BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

A. LAISANT

Sur les séries récurrentes, dans leurs rapports avec les équations

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, n° 1 (1881), p. 218-249

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_218_1>

MÉLANGES.

SUR LES SÉRIES RÉCURRENTES, DANS LEURS RAPPORTS AVEC LES ÉQUATIONS;

PAR M. A. LAISANT.

Préliminaires.

Je me propose d'examiner à un point de vue purement algébrique certaines propriétés de fonctions analogues à celles qu'a étudiées M. Édouard Lucas dans une série d'articles de la *Nouvelle Correspondance mathématique* en 1877 et 1878, articles qui ont été réunis ensuite en une Brochure fort intéressante (¹).

Les fonctions U_n et V_n de M. Lucas, qui dérivent de l'équation du second degré, ont surtout pour objet des recherches arithmétiques, comme l'indique le titre même de son étude et comme il a soin d'en prévenir le lecteur dès le début. On peut même dire que l'auteur a ouvert là une voie nouvelle et fort originale pour ceux qui s'occupent de la science des nombres; mais, par cela même, il est obligé de faire certaines hypothèses sur les coefficients de l'équation d'où procèdent les fonctions qu'il considère.

Ici, au contraire, mes recherches ayant un but différent, je laisse

(¹) *Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, par M. Éd. Lucas. Bruxelles, 1878.

aux équations toute leur généralité, sans supposer même, comme on le fait d'habitude, que les coefficients soient réels.

On ne trouvera donc pas dans ce qui va suivre une généralisation des travaux de M. Lucas, à proprement parler, mais plutôt une étude analogue au début et différente dans les développements.

Il m'a paru intéressant surtout d'insister sur le lien étroit qui existe entre les séries récurrentes et les équations.

Ce sujet a été traité, il est vrai, par Daniel Bernoulli dans le T. III des *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*. Sa méthode est exposée très complètement par Euler dans le Chapitre XVII de son *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, Chapitre intitulé : *De l'usage des séries récurrentes dans la recherche des racines des équations*. Enfin Legendre a traité à son tour le même sujet (*Essai sur la théorie des nombres*, 2e édition, 1808; Ire Partie, § XIV, p. 145) (1).

Malgré cela, et en raison du plus grand caractère de généralité que je donne à mon étude, je n'ai pas cru devoir passer sous silence ces remarquables propriétés. J'avais d'autant plus de motifs pour le faire, que Daniel Bernoulli semble avoir eu principalement pour objet la recherche d'un moyen pratique d'approximation, s'appliquant surtout aux racines réelles, tandis qu'ici je me préoccupe bien plutôt des propriétés elles-mêmes, s'appliquant à n'importe quelles équations algébriques, que des applications de ces propriétés.

Enfin l'on trouvera peut-être quelques considérations nouvelles dans ce que j'expose au sujet de la formation des séries récurrentes imaginaires et de leur construction géométrique.

Fonctions u_k; loi de récurrence.

1. Pour plus de précision dans les idées et de brièveté dans les écritures, nous commencerons par examiner une équation du quatrième degré. Il nous sera aisé de généraliser ensuite, en les appliquant à des équations de degrés quelconques, les raisonnements employés et les résultats obtenus.

---

(1) *Voir* aussi, sur des sujets analogues, insérés dans ses *OEuvres* : T. I, p. 23; T. IV, p. 151; T. V, p. 627.

Soit donc l'équation

$$(1)\qquad f(x) = x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0,$$

qui admet pour racines a, b, c, d, valeurs imaginaires en général, les coefficients p_1, p_2, p_3, p_4 étant eux-mêmes imaginaires.

2. Soit

$$(2)\qquad u_i = \mathrm{F}(a^i, b^i, c^i, d^i) = \mathrm{A}a^i + \mathrm{B}b^i + \mathrm{C}c^i + \mathrm{D}d^i$$

une fonction algébrique quelconque des puissances pareilles a^i, b^i, des racines. Si cette fonction est symétrique, il est souvent aisé, comme l'on sait, de la former au moyen des coefficients de l'équation. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la somme des puissances semblables.

Si nous multiplions l'équation (1) par x^k et si nous y remplaçons x successivement par a, b, c, d, nous aurons les quatre identités

$$(3)\qquad \begin{cases} a^{k+4} + p_1 a^{k+3} + p_2 a^{k+2} + p_3 a^{k+1} + p_4 a^k = 0,\\ b^{k+4} + p_1 b^{k+3} + p_2 b^{k+2} + p_3 b^{k+1} + p_4 b^k = 0,\\ c^{k+4} + p_1 c^{k+3} + p_2 c^{k+2} + p_3 c^{k+1} + p_4 c^k = 0,\\ d^{k+4} + p_1 d^{k+3} + p_2 d^{k+2} + p_3 d^{k+1} + p_4 d^k = 0. \end{cases}$$

En ajoutant ces équations après les avoir respectivement multipliées par A, B, C, D, nous obtenons la relation très importante

$$(4)\qquad u_{k+4} + p_1 u_{k+3} + p_2 u_{k+2} + p_3 u_{k+1} + p_4 u_k = 0.$$

Les quantités u forment donc une suite récurrente et la loi de récurrence est indiquée par la relation (4). Cette relation, sous forme symbolique, peut s'écrire

$$(5)\qquad u_k f(u) = 0,$$

en convenant de remplacer les exposants par des indices et de restituer l'indice zéro lorsque c'est nécessaire.

Suivant la nature des fonctions u, les suites obtenues seront différentes; mais pour une même équation nous n'aurons jamais qu'une même loi, c'est-à-dire que les diverses suites ne différeront entre elles que par les conditions initiales.

Ainsi, à toute équation algébrique répond une classe de séries récurrentes, et, réciproquement, à toute série récurrente donnée répond une équation algébrique (étant entendu que la formule de récurrence qui lie entre eux autant de termes consécutifs qu'on voudra est de forme linéaire et homogène).

Fractions génératrices.

3. Soit donnée la fraction

$$\frac{1}{1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4},$$

ou, plus généralement,

$$\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3}{1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4},$$

le numérateur étant un polynôme quelconque, de degré inférieur à celui du dénominateur. Si nous essayons d'en effectuer le développement suivant les puissances croissantes de x, nous aurons

$$\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3}{1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4}=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots.$$

En multipliant par le dénominateur et identifiant, cela nous donnera, k étant un entier positif quelconque,

$$A_{k+4}+p_1A_{k+3}+p_2A_{k+2}+p_3A_{k+1}+p_4A_k=0,$$

ou, symboliquement,

$$A_k f(A)=0,$$

c'est-à-dire précisément la relation (5), au changement près de u en A.

La série des coefficients du développement considéré est donc identique avec l'une des séries u dont nous avons parlé plus haut.

Les conditions initiales dépendront du numérateur de la fraction, mais la loi de récurrence dépendra du dénominateur seulement. Ce dénominateur peut s'écrire

$$x^4\left(\frac{1}{x^4}+p_1\frac{1}{x^3}+p_2\frac{1}{x^2}+p_3\frac{1}{x}+p_4\right)=x^4f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc, à une loi de récurrence donnée et représentée par la formule (5) répondent d'une part l'équation (1) et de l'autre la fraction $\frac{1}{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)}$ $\left[\text{c'est-à-dire, en général, } \frac{1}{x^n f\left(\frac{1}{x}\right)}\right]$.

Réciproquement, à la loi de récurrence $u_k f\left(\frac{1}{u}\right) = 0$ répondrait la fraction génératrice $\frac{1}{f(x)}$, car on peut poser $k = k' + n$.

