BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

WEIERSTRASS

Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 157-183
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_157_0>

MÉLANGES.

REMARQUES SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. WEIERSTRASS (¹).

1. La Communication suivante se rapporte à certaines séries indéfinies dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable : elle a pour but principal d'éclaircir certaines propriétés que peuvent offrir ces suites, propriétés qui, à ce que je crois, n'ont pas encore été remarquées et qui ont quelque importance pour la théorie des fonctions.

Soit donné un nombre infini de fonctions rationnelles de la variable x, rangées dans un ordre déterminé,

$$f_0(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots .$$

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

a une valeur finie constitue la *région de convergence* de la série. Si, a étant un point de cette région, on peut déterminer une quantité positive ρ telle que, sous la supposition

$$|x-a| \leqq \rho,$$

la série converge uniformément (²), je dirai que la série converge

(¹) *Monatsberichte der Kön. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, séance du 12 août 1880.

(²) Une série infinie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$$

dont les termes sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables converge uniformément dans une certaine partie (B) de sa région de convergence, si, δ étant un nombre donné aussi petit qu'on le veut, on peut toujours déterminer un en-uniformément dans le voisinage du point a. La quantité ρ a une limite supérieure : soit R cette limite ; on peut, relativement à la série considérée, désigner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a

$$|x - a| < R$$

comme le domaine du point a, et R comme le rayon de ce domaine. Dans le voisinage d'un point quelconque de ce domaine, la série converge uniformément. Il résulte de là que l'ensemble des points dans le voisinage desquels la série converge uniformément constitue dans le plan de la variable x une surface simple [1], mais qui peut comprendre plusieurs parties séparées.

Supposons qu'il existe des points de la nature en question, et qu'on représente par A leur ensemble ; imaginons que l'on parte de l'un d'eux, qu'on en choisisse un autre dans le domaine du premier, un troisième dans le domaine du second, etc. L'ensemble des points

---

tier m tel que le module de la somme

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu$$

soit inférieur à δ pour toute valeur de n supérieure ou égale à m, et cela, pour tout système de valeurs des variables qui appartient à la région B. Pour que la série soit en même temps absolument convergente dans la même région, c'est-à-dire indépendante de l'arrangement de ses termes, il faut qu'on puisse en retrancher un nombre fini de termes, tel que la somme d'autant de termes qu'on voudra parmi les termes restants soit, pour chaque système de valeurs appartenant à la région, inférieure à δ. Cette condition sera certainement remplie s'il existe une suite de nombres positifs

$$g_0, g_1, g_2, \ldots,$$

pour lesquels on ait, en chaque point de la région B,

$$|f_\nu| \leq g_\nu, \quad (\nu = 0, \ldots, \infty),$$

et tels que la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$$

ait une valeur finie. — Il résulte de la définition donnée par l'uniformité de la convergence que, si une série converge uniformément dans plusieurs parties de sa région de convergence, elle converge uniformément dans la région totale composée de toutes ces parties.

[1] Une surface qui ne passe qu'une seule fois par chacun de ses points.

de A auxquels on peut parvenir de cette façon constitue dans le plan de la variable x un certain *continuum* A_1, dont la limitation pourra comprendre une ou plusieurs lignes et aussi des points isolés. S'il existe en dehors de A_1 des points de A, il existera au moins un second *continuum* A_2 de même nature que A_1 et qui n'aura aucun point commun avec A_1 ; toutefois certaines parties des limites de A et de A_2 peuvent être communes. S'il existe encore des points de A qui n'appartiennent ni à A_1 ni à A_2, il existera au moins un troisième *continuum* A_3, analogue à A_1 et à A_2 et qui n'aura aucun point commun ni avec A_1 ni avec A_2, et ainsi de suite.

On peut montrer aisément sur des exemples que A peut en effet être constitué de ces différentes manières : il suffira de considérer les deux séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x^\nu + x^{-\nu}}.$$

Pour la première, la région A est formée de toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à 1 ; pour la seconde il y a en outre les valeurs pour lesquelles le module est supérieur à 1 ; dans le premier cas, A se compose d'une surface continue ; dans le second, A se compose de deux surfaces continues n'ayant aucun point en commun. Des exemples de séries de même nature pour lesquelles la région A est composée de plus de deux portions se rencontreront plus tard.

Je vais maintenant prouver que si la série considérée converge uniformément dans le voisinage de chaque point situé à l'intérieur ou sur le contour d'une aire continue donnée B, elle converge uniformément dans toute cette aire.

Soient a, a' deux points de la région A, a' étant situé dans le domaine de a ; soit R le rayon de ce domaine. $D = |a' - a|$ étant la distance des deux points, le rayon R' du domaine de a' ne peut pas être inférieur à $R - D$; si l'on a $D < \frac{1}{2}R$, on aura

$$R' > \frac{1}{2}R$$

et a sera situé dans le domaine de a' : on aura donc

$$R \geqq R' - D ;$$

en sorte que R' doit être compris entre

$$R - D \quad \text{et} \quad R + D.$$

Si maintenant le point a se déplace d'une façon continue dans A, on voit que la valeur correspondante de R varie aussi d'une façon continue : il existe donc un point dans l'intérieur ou sur le contour de B pour lequel la limite inférieure R_0 des valeurs que peut prendre R dans la région B est atteinte, et cette limite inférieure R_0 n'est pas nulle. Par suite, on peut décomposer B en un nombre fini de parties telles que, dans chacune, la distance maximum de deux points soit inférieure à R_0. Chacune de ces parties est située tout entière dans le domaine d'un quelconque de ses points; dans chacune de ces parties, la série converge uniformément; de là et d'une remarque précédemment faite résulte la proposition énoncée.

