BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

V. LIGUINE

Sur les aires des courbes anallagmatiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 250-264

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_250_0>

SUR LES AIRES DES COURBES ANALLAGMATIQUES (¹);

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

1. On peut définir une courbe anallagmatique comme l'enveloppe d'une série de cercles décrits de tous les points d'une certaine courbe (a) et qui coupent orthogonalement un cercle fixe (p). Le nom d'*anallagmatiques* a été donné à ces courbes par M. Moutard, d'après leur propriété remarquable de se transformer en elles-mêmes par rayons vecteurs réciproques, quand on choisit le centre du cercle fixe (p) pour pôle et le carré de son rayon pour paramètre de transformation, ou, en d'autres termes, quand on prend le cercle (p) pour cercle d'inversion. On appelle *déférente* la courbe (a), lieu des centres des cercles enveloppés.

Depuis les importants travaux de M. Moutard, qui constituent le point de départ de la théorie générale de ces courbes, les anallagmatiques n'ont pas cessé d'attirer l'attention des géomètres. Il ne sera donc peut-être pas dépourvu d'intérêt d'exposer quelques propriétés relatives aux aires de ces courbes, qui ne paraissent pas encore avoir été énoncées et qui, je tiens à le constater, m'ont été suggérées en grande partie par l'étude du beau Mémoire de M. Mannheim, *Sur les arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles* (²).

Les aires des anallagmatiques dépendent en général de transcendantes compliquées. Mais il existe quelques relations générales très simples entre l'aire d'une anallagmatique et celle de la podaire de sa déférente prise par rapport au centre du cercle fixe (p), relations qui permettent, dans beaucoup de cas particuliers, de déterminer certaines parties des aires des anallagmatiques. Ce sont ces relations que je me propose d'établir dans cette Note.

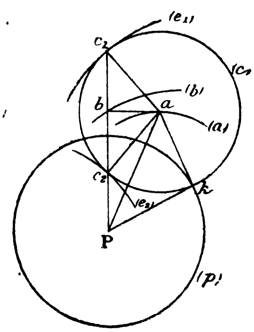
2. Soient (p) (*fig.* 1) un cercle fixe, P son centre, α son rayon et

(¹) Les principaux résultats de cette Note ont été communiqués à la session d'Alger de l'Association française pour l'avancement des Sciences.

(²) *Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. VII, p. 121, année 1862.

(a) une courbe fixe quelconque; imaginons une série de cercles décrits de tous les points de (a) et coupant orthogonalement la circonférence (p). L'enveloppe de tous ces cercles variables sera une courbe qui se compose de deux branches (e_1), (e_2). M. Mannheim

Fig. 1.



a démontré [1] qu'en prenant le point P pour pôle cette enveloppe a pour équation polaire

$$r^2 - 2\Omega r + \alpha^2 = 0, \tag{1}$$

où r est le rayon vecteur et Ω une fonction de l'angle polaire ω telle que la courbe exprimée dans le même système de coordonnées par l'équation

$$\rho = \Omega \tag{2}$$

représente la podaire (b) de la courbe (a) relativement au point P.

En effet [2], soit (c) un des cercles enveloppés et a son centre; cherchons les points où (c) touche son enveloppe. Ces points sont les intersections de (c) avec un cercle infiniment voisin (c'), qui a un point a' de (a), infiniment voisin de a, pour centre, et qui coupe orthogonalement le cercle (p). Ce dernier cercle étant orthogonal aux cercles (c) et (c'), son centre P appartient à l'axe radical de (c), (c'), et, comme cet axe radical doit aussi être perpendiculaire à la ligne des centres aa', il faut, pour avoir cet axe,

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 121; 1862.

(2) Je reproduis ici l'élégante démonstration de M. Mannheim.

abaisser du point P une perpendiculaire sur aa'. A la limite, la droite aa' devient tangente à la courbe (a) en a, et la perpendiculaire Pb, abaissée de P sur cette tangente, coupe le cercle (c) aux deux points c_1, c_2, où (c) touche son enveloppe (e_1), (e_2).