Si la suite des coefficients de la loi de récurrence [formule (4)] est symétrique, l'équation (1) est symétrique, elle aussi. Dans ce cas, il est évident que le premier membre de cette équation (1) est identique avec le dénominateur de la fraction génératrice.

Progressions dérivées.

4. Rappelons les relations bien connues

$$(6)\qquad \begin{cases} p_1 = -a - b - c - d, \\ p_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ p_3 = -abc - abd - acd - bcd, \\ p_4 = abcd. \end{cases}$$

Si nous divisons le premier membre de l'équation (1) par $x - a$, nous avons

$$(7)\qquad \frac{f(x)}{x-a} = \varphi_a(x) = x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3,$$

et, en vertu des relations (6),

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = p_1 + a = -b - c - d, \\ \alpha_2 = p_2 + a\alpha_1 = bc + bd + cd, \\ \alpha_3 = p_3 + a\alpha_2 = -bcd. \end{cases}$$

De la formule (7) nous déduisons l'identité

$$f(x) = x\varphi_a(x) - a\varphi_a(x),$$

et, par conséquent, la loi de récurrence (5) des fonctions u peut s'écrire

$$(9) \qquad u_{k+1}\varphi_a(u) = au_k\varphi_a(u).$$

Cette égalité symbolique nous montre que les termes $u_k\varphi_a(u)$, $u_{k+1}\varphi_a(u), \ldots$ forment une progression par quotient, de raison a.

En remplaçant successivement k par $0, 1, 2, \ldots, k-1$ dans la relation (9), puis multipliant les résultats, on obtient sans peine

$$u_k\varphi_a(u) = a^k u_0\varphi_a(u),$$

ou, en posant

$$u_0\varphi_a(u) = u_3 + \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_0 = \Phi_a,$$

$$(10) \qquad u_k\varphi_a(u) = a^k\Phi_a.$$

Les quantités $a^k\Phi_a$ sont figurées, comme l'on sait, par les rayons successifs, également inclinés les uns sur les autres, d'une certaine spirale logarithmique, puisqu'elles forment une progression par quotient dont la raison est a.

L'équation (10) nous montre donc tout de suite que l'expression $u_k\varphi_a(u)$, lorsqu'on fera croître k indéfiniment, tendra vers zéro ou vers l'infini, suivant que le module de la racine a sera plus petit ou plus grand que l'unité. En effet, la spirale dont nous venons de parler se rapprochera de plus en plus du pôle ou s'en éloignera indéfiniment, suivant l'un ou l'autre de ces deux cas.

Si le module de a est égal à l'unité, le module de $u_k\varphi_a(u)$ reste constant. La spirale se réduit alors à une circonférence.

Tout ce que nous venons de dire pour la racine a peut se répéter identiquement pour chacune des autres racines b, c, d. Nous aurons donc

$$(11) \qquad \begin{cases} u_k\varphi_b(u) = b^k\Phi_b, \\ u_k\varphi_c(u) = c^k\Phi_c, \\ u_k\varphi_d(u) = d^k\Phi_d, \end{cases}$$

et, par conséquent, au moyen d'une série récurrente quelconque, à loi de récurrence homogène et linéaire $u_k f(u) = 0$, on peut former autant de progressions par quotient qu'il y a de termes, moins un, dans la relation de récurrence. Ces progressions ont respectivement pour raisons les racines de l'équation $f(x) = 0$. Nous les appellerons *progressions dérivées* de la série donnée.

5. Comme exemple très simple, considérons la série

$$1,\ 2,\ 9,\ 22,\ 77,\ 210,\ 673,\ 1934,\ 5973,\ \ldots,$$

qui satisfait à la loi de récurrence

$$u_{k+3} - 2u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k = 0.$$

Si nous formons les quantités

$$\begin{aligned} &u_{k+2} + u_{k+1} - 2u_k,\\ &u_{k+2} - u_{k+1} - 6u_k,\\ &u_{k+2} - 4u_{k+1} + 3u_k \end{aligned}$$

pour toutes les valeurs possibles entières et positives de k, nous trouverons respectivement les trois suites

$$\begin{array}{cccccc} 9, & 27, & 81, & 243, & 729, & \ldots,\\ 1, & 1, & 1, & 1. & 1, & \ldots,\\ +4, & -8, & +16, & -32, & +64, & \ldots. \end{array}$$

Ce sont les trois progressions dérivées de la série donnée; elles ont pour raisons 3, 1 et -2, parce qu'en effet ces trois dernières quantités sont les racines de l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Les fonctions $\varphi(x)$ sont ici

$$x^2 + x - 2, \quad x^2 - x - 6, \quad x^2 - 4x + 3,$$

expressions correspondant aux formules des termes des trois progressions ci-dessus.

6. Il est possible de généraliser les résultats que nous venons d'obtenir. Supposons en effet que le polynôme entier $f(x)$ soit décomposable en un produit de deux polynômes entiers d'une manière quelconque :

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x). \tag{12}$$

Je dis que, si je forme la série des quantités

$$v_k = u_k\psi(u),$$

ces quantités satisferont à la loi de récurrence

$$(13) \qquad \eta_k \varphi(\eta) = 0.$$

Réciproquement, si nous formons la série

$$\theta_k = u_k \varphi(u),$$

nous aurons

$$(14) \qquad \theta_k \psi(\theta) = 0.$$

Pour le démontrer, supposons que $\varphi(x)$, développé, soit de la forme

$$\varphi(x) = x^q + s_1 x^{q-1} + s_2 x^{q-2} + \ldots + s_q.$$

Nous avons identiquement

$$f(x) = x^q \psi(x) + s_1 x^{q-1} \psi(x) + \ldots + s_q \psi(x).$$

Donc la loi de récurrence des quantités u peut s'écrire

$$u_{k+q} \psi(u) + s_1 u_{k+q-1} \psi(u) + \ldots + s_q u_k \psi(u) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\eta_{k+q} + s_1 \eta_{k+q-1} + \ldots + s_q \eta_k = 0,$$

ou, sous forme symbolique,

$$\eta_k(\eta_q + s_1 \eta_{q-1} + \ldots + s_q) = \eta_k \varphi(\eta) = 0.$$

C'est précisément la relation (13) que nous voulions établir. La formule (14) se démontrerait identiquement de la même manière.

Par exemple, dans la série u du numéro précédent, si nous formons la suite $u_{k+1} - 3u_k$, nous obtenons

$$(\eta) \qquad -1, \ +3, \ -5, \ +11, \ -21, \ +43, \ \ldots,$$

suite sur laquelle on vérifie immédiatement la relation

$$\eta_{k+2} + \eta_{k+1} - 2\eta_k = 0.$$

On voit ainsi que d'une suite récurrente donnée se déduisent non seulement des progressions dérivées, mais en général des *séries* *dérivées* qu'on peut associer par couple de deux, réciproques entre elles.

Rapports de deux termes consécutifs des séries u. — Calcul des racines de plus grand module et de plus petit module d'une équation.

7. Revenons aux équations considérées au début, et qui s'appliquent à un type du quatrième degré, ce qui n'altère en rien la généralité des résultats.

Si nous divisons chacune des équations (11) par l'équation (10), membre à membre, nous aurons

$$\frac{u_k \varphi_b(u)}{u_k \varphi_a(u)} = \left(\frac{b}{a}\right)^k \frac{\Phi_b}{\Phi_a},$$

$$\frac{u_k \varphi_c(u)}{u_k \varphi_a(u)} = \left(\frac{c}{a}\right)^k \frac{\Phi_c}{\Phi_a},$$

$$\frac{u_k \varphi_d(u)}{u_k \varphi_a(u)} = \left(\frac{d}{a}\right)^k \frac{\Phi_d}{\Phi_a}.$$

Actuellement, supposons que, parmi les racines de l'équation (1), a soit celle qui a le plus grand module et qu'il n'y en ait pas deux de ce plus grand module.

