^n x)^{1+p},$$

où

$$l^0 x = x, \quad l^1 x = lx, \quad l^2 x = llx, \quad \ldots$$

et où p est supérieur à -1 : cette étude est faite en vue de la démonstration des règles très générales que fournit la considération de cette fonction pour la détermination de la convergence soit des intégrales à limites infinies, soit des intégrales relatives à des fonctions qui passent par l'infini entre les limites d'intégration, soit des séries infinies ; la considération de la même fonction, lorsqu'il y a divergence, conduit, dans des cas très étendus, à des renseignements importants sur la nature de la divergence : toutes ces règles résultent sans difficulté des identités évidentes

$$\int_a^x \frac{dx}{\varphi(x, n, p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(l^n a)^p} - \frac{1}{(l^n x)^p}\right],$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\varphi(x, n, p)} = \frac{1}{p(l^n a)^p} \quad (p > 0),$$

$$\int_a^x \frac{dx}{\varphi(x, n, 0)} = l^{n+1} x - l^{n+1} a.$$

L'auteur traite ensuite des séries et des produits infinis, de leur convergence conditionnelle ou inconditionnelle, des séries à double entrée, de la différentiation et de l'intégration des séries dont les termes sont fonctions d'une variable.

Passant ensuite à la considération des fonctions de variables imaginaires, il prend l'egalité

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

pour point de départ de la définition des fonctions circulaires, fonctions dont l'étude est faite indépendamment de leur signification trigonométrique ; il donne leurs développements en séries, en produits infinis, et les développements de leurs puissances en séries de Fourier. Il traite ensuite de la différentiation et de l'intégration des fonctions de variables imaginaires, ainsi que de leur développement en série suivant les puissances de la variable, et termine ce Chapitre en établissant les propriétés essentielles des équations algébriques entières : l'existence d'une racine, pour une telle équation $f(x) = 0$, est prouvée par l'absurdité à laquelle conduirait l'égalité

$$\frac{2\pi i}{f(z)} = \int \frac{dx}{(x-z)f(z)},$$

appliquée à un contour circulaire infiniment grand, si la fonction $f(z)$ ne s'annulait pour aucune valeur finie de z.

Dans le reste du Volume, où l'on trouvera l'étude des formes illusoires, la décomposition des fonctions rationnelles en éléments simples, l'intégration des différentielles rationnelles binômes, algébriques et transcendants, enfin la recherche des maxima et des minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables, il convient de signaler un chapitre entier consacré à la formule sommatoire de Maclaurin.

Enfin un Appendice contient les éléments de la Géométrie analytique et les applications géométriques les plus simples du Calcul différentiel et intégral.