Le triangle $c_1 a c_2$ étant isoscèle, on a

$$Pc_1 = Pb + bc_1 = Pb + bc_2 = Pb + Pb - Pc_2 = 2Pb - Pc_2$$

ou

$$Pc_1 + Pc_2 = 2Pb. \tag{3}$$

D'autre part, les cercles (p), (c) se coupant orthogonalement, le rayon Pk de (p) est tangent à (c) au point de leur intersection k, et l'on a, d'après un théorème connu,

$$Pc_1 . Pc_2 = \overline{Pk}^2. \tag{4}$$

Mais $Pk = \alpha$ et $Pb = \rho = \Omega$, puisque la droite Pb est le rayon vecteur du point b de la podaire (b) de (a), représentée par l'équation (2). On conclut donc des équations (3) et (4) que les longueurs Pc_1, Pc_2 sont les racines de l'équation (1) répondant à une valeur déterminée de l'angle polaire ω. En faisant varier le point a sur (a), ou, ce qui revient au même, le point b sur (b), et par suite la valeur de ω, les points c_1, c_2 décrivent la courbe (e_1), (e_2). Par conséquent, l'équation polaire de cette courbe est bien l'équation (1).

On voit donc, en se reportant à notre définition des anallagmatiques, que toutes ces courbes sont comprises dans l'équation (1), l'équation (2) étant l'équation de la podaire de la déférente par rapport au centre du cercle fixe.

La forme de l'équation (1) montre en outre qu'en y changeant ρ en $\frac{\alpha^2}{\rho'}$ on obtient la même courbe, ce qui constitue une autre propriété fondamentale des anallagmatiques, mentionnée précédemment.

3. Nous avons donc à nous occuper des aires des courbes représentées par l'équation (1).

Soient $r_{1,\omega'}$ et $r_{2,\omega'}$ les valeurs des racines de cette équation répondant à une même valeur déterminée ω' de l'angle ω et $r_{1,\omega''}$, $r_{2,\omega''}$ les valeurs de ces racines répondant à une autre valeur déterminée ω'' de ω. Considérons les aires des deux secteurs limités, l'un par la courbe et les rayons vecteurs $r_{1,\omega'}$, $r_{1,\omega''}$, l'autre par la courbe et les rayons vecteurs $r_{2,\omega'}$, $r_{2,\omega''}$; nous nommerons ces aires *correspondantes,* et nous les désignerons respectivement par A_1 et A_2. On a

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} r_1^2\,d\omega, \quad A_2 = \frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} r_2^2\,d\omega,$$

$$r_1 = \Omega + \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}, \quad r_2 = \Omega - \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2},$$

d'où l'on déduit facilement

$$A_1 = \int_{\omega'}^{\omega'} \Omega^2 d\omega - \frac{1}{2}\alpha^2(\omega'' - \omega') + \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\,d\omega,$$

$$A_2 = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2 d\omega - \frac{1}{2}\alpha^2(\omega'' - \omega') - \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\,d\omega,$$

ce qui donne pour la différence et la somme des aires correspondantes d'une anallagmatique

$$(5)\qquad A_1 - A_2 = 2\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\,d\omega,$$

$$(6)\qquad A_1 + A_2 = 2\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2 d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega').$$

4. Les formules (5) et (6) peuvent être obtenues facilement par des considérations géométriques.

Considérons les aires correspondantes infiniment petites dA_1 et dA_2 comprises entre chacune des branches (e_1), (e_2), la corde de contact Pc_1 et la corde de contact du cercle (c'), infiniment voisin de (c). On a

$$dA_1 = \frac{1}{2}\overline{Pc_1}^2.d\omega, \quad dA_2 = \frac{1}{2}\overline{Pc_2}^2.d\omega.$$