Alors, si nous donnons à k des valeurs indéfiniment croissantes, les seconds membres des équations ci-dessus auront pour limite zéro.

En divisant les fractions du premier membre, haut et bas, par u_k, cela nous montre que nous devrons avoir à la limite ([1])

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{u_{k+3}}{u_k} + \beta_1 \frac{u_{k+2}}{u_k} + \beta_2 \frac{u_{k+1}}{u_k} + \beta_3 = 0, \\ &\frac{u_{k+3}}{u_k} + \gamma_1 \frac{u_{k+2}}{u_k} + \gamma_2 \frac{u_{k+1}}{u_k} + \gamma_3 = 0, \\ &\frac{u_{k+3}}{u_k} + \delta_1 \frac{u_{k+2}}{u_k} + \delta_2 \frac{u_{k+1}}{u_k} + \delta_3 = 0. \end{aligned} \right.$$

([1]) Pour plus de simplicité dans l'écriture nous supprimons, avec intention, l'indication lim. dans ces diverses relations; mais il faut y suppléer par la pensée.

En posant $\frac{u_{k+1}}{u_k} = r_{k+1}$, ces équations peuvent s'écrire

$$r_{k+1}r_{k+2}r_{k+3} + \beta_1 r_{k+1}r_{k+2} + \beta_2 r_{k+1} + \beta_3 = 0,$$
$$r_{k+1}r_{k+2}r_{k+3} + \gamma_1 r_{k+1}r_{k+2} + \gamma_2 r_{k+1} + \gamma_3 = 0,$$
$$r_{k+1}r_{k+2}r_{k+3} + \delta_1 r_{k+1}r_{k+2} + \delta_2 r_{k+1} + \delta_3 = 0.$$

On pourrait les résoudre sans nulle peine en considérant $r_{k+1}r_{k+2}r_{k+3}$, $r_{k+1}r_{k+2}$ et r_{k+1} comme trois inconnues différentes, ce qui rend le système ci-dessus de forme linéaire. Mais il est évident que, si le rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ tend vers une certaine limite lorsque k croît indéfiniment, rien ne saurait distinguer les diverses valeurs de r dans les équations ci-dessus, qui se rapportent aux limites.

Donc, en désignant par r la valeur limite commune, ces équations deviennent

$$(16) \qquad \begin{cases} r^3 + \beta_1 r^2 + \beta_2 r + \beta_3 = 0, \\ r^3 + \gamma_1 r^2 + \gamma_2 r + \gamma_3 = 0, \\ r^3 + \delta_1 r^2 + \delta_2 r + \delta_3 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire précisément

$$(17) \qquad \varphi_b(r) = 0, \quad \varphi_c(r) = 0, \quad \varphi_d(r) = 0.$$

Or

$\varphi_b(x) = 0$ admet pour racines $a, c, d,$

$\varphi_c(x) = 0$ » $a, b, d,$

$\varphi_d(x) = 0$ » $a, b, c.$

Donc a est la racine commune, et la seule, aux trois équations (17), et en somme nous avons

$$(18) \qquad \lim_{k=\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = a.$$

En langage ordinaire, cette proposition peut s'énoncer ainsi :

Si une suite récurrente $u_1, u_2, \ldots$ a pour loi de récurrence la relation symbolique

$$u_k f(u) = 0,$$

le rapport d'un terme au précédent, lorsqu'on prendra des termes de plus en plus éloignés dans le sens positif, tendra vers la racine de plus grand module de l'équation $f(x) = 0$.

8. Nous n'avons jamais considéré jusqu'à présent que les séries u prolongées dans le sens positif, c'est-à-dire que les termes à indices positifs. Il est clair qu'on peut prolonger la série dans les deux sens, et que, par conséquent, les formules établies précédemment subsistent en leur entier pour des valeurs négatives de k.

Seulement alors, les relations du n° 7 ne donneront plus les mêmes conséquences, les seconds membres croissant indéfiniment si nous admettons encore que a soit la racine de plus grand module.

Supposons donc au contraire, un instant seulement, et pour ce cas des indices négatifs, que a soit la racine *de plus petit module*. Alors les second smembres tendent vers zéro; tout le reste suit comme précédemment, et *le rapport limite d'un terme au précédent, en prolongeant indéfiniment la série dans le sens négatif, tend vers la racine de plus petit module.*

Ainsi la série prise comme exemple au n° 5, étant prolongée dans les deux sens, nous donne

$$\ldots,\quad -\frac{209}{1296},\quad -\frac{37}{216},\quad -\frac{5}{36},\quad -\frac{1}{6},$$

$$0,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 9,\quad 22,\quad 77,\quad 210,\quad 673,\quad \ldots.$$

A droite le rapport d'un terme au précédent tend vers 3, et à gauche vers 1, qui sont, ainsi que nous l'avons vu plus haut, les racines de plus grand et de plus petit module de l'équation correspondante.

9. La proposition que nous venons d'établir fournit une méthode de calcul pour la recherche des racines extrêmes d'une équation algébrique *quelconque* (on nous permettra d'insister sur ce point), c'est-à-dire d'une équation à coefficients et à racines imaginaires.

Il n'est pas nécessaire, pour appliquer cette méthode, de former telle ou telle fonction symétrique des racines d'après les coefficients, fonction dont le calcul algébrique peut être une opération préalable assez pénible. Il suffit de se donner *au hasard* les conditions initiales dont on peut disposer et de former ensuite la série récurrente d'après la loi $u_k f(u) = 0$. A mesure qu'on calcule les termes de cette série, on peut calculer aussi les rapports $r_k, r_{k+1}, \ldots$ de deux termes consécutifs et construire ces rapports sur une figure géométrique, en OR_k, $OR_{k+1}, \ldots$.

Les droites OR tendront vers une position limite OL ou OM suivant que k sera positif ou négatif, et ces deux droites représenteront les racines de plus grand et de plus petit module en grandeurs et en directions.

Dans bien des cas, ces constructions permettront d'obtenir des indications approximatives utiles sur la région qu'occupe la racine, sinon d'en approcher beaucoup.

Elles donneront tout au moins des résultats comparables à ceux des procédés graphiques ordinaires s'appliquant aux racines réelles, et cela sans beaucoup plus de peine, puisque les constructions sont toujours des plus élémentaires et qu'elles se réduisent constamment, en fin de compte, à des formations de triangles semblables.

10. Les valeurs successives des rapports $r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots$ sont

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}, \quad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}, \quad \frac{u_{k+3}}{u_{k+2}}, \quad \ldots,$$

et nous avons, en supposant toujours une équation du quatrième degré, comme nous l'avons fait depuis le début,

$$(19) \qquad \begin{cases} u_{k+5} = -p_1 u_{k+4} - p_2 u_{k+3} - p_3 u_{k+2} - p_4 u_{k+1}, \\ u_{k+4} = -p_1 u_{k+3} - p_2 u_{k+2} - p_3 u_{k+1} - p_4 u_k. \end{cases}$$

Puisqu'il s'agit d'évaluer uniquement les rapports, on peut remplacer les signes — par des signes +, et les formules (19) nous donneront, ainsi modifiées, la loi de formation des numérateurs et des dénominateurs des fractions r.