Donc

$$dA_1 - dA_2 = \frac{1}{2}\left(\overline{Pc_1}^2 - \overline{Pc_2}^2\right)d\omega = \frac{1}{2}(Pc_1 + Pc_2)(Pc_1 - Pc_2)\,d\omega,$$

ou, en vertu de l'équation (3),

$$dA_1 - dA_2 = Pb . c_1 c_2 d\omega.$$

Mais $c_1 c_2 = 2 bc_2$; donc

$$dA_1 - dA_2 = 2 Pb . bc_2 d\omega,$$

d'où, en intégrant entre les limites ω' et ω'', on trouve

$$A_1 - A_2 = 2 \int_{\omega'}^{\omega''} Pb . bc_2 d\omega.$$

Or, $Pb = \rho = \Omega$; en outre, les deux cercles (p) et (c) se coupant orthogonalement, on a

$$\begin{aligned} \overline{bc_2}^2 &= \overline{ac_2}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{ak}^2 - \overline{ab}^2 \\ &= \overline{Pa}^2 - \overline{Pk}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{Pb}^2 - \overline{Pk}^2 = \Omega^2 - \alpha^2. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule (5). Pour obtenir la formule (6), prenons la somme

$$dA_1 + dA_2 = \frac{1}{2}\left(\overline{Pc_1}^2 + \overline{Pc_2}^2\right) d\omega.$$

En vertu des relations (3) et (4), on trouve

$$\overline{Pc_1}^2 + \overline{Pc_2}^2 = 4\overline{Pb}^2 - 2Pc_1 . Pc_2 = 4\overline{Pb}^2 - 2\alpha^2$$

et

$$dA_1 + dA_2 = 2\overline{Pb}^2 . d\omega - \alpha^2 d\omega,$$

ou, en intégrant,

$$A_1 + A_2 = 2 \int_{\omega'}^{\omega''} \overline{Pb}^2 . d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega'),$$

expression identique à (6), puisque $Pb = \Omega$.

5. Occupons-nous de l'interprétation de la formule (6). L'intégrale $\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2 d\omega$ qui y figure est le double de l'aire comprise entre la podaire (2) et les deux rayons vecteurs qui limitent les

aires correspondantes A_1 et A_2 de l'anallagmatique. Le dernier terme du second membre de l'équation (6) représente le double de l'aire du secteur circulaire détaché dans le cercle fixe (p) par les mêmes rayons vecteurs. Par conséquent, si l'on nomme la première aire, pour abréger, l'*aire correspondante de la podaire*, on peut, d'après l'équation (6), énoncer ces conclusions :

I. *La somme des aires correspondantes d'une anallagmatique est exprimable en aire correspondante de la podaire de la déférente; cette somme est donc exprimable en termes finis quand l'aire correspondante de la podaire de la déférente est exprimable en termes finis.*

La demi-somme des aires correspondantes d'une anallagmatique est égale à la différence du double de l'aire correspondante de la podaire de la déférente et de l'aire du secteur correspondant du cercle fixe.

L'équation (6) peut encore être présentée sous la forme

$$\left(\frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} r_1^2\,d\omega - \frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2\,d\omega\right) - \left(\frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2\,d\omega - \frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} r_2^2\,d\omega\right) = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2\,d\omega - \alpha^2(\omega''-\omega').$$

Les quantités entre parenthèses expriment les aires comprises entre chaque branche (e_1), (e_2) de l'anallagmatique, la podaire (b) et deux rayons vecteurs déterminés issus du pôle P. On a donc, en désignant ces aires par ε_1 et ε_2, la relation

$$(7) \qquad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2\,d\omega - \alpha^2(\omega''-\omega'),$$

d'où l'on conclut :

II. *La différence des aires comprises entre les deux branches d'une anallagmatique, la podaire de sa déférente et deux rayons vecteurs quelconques issus du centre du cercle fixe est exprimable en aire correspondante de la podaire de la déférente; cette différence est donc exprimable en termes* *finis quand l'aire correspondante de la podaire de la déférente est exprimable en termes finis.*

Cette différence est égale au double de l'aire comprise entre la podaire, la circonférence fixe et les deux rayons vecteurs extrêmes issus du centre de cette circonférence.

M. Ribaucour, en considérant les aires N_1, N_2 comprises entre les deux branches de l'anallagmatique, les normales extrêmes et la déférente, a démontré la relation (¹)

$$N_1 - N_2 = \int_{\omega'}^{\omega''} \rho'^2 d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega'), \tag{8}$$

où ρ' est le rayon vecteur de la déférente issu du centre du cercle fixe. L'intégrale $\int_{\omega'}^{\omega''} \rho'^2 d\omega$ étant le double de l'*aire correspondante* de la déférente, c'est-à-dire de l'aire du secteur compris entre la déférente et deux rayons vecteurs menés du pôle aux pieds des normales extrêmes considérées, l'équation (8) fait voir que:

III. *La différence des aires comprises entre les deux branches d'une anallagmatique, les normales extrêmes et la déférente est exprimable en aire correspondante de la déférente; par conséquent, cette différence est exprimable en termes finis quand l'aire correspondante de la déférente est exprimable en termes finis.*

Cette différence est égale au double de l'aire comprise entre la déférente, la circonférence fixe et deux rayons vecteurs menés du centre de cette circonférence aux pieds des normales extrêmes.