Il est à peine utile d'insister sur l'évidente analogie que présentent ces formules (19) avec la loi de formation des réduites dans la théorie des fractions continues. Seulement, au lieu de se borner à deux termes, les formules en comprennent un nombre quelconque (quatre dans l'exemple actuel). C'est qu'en effet les séries que nous étudions ici procèdent d'une équation du quatrième degré (ou en général de degré quelconque), exactement au même titre que les fractions continues périodiques procèdent des équations du second degré.

Le calcul des valeurs r, qui peut se faire directement au moyen des termes de la série u, peut s'effectuer aussi par voie de récurrence comme il suit.

Nous avons

$$u_{k+4} = -p_1 u_{k+3} - p_2 u_{k+2} - p_3 u_{k+1} - p_4 u_k.$$

Divisons par $-u_{k+3}$ et il viendra

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} -r_{k+4} &= p_1 + p_2 \frac{1}{r_{k+3}} + p_3 \frac{1}{r_{k+3} r_{k+2}} + p_4 \frac{1}{r_{k+3} r_{k+2} r_{k+1}} \\ &= p_1 + \frac{1}{r_{k+3}} \left[p_2 + \frac{1}{r_{k+2}} \left(p_3 + \frac{1}{r_{k+1}} p_4 \right) \right] \end{aligned}\right.$$

En général, pour une équation de degré quelconque n,

$$(21)\quad -r_{k+n} = p_1 + \frac{1}{r_{k+n-1}} \left[p_2 + \frac{1}{r_{k+n-2}} \left(p_3 + \ldots + \frac{1}{r_{k+1}} p_n \right) \ldots \right].$$

Cette relation, limitée à deux termes, engendrerait une fraction continue. L'analogie se poursuit donc avec un très grand degré de généralisation; en réalité, les valeurs r_k sont les réduites successives de véritables *fractions continues d'ordres supérieurs.*

11. Il reste, bien entendu, à s'assurer que les valeurs successives de r convergent réellement vers une certaine limite au lieu de s'en écarter. C'est ce qu'il sera facile de vérifier sur chaque exemple et d'obtenir au moyen des conditions initiales dont on dispose. Nous ne croyons pas utile ici d'insister pour le moment sur ce point.

Mais ce que nous voulons faire ressortir surtout, c'est que la méthode précédente, bien qu'indirecte, indique une marche systématique de calcul, un tableau des opérations à effectuer pour parvenir au résultat, c'est-à-dire à obtenir les racines de plus grand et de plus petit module.

On peut, à un point de vue purement théorique, la considérer comme intermédiaire entre un simple procédé numérique et une solution algébrique proprement dite. Enfin elle présente cet intérêt considérable, sous la forme où nous venons de l'exposer, de n'établir aucune distinction entre les racines réelles ou imaginaires et d'avoir ainsi un caractère de généralité absolue très conforme au véritable esprit de l'Algèbre. A ces titres divers et en remarquant sur quelles notions simples elle s'appuie, la méthode de Daniel Bernoulli mériterait peut-être de ne pas rester dans l'oubli où elle paraît être depuis Euler et Legendre.

Ayant obtenu les racines a et a' de plus grand et de plus petit module d'une équation algébrique quelconque, nous pourrons en débarrasser l'équation donnée en divisant le premier membre par $(x-a)(x-a')$.

On appliquera la même méthode à l'équation nouvelle ainsi obtenue et dont le degré se trouvera abaissé de deux unités, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation, soit du premier, soit du second degré, qui dans les deux cas se résoudra immédiatement par les formules connues.

Cas des racines d'égal module.

12. La méthode exposée s'applique intégralement au cas où la racine de plus grand ou de plus petit module est multiple, car le nombre des équations (16) se réduit, il est vrai; mais, comme il y a encore une racine commune a, et une seule, aux équations restantes, r doit nécessairement prendre cette valeur a.

Il y a un cas, au contraire, dans lequel la méthode tombe absolument en défaut: c'est celui où il y a à la fois plusieurs racines d'égal module maximum ou minimum et d'arguments différents.

Nous allons l'examiner dans le cas de deux racines, qui est spécialement intéressant, puisque c'est celui que présentent les racines imaginaires des équations à coefficients réels.

13. Reprenons l'équation (9), dans laquelle se trouve mise en évidence la racine a.

Nous pouvons écrire cette relation symbolique sous l'une des deux formes

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} (u_{k+1}-au_k)\varphi_a(u)=0, \\ u_k(u-a)\quad\varphi_a(u)=0. \end{array}\right.$$

Si nous rapprochons de ceci la solution que nous donne la formule (18), et qui peut s'écrire

$$u_{k+1} - a u_k = 0 \qquad (k = \infty),$$

nous voyons que la racine de plus grand module a est telle, qu'elle annule le coefficient symbolique du premier membre de l'équation (22), c'est-à-dire $u_{k+1} - a u_k = u_k(u - a)$ pour $k = \infty$.

Rappelons, en passant, que la racine de plus petit module annule le même coefficient pour $k = -\infty$.

De cette remarque, l'analogie conduit à supposer que, si nous considérons à la fois les deux racines a et b ayant les plus grands modules, la relation (22) pouvant s'écrire

$$(23) \qquad u_k(u - a)(u - b)\psi_{a,b}(u) = 0,$$

les racines en question satisferont à l'équation

$$u_k(u - a)(u - b) = 0 \qquad (k = \infty),$$

ou

$$(24) \qquad u_{k+2} - (a + b) u_{k+1} + a b_k = 0.$$

Mais l'analogie ne saurait suffire pour justifier cette conséquence, et il importe de l'établir en toute rigueur.

Dans ce but, et pour employer un raisonnement cette fois tout à fait direct, nous reprendrons les termes u_i sous la forme de la relation (2), qui met en évidence les racines de l'équation et qui aurait pu permettre d'obtenir les résultats précédents.

Le premier membre de la relation (24) deviendra, en supposant quelconque le degré de l'équation,

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{A} a^{k+2} + \mathrm{B} b^{k+2} + \mathrm{C} c^{k+2} + \ldots) \\ \quad - (a + b)(\mathrm{A} a^{k+1} + \mathrm{B} b^{k+1} + \mathrm{C} c^{k+1} + \ldots) \\ \quad + ab(\mathrm{A} a^{k} + \mathrm{B} b^{k} + \mathrm{C} c^{k} + \ldots). \end{array} \right.$$

En supposant k positif et très grand, et de plus

$$\operatorname{mod} a \geqq \operatorname{mod} b > \operatorname{mod} c > \ldots,$$

nous pouvons négliger les termes en $c, d, \ldots$ vis-à-vis de ceux en a

et b, et alors il nous reste une identité si nous égalons à zéro l'expression (25) ainsi considérée à la limite.

Les deux racines de plus grand module a et b satisfont donc bien à l'équation (24), c'est-à-dire à celle-ci :

$$(26)\qquad r_{k+1} - (a+b) + ab\,\frac{1}{r_k} = 0.$$

Nous avons donc aussi

$$(27)\qquad r_{k+2} - (a+b) + ab\,\frac{1}{r_{k+1}} = 0.$$

En résolvant les deux équations (26) et (27) par rapport à $(a+b)$ et ab, nous trouvons

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} a+b &= \frac{r_{k+1}(r_{k+2}-r_k)}{r_{k+1}-r_k},\\ ab &= \frac{r_k r_{k+1}(r_{k+2}-r_{k+1})}{r_{k+1}-r_k}.\end{aligned}\right.$$

Il est bien entendu toujours que ces équations s'appliquent aux limites pour k infini.