6. Appliquons ces résultats généraux à quelques courbes particulières.

Considérons en premier lieu les ovales de Descartes, courbes anallagmatiques dont la déférente est un cercle. Rappelons d'abord quelques propriétés générales de ces courbes.

(¹) *Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères* (*Nouvelle Correspondance mathématique,* t. V, p. 339, année 1879).

La courbe complète se compose de deux ovales conjugués dont l'un renferme complètement l'autre et qui ont un axe de symétrie commun; elle possède trois foyers disposés sur cet axe; un foyer se trouve au dehors du plus grand ovale et les deux autres sont situés dans l'intérieur du plus petit. L'équation polaire des ovales de Descartes, l'un des trois foyers étant pris pour pôle ([1]) et l'axe de la courbe pour axe polaire, est de la forme

$$(9) \qquad r^2 - 2r(a + b\cos\omega) + \alpha^2 = 0,$$

où a, b et α sont des constantes. Le cercle qui sert de déférente a son centre sur l'axe de la courbe à la distance b du pôle, et son rayon est égal à a; α désigne toujours le rayon du cercle fixe.

On peut faire voir, par une discussion de l'équation (9), que les deux racines de cette équation répondant à une valeur déterminée de l'angle ω sont les rayons vecteurs:

1° De deux points situés sur *l'un et l'autre* ovale et d'un *même* côté du foyer, lorsque c'est le foyer *intérieur extrême* qui est pris pour pôle du système des coordonnées;

2° De deux points situés sur *l'un et l'autre* ovale et de *différents* côtés du foyer, lorsque le pôle est au foyer *moyen;*

3° De deux points situés sur le *même* ovale, lorsque le pôle est au foyer *extérieur*.

Ces conclusions tiennent à ce que l'équation polaire (9) ne représente en réalité que l'ensemble de deux moitiés des ovales conjugués, moitiés disposées d'un même côté par rapport à l'axe quand le pôle est au foyer intérieur extrême, et de côtés différents quand le pôle se trouve au foyer moyen ou au foyer extérieur. Pour avoir, dans chaque cas, l'équation de l'autre moitié de la courbe complète, il faut changer de signe devant le terme contenant la constante a, la courbe complète étant ainsi représentée par les deux équations

$$(10) \qquad \begin{cases} r^2 - 2r(b\cos\omega + a) + \alpha^2 = 0, \\ r^2 - 2r(b\cos\omega - a) + \alpha^2 = 0, \end{cases}$$

([1]) Les ovales de Descartes peuvent donc être considérés de trois manières différentes comme anallagmatiques ayant une circonférence pour déférente.

telles que les points déterminés par l'une d'elles sont les images par réflexion, relativement à l'axe de la courbe, des points déterminés par l'autre équation. On est conduit à ces deux équations (10) en prenant l'équation des ovales de Descartes en coordonnées rectangulaires, dont l'origine se trouve à l'un des foyers et l'axe des x est dirigé suivant l'axe de la courbe, et en y substituant aux coordonnées rectangulaires les coordonnées polaires, ayant la même origine et l'axe des x pour axe polaire; on trouve ainsi une équation du quatrième degré

$$(11) \qquad (r^2 - 2br\cos\omega + \alpha^2)^2 - 4a^2r^2 = 0,$$

qui se décompose en deux équations (10) [1].

7. Puisque la déférente des ovales de Descartes, considérés comme courbe anallagmatique, est une circonférence, et puisque la podaire d'une circonférence est une conchoïde de cercle ou un limaçon de Pascal, la ligne (b) est, dans ce cas particulier, une conchoïde circulaire; son équation est, d'après l'équation (9),

$$(12) \qquad \rho = a + b\cos\omega.$$

En vertu du premier théorème général sur les aires des anallagmatiques, la somme des aires correspondantes des ovales de Descartes est donc exprimable en aire correspondante de conchoïde circulaire, et, comme cette dernière aire est exprimable en termes finis, il doit en être de même de la somme des aires correspondantes des ovales de Descartes.

Pour obtenir l'expression de cette somme, portons la valeur (12) de Ω dans la formule générale (6); il vient

$$A_1 + A_2 = 2\int_{\omega'}^{\omega''} (a + b\cos\omega)^2\, d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega').$$

En effectuant les intégrations indiquées, on trouve, après quelques

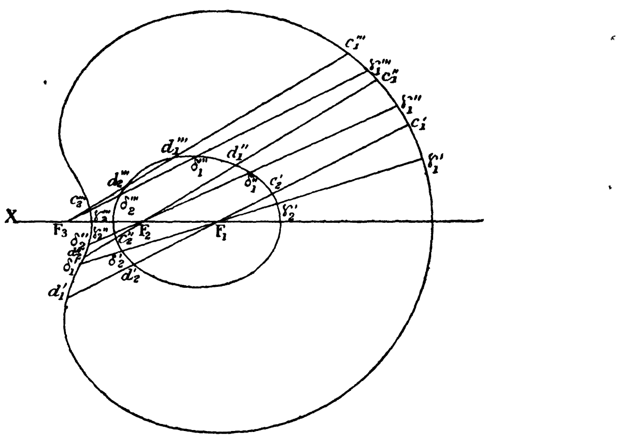
[1] J'étais arrivé à ces résultats ainsi qu'à d'autres, concernant les aires des ovales de Descartes, lorsque je pris connaissance du très intéressant Mémoire de M. S. Roberts (*On the ovals of Descartes*), où ils se trouvent déjà exposés et auquel je renvoie par conséquent le lecteur. Voir *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. III, p. 106.

réductions,

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} A_1 + A_2 = {} & (2a^2 + b^2 - \alpha^2)(\omega'' - \omega') + 4ab(\sin\omega'' - \sin\omega') \\ & + \frac{1}{2} b^2 (\sin 2\omega'' - \sin 2\omega'). \end{aligned} \right.$$

D'après ce qui a été dit précédemment sur les racines de l'équation (9), on devra entendre ici sous aires correspondantes A_1, A_2 les aires telles que $F_1 c'_1 \gamma'_1 F_1$, $F_1 c'_2 \gamma'_2 F_1$ (*fig.* 2), quand l'équation po-

Fig. 2.



laire (9) de la courbe est rapportée au foyer intérieur extrême F_1 comme pôle, les aires telles que $F_2 c''_1 \gamma''_1 F_2$, $F_2 c''_2 \gamma''_2 F_2$, quand l'équation (9) est rapportée au foyer moyen F_2, et les aires telles que $F_3 c'''_1 \gamma'''_1 F_3$, $F_3 c'''_2 \gamma'''_2 F_3$, quand l'équation (9) est rapportée au foyer extérieur F_3. Pour avoir, au lieu des sommes des aires

$$F_1 c'_1 \gamma'_1 F_1 + F_1 c'_2 \gamma'_2 F_1,\quad F_2 c''_1 \gamma''_1 F_2 + F_2 c''_2 \gamma''_2 F_2,\quad F_3 c'''_1 \gamma'''_1 F_3 + F_3 c'''_2 \gamma'''_2 F_3,$$

respectivement les sommes des aires

$$F_1 d'_1 \delta'_1 F_1 + F_1 d'_2 \delta'_2 F_1,\quad F_2 d''_1 \delta''_1 F_2 + F_2 d''_2 \delta''_2 F_2,\quad F_3 d'''_1 \delta'''_1 F_3 + F_3 d'''_2 \delta'''_2 F_3,$$

on n'aura qu'à changer a en $-a$ dans la formule (13), conformément à ce qui a été dit au n° 6 sur les équations (10).