Si les quantités r sont convergentes, ces deux expressions de $a+b$ et ab tendent vers la forme $\frac{0}{0}$, et d'ailleurs il n'y a pas lieu dans ce cas d'avoir recours à une autre méthode que celle précédemment exposée.

Mais si, au contraire, il y a deux racines a et b d'égal module maximum, les quantités r cessant de converger vers une certaine limite, on pourra appliquer ces formules (28).

Comme exemple extrêmement simple, prenons la série

$$u_{k+2} + u_{k+1} + u_k = 0,$$

qui donne en particulier

$$(u)\qquad 1,\quad 2,\quad -3,\quad 1,\quad 2,\quad -3,\quad 1,\quad 2,\quad -3,\quad \ldots$$

pour la série u.

La série des rapports r sera

$$(r)\qquad 2,\quad -\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad 2,\quad -\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad \ldots,$$

et, en appliquant les formules (28), nous trouvons pour les seconds membres les quantités constantes -1 et $+1$. Donc il en est encore ainsi à la limite, et nous avons

$$a+b=-1, \quad ab=1,$$

relations bien connues qui déterminent les racines imaginaires cubiques de l'unité.

Il n'est pas nécessaire ici de passer à la limite, et les quantités se trouvent constantes, parce que justement les racines en question sont les seules que possède l'équation répondant à la série (u).

Nous avons pris un cas particulier tel que celui-là pour simplifier les calculs numériques et rendre néanmoins l'exemple assez frappant. On voit en effet que les quantités r, par elles-mêmes, ne donneraient rien, puisqu'elles ne sont pas convergentes, tandis que les formules (28) fournissent un résultat.

14. Il peut être assez intéressant de donner à la formule (23) une forme dans laquelle entrent les conditions initiales, de même qu'à la relation (9) nous avons pu donner la forme (10).

Pour cela, écrivons cette formule (23)

$$u_{k+2}\psi_{a,b}(u)=[(a+b)u_{k+1}-abu_k]\psi_{a,b}(u).$$

Si nous donnons successivement à k les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots$, et si nous cherchons à introduire seulement dans le second membre les termes u_1 et u_0, nous trouverons

$$u_2\psi_{a,b}(u)=\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}u_1-abu_0\right)\psi_{a,b}(u),$$
$$u_3\psi_{a,b}(u)=\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}u_1-ab\frac{a^2-b^2}{a-b}u_0\right)\psi_{a,b}(u),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il est facile de généraliser à la manière ordinaire et de démontrer qu'on a

$$(29) \qquad u_k\psi_{a,b}(u)=(U_ku_1-abU_{k-1}u_0)\psi_{a,b}(u),$$

U_k, $U_{k-1}, \ldots$ étant les fonctions U de M. Lucas, qui se rapportent à l'équation $(x-a)(x-b)=0$.

Autres propriétés des séries u.

15. *Les différences Δu des termes d'une série u forment encore une série de la même famille.*

Soit en effet une série u, avec la loi de récurrence

$$u_{k+n} + p_1 u_{k+n-1} + \ldots + p_n u_k = 0.$$

Nous aurons aussi

$$u_{k+n+1} + p_1 u_{k+n} + \ldots + p_n u_k = 0,$$

et, par soustraction,

$$(u_{k+n+1} - u_{k+n}) + p_1 (u_{k+n} - u_{k+n-1}) + \ldots + p_n (u_{k+1} - u_k) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Delta u_{k+n} + p_1 \Delta u_{k+n-1} + \ldots + p_n \Delta u_k = 0. \tag{30}$$

Corollaire. — *Les différences d'ordres quelconques $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ... forment encore des séries de la même famille.*

Par exemple, si, comme au n° 5, nous reprenons la série

(u) 1, 2, 9, 22, 77, 210, 673, 1934, 5973, ...,

qui correspond à l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

les séries suivantes,

(Δu)	1, 7, 13, 55, 133, 463, ...,
$(\Delta^2 u)$	6, 6, 42, 78, 330, 798, ...,
$(\Delta^3 u)$	+ 0, 36, 36, 252, 468, 1980, ...,
	...................................,

correspondront aussi à la même équation.

Sous forme symbolique, l'équation de récurrence

$$u_k f(u) = 0$$

étant donnée, on peut dire qu'il est permis d'opérer par Δ, Δ^2, ..., Δ^q, ... sur cette équation et d'en déduire en général

$$(31) \qquad \Delta^q u_k f(u) = 0.$$

16. *Si une série u correspond à l'équation $f(x) = 0$, elle correspond en même temps à toutes les équations telles que*

$$f(x) \times \varphi(x) = 0,$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier quelconque.

En effet, posons $F(x) = f(x) \times \varphi(x)$. Toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont en même temps racines de l'équation $F(x) = 0$. Donc, en raisonnant exactement comme nous l'avons fait au n° 2, mais appliquant seulement le calcul aux racines de $f(x) = 0$, nous obtiendrons

$$(32) \qquad u_k F(u) = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Réciproquement, s'il arrive qu'une même série u satisfasse à la fois à deux lois de récurrence distinctes

$$u_k F(u) = 0, \quad u_k F_1(u) = 0,$$

c'est que les deux polynômes $F(x)$ et $F_1(x)$ ont un certain diviseur commun $f(x)$.

Si $u_k F_1(u) = 0$ est la loi de récurrence du moindre nombre de termes que présente la série u, alors $F(x)$ est un multiple de $F_1(x)$.

Par exemple, la série de Fibonacci

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad \ldots$$

satisfait aux deux lois $u_{k+3} - 2u_{k+1} - u_k = 0$, $u_{k+3} - 2u_{k+2} + u_k = 0$. Donc les deux polynômes $x^3 - 2x - 1$, $x^3 - 2x^2 + 1$ ont un diviseur commun. Ils sont tous deux multiples de $x^2 - x - 1$, et, effectivement, la loi de récurrence la plus simple que présente la série ci-dessus est

$$u_{k+2} - u_{k+1} - u_k = 0.$$

Cette proposition conduit à diverses conséquences assez dignes d'intérêt. S'il arrive, par exemple, qu'une série u répondant à $f(x) = 0$ soit périodique, c'est-à-dire si l'on a $u_{k+n} = u_k$, c'est que toutes les racines de $f(x) = 0$ appartiennent à l'équation binôme $x^n = 1$.

D'après ce qui précède, on voit que, une loi de récurrence étant donnée, on peut en déduire une infinité d'autres en ajoutant à l'équation $f(x) = 0$ autant de racines qu'on voudra. En d'autres termes, il est licite de multiplier l'équation symbolique de récurrence par un polynôme entier en u.

Introduisons q fois la racine 1. Cela nous donnera

$$u_k f(u)(u-1)^q = 0$$

ou

$$(u-1)^q u_k f(u) = 0, \tag{33}$$

c'est-à-dire, en vertu d'une autre formule symbolique bien connue,

$$\Delta^q u_k f(u) = 0.$$

Nous avons donc ainsi une nouvelle démonstration de la proposition qui fait l'objet du numéro précédent.

Ainsi, prendre les différences d'ordre q ou multiplier l'équation de récurrence par $(u-1)^q$, c'est exactement la même chose. Ces remarques peuvent parfois servir à retrouver la loi de récurrence d'une série donnée numériquement.