Au moyen de la formule (13) on peut déterminer la somme S des aires totales des deux ovales conjugués. En supposant le pôle au foyer intérieur extrême, il faudra poser $\omega' = 0$, $\omega'' = \pi$ et doubler le résultat, puisque chacune des deux équations (10) ne représente que l'ensemble des moitiés des ovales conjugués. On trouve ainsi

$$(14) \qquad S = (2a^2 + b^2 - \alpha^2)\,2\pi.$$

Cette formule admet une interprétation géométrique simple. Les ovales de Descartes possèdent une tangente double et deux points de rebroussement coïncidant avec les points circulaires à l'infini. Les tangentes à la courbe en ces points de rebroussement se coupent en un point nommé *foyer triple* (¹), dont les coordonnées sont $\rho = b$, $\omega = 0$. Si l'on décrit de ce point comme centre un cercle qui passe par les deux points de contact de la tangente double, le rayon de ce cercle sera égal à $\sqrt{2a^2 + b^2 - \alpha^2}$ (²). L'équation (14) exprime donc que *la somme des aires totales des deux ovales conjugués est le double de l'aire de la circonférence ayant le foyer triple pour centre et passant par les points de contact de la tangente double.* Ce résultat a été déjà obtenu par M. S. Roberts, qui est arrivé aussi, quoique par une voie différente, à la formule (13) (³).

(¹) *Voir* Salmon, *Higher plane curves.*

(²) En effet, si l'on remplace dans l'équation (11) les coordonnées polaires par des coordonnées rectangulaires ayant la même origine et l'axe des x dirigé suivant l'axe de la courbe, on aura

$$(x^2 + y^2 - 2bx + \alpha^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$[(x - b)^2 + y^2 - 2a^2 - b^2 + \alpha^2)]^2 = 4a^2(a^2 - \alpha^2 + 2bx).$$

Cette équation montre que la droite

$$a^2 - \alpha^2 + 2bx = 0$$

est la tangente double, et le cercle dont il s'agit a pour équation

$$(x - b)^2 + y^2 - 2a^2 - b^2 + \alpha^2 = 0.$$

Or, le centre de ce cercle est au point ($x = b$, $y = 0$) et son rayon est égal à

$$\sqrt{2a^2 + b^2 - \alpha^2}.$$

(³) *Voir* le Mémoire cité de M. S. Roberts, p. 123.

Lorsque $\alpha = 0$, les ovales de Descartes dégénèrent en une conchoïde circulaire dont l'équation est

$$(15) \qquad r = 2(a + b\cos\omega),$$

et la formule (14) donne, pour la somme des aires totales de la courbe et du nœud de cette conchoïde si $a < b$, ou pour l'aire totale de la courbe si $a > b$,

$$S_1 = (2a^2 + b^2)2\pi,$$

expression connue que l'on obtient soit en évaluant l'aire de la conchoïde (15), considérée comme épicycloïde ([1]), soit en calculant cette aire directement par les règles du Calcul intégral.

La différence $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ (n° 5) des aires comprises entre deux branches correspondantes des ovales de Descartes représentées par l'une des équations (10), la conchoïde (12) servant de podaire au cercle déférent et deux rayons vecteurs issus du centre du cercle fixe et formant les angles ω', ω'' avec l'axe s'exprime aussi en termes finis, d'après le théorème II du n° 5. La formule générale (7) donne, pour cette différence,

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = & \left(a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \alpha^2\right)(\omega'' - \omega') \\ & + 2ab(\sin\omega'' - \sin\omega') + \frac{1}{4}b^2(\sin 2\omega'' - \sin 2\omega'), \end{aligned} \right.$$

et pour la différence U des aires totales, en posant $\omega' = 0$, $\omega'' = \pi$ et doublant le résultat,

$$U = (2a^2 + b^2 - 2\alpha^2)\pi,$$

ce qu'on peut écrire

$$(17) \qquad U = (2a^2 + b^2 - \alpha^2)\pi - \pi\alpha^2.$$

Cette formule exprime que la différence U est égale à la différence des aires de deux cercles : du cercle considéré précédem-

---

([1]) *Voir* mon Mémoire *Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. II, année 1878).

ment, ayant le foyer triple pour centre et passant par les points de contact de la tangente double, et du cercle fixe orthogonal à toutes les circonférences enveloppées par les ovales.

8. Comme second exemple, considérons l'anallagmatique qui a pour déférente une ellipse dont le centre coïncide avec le centre du cercle fixe. La podaire d'une ellipse relative à son centre a pour équation, en désignant par a et b les deux demi-axes et en prenant le grand axe pour axe polaire,

$$\rho^2 = a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega.$$

En remplaçant Ω^2 par cette valeur dans les formules (6) et (7), on obtient, après toutes les intégrations et réductions,

$$A_1 + A_2 = (a^2 + b^2 - \alpha^2)(\omega'' - \omega') + \frac{a^2 - b^2}{2}(\sin 2\omega'' - \sin 2\omega'),$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2\alpha^2)(\omega'' - \omega') + \frac{a^2 - b^2}{4}(\sin 2\omega'' - \sin 2\omega').$$

Posons, dans la première formule, $\omega' = 0$, $\omega'' = \pi$, et doublons le résultat; nous aurons, pour la somme S des aires totales des deux branches,

$$S = (a^2 + b^2 - \alpha^2)\, 2\pi.$$

Dans le cas particulier où $\alpha = a - b$, il vient

$$S = 4\pi ab;$$

donc, dans ce cas, la somme des aires totales est égale à quatre fois l'aire de l'ellipse servant de déférente.

En posant $a = b$ dans les formules précédentes, on arrive au cas où la déférente est un cercle concentrique au cercle fixe; l'anallagmatique se compose alors de deux cercles concentriques aux premiers.

9. Considérons enfin, comme dernière application, l'anallagmatique ayant pour déférente la spirale logarithmique

$$\rho' = ab^{\omega},$$

dont le pôle coïncide avec le centre du cercle fixe. En vertu de cette propriété que la tangente à la spirale logarithmique fait un angle constant avec le rayon vecteur passant par le point de contact, on s'assure facilement que la podaire de cette spirale relative à son pôle est la même courbe tournée d'un certain angle autour de ce pôle et que l'équation de cette podaire est

$$\rho = cab^{\omega},$$

c désignant le sinus de l'angle constant formé par la tangente et le rayon vecteur. En portant cette valeur de ρ ou Ω dans les formules (6) et (7), on obtient, toutes les intégrations effectuées,

$$A_1 + A_2 = \frac{a^2 c^2}{\log b}(b^{2\omega''} - b^{2\omega'}) - \alpha^2(\omega'' - \omega'),$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{a^2 c^2}{\log b}(b^{2\omega''} - b^{2\omega'}) - \alpha^2(\omega'' - \omega').$$

La somme des aires correspondantes et la différence des aires ε_1, ε_2 de l'anallagmatique considérée s'expriment donc en termes finis.

10. Dans le n° 5, nous avons cherché comment on peut exprimer la somme des aires correspondantes A_1, A_2 ou la différence des aires ε_1, ε_2 d'une anallagmatique pour une déférente donnée. On peut se proposer le problème inverse et chercher quelle doit être la déférente pour que la somme des aires correspondantes A_1, A_2 ou la différence des aires ε_1, ε_2 d'une anallagmatique s'exprime en aires d'une courbe donnée.

Cherchons, par exemple, la déférente d'une anallagmatique pour laquelle la somme des aires $A_1 + A_2$ ou la différence des aires $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ comprises entre deux rayons vecteurs issus du centre du cercle fixe s'exprime en portions de cercle. D'après les formules générales (6) et (7), il suffit de prendre pour déférente une courbe dont la podaire par rapport à un point de son plan soit un cercle ou une droite et de faire coïncider ce point avec le centre du cercle fixe. On sait, par exemple, que l'ellipse et l'hyperbole ont pour podaire relativement à l'un de leurs foyers un cercle et que la parabole a pour podaire relativement à son foyer une droite. On peut donc prendre pour la déférente cherchée une ellipse, une hyperbole ou une parabole ayant le centre du cercle fixe pour foyer. Par conséquent, *la somme des aires correspondantes et la différence des aires* ε_1, ε_2 *d'une anallagmatique ayant pour déférente une conique dont un foyer est au centre du cercle fixe est exprimable en aires de cercles.*

Les exemples considérés dans les n[os] 6-10 suffiront pour faire voir le parti qu'on peut tirer dans certains cas des théorèmes généraux énoncés dans cette Note.