Soit, par exemple,

$$(u) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 27,\ 43,\ \ldots.$$

Formons les différences

$$(\Delta u) \qquad 1,\ 1,\ 4,\ 4,\ 16,\ 16,\ \ldots.$$

On vérifie immédiatement ici la relation

$$u_{k+2} = 4u_k,$$

qui correspond à l'équation

$$x^2 - 4 = 0.$$

Or on n'a pu introduire, en prenant les différences, que la racine

$x = 1$. C'est donc parmi les multiples de $x^2 - 4$ qu'il faut chercher le premier membre de l'équation à laquelle répond la série u. Si on effectue en effet le produit $(x^2 - 4)(x - 1) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, on peut vérifier que la série u satisfait à l'équation

$$u_{k+3} - u_{k+2} - u_{k+1} + 4u_k = 0.$$

17. Reprenons les fonctions $\varphi_a(x), \varphi_b(x), \ldots$ considérées au n° **4**. Nous savons qu'on a

$$f'(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x) + \ldots.$$

Or, la formule (10), appliquée aux diverses racines, nous donne

$$\begin{array}{l} u_k \varphi_a(u) = a^k u_0 \varphi_a(u), \\ u_k \varphi_b(u) = b^k u_0 \varphi_b(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Donc, par addition,

$$(34) \qquad u_k f'(u) = u_0[a^k \varphi_a(u) + b^k \varphi_b(u) + \ldots],$$

formule intéressante en ce qu'elle donne une expression de la dérivée symbolique $f'(u)$ en fonction des racines.

18. *Si $\psi(x)$ est une fonction entière quelconque et si l'on forme l'expression symbolique $u_k \psi(u) = v_k$, la série v sera de même famille que la série u.*

Soit en effet, pour simplifier, sans diminuer en rien la généralité du raisonnement,

$$\psi(x) = Q_3 x^3 + Q_2 x^2 + Q_1 x + Q_0.$$

Alors

$$v_k = u_k \psi(u) = Q_3 u_{k+3} + Q_2 u_{k+2} + Q_1 u_{k+1} + Q_0 u_k.$$

Écrivant cette équation pour un nombre suffisant de valeurs consécutives de k, multipliant par les coefficients de la fonction $f(u)$ et ajoutant, on aura

$$v_k f(v) = Q_3 u_{k+3} f(u) + Q_2 u_{k+2} f(u) + Q_1 u_{k+1} f(u) + Q_0 u_k f(u) = 0,$$

puisque tous les termes du second membre s'annulent séparément.

D'une manière générale, u étant une série quelconque, récurrente ou non, si l'on pose

$$u_k\,\psi(u) = v_k,$$

le calcul ci-dessus nous montre que nous avons

$$(34)\qquad v_k\chi(v) = u_k\,\psi(u)\chi(u),$$

$\psi(x)$ et $\chi(x)$ représentant deux polynômes entiers quelconques.

Comme la multiplication symbolique dans le second membre est commutative, on a encore

$$v_k\,\chi(v) = v'_k\,\psi(v'),$$

si l'on pose

$$u_k\,\psi(u) = v'_k.$$

Vérifions sur l'exemple quelconque

$$(u)\qquad 1,\ 7,\ 5,\ 3,\ 9,\ 2,\ 11,\ 15,$$

en supposant $\psi(x) = 2x + 1$, $\chi(x) = x^2 - x + 3$.

Alors les fonctions $v_k = u_k\psi(u)$, $v'_k = u_k\,\chi(u)$ sont respectivement

$$(v)\qquad 15,\ 17,\ 11,\ 21,\ 13,\ 24,\ 41,$$

$$(v')\qquad 1,\ 9,\ 21,\ 2,\ 36,\ 10,$$

et l'on a, en formant soit $v\,\chi(v)$, soit $v'\,\psi(v')$,

$$39,\ 61,\ 25,\ 74,\ 56,$$

résultat qui est le même dans les deux cas.

Construction de quelques séries géométriques.

19. Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas cru nécessaire d'insister sur la construction des termes des diverses séries considérées. L'application des principes les plus simples de la méthode des équipollences permettra toujours de le faire avec une grande facilité. Mais, en terminant cette étude, il nous paraît intéressant d'examiner sur quelques exemples fort simples la loi de formation des termes de certaines séries, provenant presque toutes d'équations du second degré.

Les théories qui précèdent permettront parfois de trouver des solutions de questions purement géométriques, et, d'autre part, nous verrons se généraliser et s'éclaircir en même temps, par la représentation géométrique, la notion analytique de telle ou telle série envisagée d'ordinaire au point de vue arithmétique ou algébrique seulement.

Il est à remarquer qu'on peut engendrer souvent certaines séries géométriques, au moyen d'une équation dont les coefficients et les racines sont réels, si l'on se donne des conditions initiales imaginaires. D'autres fois, au contraire, ce sont les coefficients ou les racines qui peuvent être imaginaires. C'est ce qu'on distinguera parfaitement dans les exemples qui vont suivre.

20. Prenons l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

qui engendre la *série de* Fermat, généralement écrite sous la forme

$$0, \quad 1, \quad 3, \quad 7, \quad 15, \quad 31, \quad 63, \quad \ldots.$$

La loi de récurrence est

$$u_{k+2} = 3u_{k+1} - 2u_k.$$

Les racines de l'équation sont 1 et 2, et la formule de récurrence peut effectivement s'écrire sous l'une des deux formes

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} = u_{k+1} - 2u_k, \quad u_{k+2} - u_{k+1} = 2(u_{k+1} - u_k),$$

qui donnent

$$u_{k+1} - 2u_k = u_1 - 2u_0, \quad u_{k+1} - u_k = 2^k(u_1 - u_0).$$

La loi de succession des points u est évidente. Quels que soient les points initiaux u_0, u_1, tous les points u_2, u_3, ... sont en ligne droite, et les segments successifs qu'ils forment sont tels, que chacun de ces segments est double de celui qui le précède.

La limite du rapport des deux droites Ou_{k+1}, Ou_k, O étant l'origine, tend vers 2 lorsque k tend vers l'infini positif, et 2 est effectivement la racine de plus grand module.

Si l'on fait tendre k vers l'infini négatif, les points u, au lieu de s'éloigner à l'infini comme tout à l'heure, tendent à se rapprocher infiniment les uns des autres et de la limite commune indiquée par $2u_0 - u_1$. C'est ce que montre immédiatement la construction inverse.

Dans ce cas, et par le seul fait que les points u tendent vers une limite commune, la limite du rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ est égale à 1, qui est la racine de plus petit module de l'équation.

Remarques. — I. Toutes les fois que dans une équation du second degré *à coefficients réels* $x^2 + p_1 x + p_2 = 0$ il y a une racine égale à 1, c'est-à-dire toutes les fois que l'on a

$$1 + p_1 + p_2 = 0,$$

les points $u_0, u_1, u_2, \ldots$ qui figurent la série correspondante sont tous en ligne droite.

II. Toutes les fois que dans une équation de degré quelconque n à coefficients réels il y a une racine égale à 1, si l'on se donne les n points initiaux en ligne droite, tous les points qui figurent la série correspondante seront sur cette même droite.

21. Soit l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

génératrice de la *série de* FIBONACCI, qu'on écrit généralement

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad \ldots.$$

La loi de récurrence est

$$u_{k+2} = u_{k+1} + u_k,$$

et les racines de l'équation sont

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

En ajoutant à l'équation la racine 1, le premier membre devient

$$x^3 - 2x^2 + 1,$$

d'où la nouvelle loi de récurrence

$$u_{k+3} = 2u_{k+2} - u_k,$$

à laquelle doit satisfaire aussi la série.

De là une construction plus simple que celle indiquée par la première forme : on construit sur $O u_0$, $O u_1$ le parallélogramme $O u_0 u_2 u_1$; on prolonge $u_0 u_2$ d'une longueur égale en $u_2 u_3$, puis $u_1 u_3$ d'une longueur égale en $u_3 u_4$, puis $u_2 u_4$ en $u_4 u_5$, et ainsi de suite indéfiniment. La construction inverse donnera les points d'indices négatifs : ainsi la droite $u_2 u_1$ sera prolongée d'une longueur égale à elle-même en $u_1 u_{-1}$, $u_1 u_0$ en $u_0 u_{-2}$, $u_0 u_{-1}$ en $u_{-1} u_{-3}$, et ainsi de suite.

En faisant la figure, on voit tout de suite que les points u_{+k} s'éloignent à l'infini dans une certaine direction et dans le même sens, et que les points u_{-k} s'éloignent à l'infini dans une autre direction, en se distribuant alternativement dans un sens et dans l'autre.

Le rapport $\dfrac{O u_{k+1}}{O u_k}$, de même que celui des segments $u_{k+1} u_{k+2}$ et $u_k u_{k+1}$, tend vers $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour les valeurs positives de k, et vers $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ pour les valeurs négatives de k.

On a

$$u_{k+1} - bu_k = a^k(u_1 - bu_0), \quad u_{k+1} - au_k = b^k(u_1 - au_0).$$

Donc toutes les directions $u_1 - bu_0, u_2 - bu_1, \ldots$ sont parallèles et il en est de même pour $u_1 - au_0, u_2 - au_1, \ldots$.

Pour k positif et infiniment grand, u_{k+1} et bu_k ont la même direction, qui est celle de $u_1 - bu_0$ ou de $a(u_1 - bu_0) = au_1 + u_0$, puisque $ab = -1$.

Pour k négatif et infiniment grand, u_{k+1} et au_k ont la même direction, qui est celle de $u_1 - au_0$ ou de $b(u_1 - au_0) = bu_1 + u_0$.

On obtiendra donc les deux directions limites par la construction suivante : sur la direction Ou_1 on portera

$$OP = Ou_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad OQ = Ou_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

puis on formera les parallélogrammes Ou_0RP, Ou_0SQ. Les deux droites OR et OS seront respectivement les directions limites des u positifs et des u négatifs.

Remarque. — Toutes les fois, dans une équation quelconque, que la racine a de plus grand (ou de plus petit) module est réelle et différente de l'unité, les points u à indices positifs (ou négatifs) tendent vers une certaine direction limite. Cette direction est donnée par $u_0\,\varphi_a(u)$. Cela résulte immédiatement de la relation

$$u_k \varphi_a(u) = a^k u_0 \varphi_a(u),$$

en généralisant ce qui précède.

22. Soit l'équation

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

qui engendre en particulier la *série de* Pell,

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ \ldots,$$

dont la loi de récurrence est

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} - u_k = 0.$$

Nous avons pour racines de l'équation

$$a = 1 + \sqrt{2}, \quad b = 1 - \sqrt{2}.$$

Appelons en général u'_k le point symétrique du point u_k par rapport à l'origine O. Nous avons la construction suivante, connaissant u_0 et u_1 : prolonger la droite $u'_0 u_1$ d'une longueur égale à elle-même en $u_1 u_2$, puis $u'_1 u_2$ en $u_2 u_3$, puis $u'_2 u_3$ en $u_3 u_4$, et ainsi de suite. La construction inverse, qui s'indique d'elle-même, nous donnera les points d'indices négatifs. Il se présentera des particularités analogues à celles de l'exemple précédent, quant à la disposition générale des points u.

Le rapport $\frac{O u_{k+1}}{O u_k}$, de même que $\frac{u_{k+1} u_{k+2}}{u_k u_{k+1}}$, tend vers $1 + \sqrt{2}$, ou vers $1 - \sqrt{2}$, suivant qu'il s'agit des points à indices positifs ou à indices négatifs.

La direction limite des droites $O u_{+k}$ est celle de $u_1 - b u_0$ ou de $a(u_1 - b u_0) = a u_1 + u_0$; celle des droites $O u_{-k}$ est $b u_1 + u_0$: d'où une construction tout à fait analogue à celle de l'exemple qui précède.

23. Prenons l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Elle donne lieu à la loi de récurrence

$$u_{k+2} + u_{k+1} + u_k = 0.$$

Les points u_0, u_1 étant donnés, on tire de là cette construction : prendre le milieu m de $u_0 u_1$; joindre mO et prolonger cette droite de deux fois sa longueur en $O u_2$; prendre le milieu m' de $u_1 u_2$ et prolonger $m'O$ de deux fois sa longueur en $O u_3$; il est visible que le point u_3 ainsi obtenu coïncide avec u_0, et, en continuant ainsi, la série des points est indéfiniment

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_0,\ \ldots.$$

Cela vient de ce que le premier membre de l'équation est facteur de $x^3 - 1$, ce qui entraîne la périodicité de la série.

L'indétermination de la limite du rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ provient ici de ce que nous nous trouvons précisément dans le cas de deux racines d'égal module, étudié plus haut au n° 13.

Les racines de l'équation donnée sont en effet les racines cubiques imaginaires de l'unité.

24. Soit l'équation du second degré à coefficients imaginaires $x^2 + p_1 x + p_2 = 0$; nous supposerons qu'elle ait l'unité pour une de ses racines, d'où la condition $1 + p_1 + p_2 = 0$. Alors il est visible que l'autre racine est p_2.

En l'appelant λ, l'équation peut s'écrire

$$(x-1)(x-\lambda) = x^2 - (1+\lambda)x + \lambda = 0,$$

et la loi de récurrence de la série qui en résulte est

$$u_{k+2} = (1+\lambda)u_{k+1} - \lambda u_k,$$

d'où l'on tire encore

$$u_{k+2} - \lambda u_{k+1} = u_{k+1} - \lambda u_k, \quad u_{k+2} - u_{k+1} = \lambda(u_{k+1} - u_k).$$

Cette dernière forme de la loi de récurrence fournit la construction que voici : connaissant u_0, u_1, on forme le triangle $u_0 u_1 u_2$ tel que $\frac{u_1 u_2}{u_0 u_1} = \lambda$, puis les triangles $u_1 u_2 u_3$, $u_2 u_3 u_4$, ..., tous directement semblables au premier. En continuant en sens inverse la série des triangles semblables, on aura les points à indices négatifs.

Si $\bmod \lambda < 1$, les points u_{+k} tendent vers une certaine limite v et les points u_{-k} s'éloignent indéfiniment.

Si $\bmod \lambda > 1$, c'est exactement l'inverse qui se produit.

Lorsque $\bmod \lambda = 1$, nous avons indétermination.

Supposons $\bmod \lambda < 1$ et cherchons la position limite v dont nous venons de parler. Nous savons qu'on a

$$u_{k+1} - u_k = \lambda^k(u_1 - u_0).$$

De là

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} &= \lambda^{k-1}(u_1 - u_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_2 - u_1 &= \lambda(u_1 - u_0), \\ u_1 - u_0 &= u_1 - u_0, \end{aligned}$$

et, par addition des k dernières égalités,

$$u_k - u_0 = \frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}(u_1 - u_0).$$

Donc, en faisant tendre k vers ∞, il nous reste

$$\lim u_k = v = \frac{u_1 - \lambda u_0}{1-\lambda} = \frac{u_2 - \lambda u_1}{1-\lambda} = \cdots.$$

Cela nous donne encore

$$\lambda = \frac{u_1 - v}{u_0 - v} = \frac{u_2 - v}{u_1 - v} = \frac{u_3 - v}{u_2 - v} = \cdots,$$

c'est-à-dire que la position limite v est le sommet commun des triangles semblables vu_0u_1, vu_1u_2, vu_2u_3, ... Les points u sont donc distribués sur une spirale logarithmique dont v est le pôle. Dans le sens positif, ils se rapprochent de plus en plus de ce pôle; dans le sens négatif, ils s'en éloignent au contraire sans limite, mais le rapport $\frac{\mathrm{O}u_{k+1}}{\mathrm{O}u_k}$ tend alors à se rapprocher de plus en plus de $\frac{vu_{k+1}}{vu_k}$ ou de λ.

Il suffit d'alterner le sens positif et le sens négatif pour avoir les conclusions relatives au cas de $\mathrm{mod}\,\lambda > 1$.

Et lorsque $\mathrm{mod}\,\lambda = 1$, il est clair que les points u se distribuent indéfiniment sur une ligne polygonale régulière, et par conséquent sur une certaine circonférence, sans tendre vers aucune limite et sans que le rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ tende non plus, lui aussi, vers une limite quelconque. Le centre de cette circonférence est déterminé par la même valeur v que ci-dessus; mais aucun des points ne saurait s'en approcher.

25. Soit l'équation

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0.$$

Elle a pour racines $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. La loi de récurrence correspondante est

$$u_{k+2} = \frac{5}{6}u_{k+1} - \frac{1}{6}u_k.$$

Si nous prenons, comme au n° 22, les points u'_k symétriques de u_k par rapport à l'origine, nous avons la construction qui consiste à joindre u'_0u_1 et à porter sur cette droite $u'_0u_2 = \frac{5}{6}u_0u_1$; de même $u'_1u_3 = \frac{5}{6}u'_1u_2$, et ainsi de suite. La construction inverse, qui s'indique d'elle-même, donnera les points à indices négatifs.

On reconnaît aisément que les points à indices positifs se rapprochent indéfiniment de l'origine et que les points à indices négatifs s'éloignent au contraire à l'infini. Le rapport d'un terme au précédent, $\frac{u_{k+1}}{u_k}$, tend vers $\frac{1}{2}$ pour $k = +\infty$ et vers $\frac{1}{3}$ pour $k = -\infty$.

La relation de récurrence nous donne

$$u_{k+1} - \frac{1}{3} u_k = \frac{1}{2^k}\left(u_1 - \frac{1}{3} u_0\right),$$

$$u_{k+1} - \frac{1}{2} u_k = \frac{1}{3^k}\left(u_1 - \frac{1}{2} u_0\right).$$

La direction limite de $\mathrm{O}u_{+k}$ est conséquemment celle de $u_1 - \frac{1}{3} u_0$, et la direction limite de $\mathrm{O}u_{-k}$ est celle de $u_1 - \frac{1}{2} u_0$.

Des deux relations précédentes, nous tirons par soustraction, après avoir multiplié la première par 3 et la seconde par 2,

$$u_{k+1} = \frac{1}{2^k}(3u_1 - u_0) - \frac{1}{3^k}(2u_1 - u_0).$$

Posons

$$3u_1 - u_0 = l, \quad 2u_1 - u_0 = -m;$$

remplaçons l'indice entier k par un paramètre t que nous supposerons variable d'une manière continue et le point u_{k+1} par un point courant u. Il viendra

$$u = \frac{1}{2^t} l + \frac{1}{3^t} m,$$

équipollence d'une courbe sur laquelle sont situés tous les points u. On vérifie aisément que cette courbe est tangente à la direction l à l'origine et qu'elle a une branche parabolique infinie le long de laquelle la tangente approche de plus en plus de la direction m.

Remarque. — Ce qui précède peut s'étendre à toutes les équations du second degré. Nous avons en effet, a et b étant les racines,

$$u_{k+1} - bu_k = a^k(u_1 - bu_0),$$

$$u_{k+1} - au_k = b^k(u_1 - au_0),$$

et de là, par soustraction,

$$(a - b)u_k = a^k(u_1 - bu_0) - b^k(u_1 - au_0).$$

Remplaçant k par t, u_k par u, et posant

$$\frac{u_1 - bu_0}{a-b} = l, \quad \frac{u_1 - au_0}{a-b} = -m,$$

il vient

$$u = a^t l + b^t m,$$

équipollence d'une courbe qui contient tous les points u. En donnant au paramètre t toutes les valeurs entières, on obtient sur cette courbe les points u_k que nous avons constamment considérés.

Pour des racines réelles et positives, on voit aisément que l'équation de cette courbe en coordonnées rectilignes est de la forme

$$y = \mathrm{C}x^\lambda.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer cela aux divers exemples qui précèdent et de déterminer les courbes des u dans ces divers cas.

26. Soit enfin une équation de degré quelconque, dont tous les termes, à l'exception du premier, ont même coefficient et même signe, et qui, en outre, admet la racine $+1$, c'est-à-dire

$$f(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1 = 0.$$

On en déduit la loi de récurrence

$$u_{k+n} = \frac{1}{n}(u_{k+n-1} + \ldots + u_{k+1} + u_k),$$

c'est-à-dire qu'en prenant le centre de gravité du système formé par n points consécutifs on obtient le point qui suit le dernier d'entre eux.

Cette construction conduit à une limite pour les points u_k, ce qui tient à ce que la racine $+1$ est précisément celle de plus grand module. On peut se proposer de rechercher cette limite.

En divisant $f(x)$ par $x-1$, on trouve pour quotient

$$\varphi_1(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1.$$

Donc la relation $u_k\varphi_a(u) = a^k u_0 \varphi_a(u)$ nous donnera, a étant égal à 1,

$$nu_{k+n-1} + (n-1)u_{k+n-2} + \ldots + 2u_{k+1} + u_k$$
$$= nu_{n-1} + (n-1)u_{n-2} + \ldots + 2u_1 + u_0.$$

Or, lorsque k croît indéfiniment, tous les u du premier membre tendent à se rapprocher indéfiniment de leur limite commune v. Donc il vient

$$[n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1]v$$
$$= nu_{n-1} + (n-1)u_{n-2} + \ldots + 2u_1 + u_0.$$

Ainsi, pour obtenir le point v, il suffit de prendre au hasard n points consécutifs, d'appliquer au premier un poids 1, au deuxième un poids 2, etc., et de déterminer le centre de gravité de ce système.

S'il s'agit simplement d'une équation du troisième degré, nous avons une construction très simple : étant donné un triangle $u_0 u_1 u_2$, on en détermine le centre de gravité u_3, puis le centre de gravité u_4 du triangle $u_1 u_2 u_3$, et ainsi de suite.

La limite des points u sera donnée par la formule

$$v = \frac{1}{6}(3u_2 + 2u_1 + u_0),$$

qui se traduit par la construction suivante : porter, à partir de u_0, $u_0 f = \frac{3}{4} u_0 u_2$, joindre fu_1, mener par u_3 (centre de gravité de $u_0 u_1 u_2$) une parallèle $u_3 z$ à $u_0 u_2$; la rencontre des droites fu_1 et $u_3 z$ donnera le point limite v.

En prenant ce point pour origine, on aurait la loi de récurrence

$$3u_{k+2} + 2u_{k+1} + u_k = 0,$$

et l'on pourrait tirer de là, comme plus haut, l'équipollence de la courbe des u, sorte de spirale ayant l'origine v pour point asymptotique.