Une série de la nature en question peut être telle que, dans le voisinage d'un point quelconque situé dans l'*intérieur* de la région de convergence, elle converge uniformément. Dans ce qui suit, on étudiera exclusivement de telles séries. Si l'on sait seulement, sur la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x),$$

qu'il y a, dans le plan de la variable x, une aire continue dans laquelle la série converge, il ne s'ensuit en aucune façon que, dans cette aire, la somme de la série soit une fonction continue de x. Mais si l'on fait la supposition précédente, on peut montrer que la série, dans chacune des aires $A_1, \ldots$, précédemment définies et qui appartiennent à la région de convergence, représente en général une branche uniforme d'une fonction analytique monogène de x et que, dans des cas particuliers, elle peut représenter complètement une telle fonction.

Ici, il est nécessaire d'établir un lemme préliminaire.

2. Soit donnée, dans un ordre déterminé, une infinité de séries ordonnées suivant les puissances entières d'une variable x,

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \quad \ldots,$$

chacune des séries pouvant d'ailleurs contenir, en nombre quelconque, des puissances positives ou négatives; supposons qu'il existe deux nombres R, R′ dont le premier soit positif ou nul, dont le second soit plus grand que le premier et tels que, sous la condition

$$R < |x| < R',$$

non seulement les séries convergent isolément, mais encore qu'il en soit de même de la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x),$$

et que, de plus, cette dernière somme converge uniformément pour les valeurs de x dont le module est compris entre R et R′. Si l'on désigne alors par

$$A_\mu^{(\nu)}$$

le coefficient de x^μ dans $P_\nu(x)$, la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}$$

aura pour toute valeur de μ une valeur finie que je désignerai par A_μ, et l'on peut montrer que, pour toute valeur de x dont le module est plus grand que R et plus petit que R′, la série

$$\sum_\mu A_\mu x^\mu$$

est convergente et que l'on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) = \sum_\mu A_\mu x^\mu.$$

Soit r une quantité positive quelconque, comprise entre R et R′, et k une autre quantité positive arbitraire; on peut, à cause de la supposition relative à la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x),$$

déterminer un nombre entier positif m tel que, pour toute valeur de x dont le module est égal à r, le module de la somme

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu(x)$$

soit, pour toute valeur de n égale ou supérieure à m, inférieure à $\frac{1}{2}k$, tel, par conséquent, que, pour tout nombre n' supérieur ou égal à n, on ait

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} P_\nu(x)\right| < k.$$

On a d'ailleurs

$$\sum_{\nu=n}^{n'} P_\nu(x) = \sum_{\mu}\left(\sum_{\nu=n}^{n'} A_\mu^{(\nu)} x^\mu\right),$$

et, par conséquent, en vertu d'un théorème connu, on aura, pour toute valeur entière de μ,

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} A_\mu^{(\nu)}\right| < kr^{-\mu};$$

la somme $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}$ a donc une valeur finie et déterminée que nous désignerons par A_μ.

Soient maintenant r_1, r_2 deux nombres positifs tels que l'on ait

$$R < r_1 < r < r_2 < R';$$

on peut donner au nombre n une valeur telle que

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} A_\mu^{(\nu)}\right|$$

soit plus petit que chacun des deux nombres

$$kr_1{}^{\mu}, \quad kr_2{}^{\mu};$$

il en résultera

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\right| \leqq k r_1^{-\mu},$$

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\right| \leqq k r_2^{-\mu}.$$

D'ailleurs, en faisant

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\mu^{(\nu)} = A'_\mu,$$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} = A''_\mu,$$

et en supposant que la variable x ait une valeur dont le module soit égal à r, on aura

$$\sum_{\mu=-1}^{-\infty} |A''_\mu x^\mu| \leqq k \sum_{\mu=-1}^{-\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^\mu,$$

$$\sum_{\mu=0}^{+\infty} |A''_\mu x^\mu| \leqq k \sum_{\mu=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_2}\right)^\mu,$$

et par conséquent

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left|A''_\mu x^\mu\right| \leqq k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right).$$

La série

$$\sum_\mu A''_\mu x^\mu$$

converge donc inconditionnellement, et, puisque

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(x) = \sum_\mu A'_\mu x^\mu,$$

il en est de même de la série

$$\sum_\mu A_\mu x^\mu.$$

On a ensuite

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_\mu A_\mu x^\mu = \sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_\mu A''_\mu x^\mu,$$

et, par conséquent,

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_\mu A_\mu x^\mu \right| \leqq k + k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right).$$

Puisque enfin, pour toute valeur déterminée de x dont le module r est compris entre R et R′, on peut déterminer les nombres r_1 et r_2 de façon à satisfaire aux conditions précédentes, et que l'on peut prendre k assez petit pour que

$$k + k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right)$$

soit plus petit qu'une quantité donnée, il résulte de ce qui précède que, sous la condition

$$R < |x| < R',$$

la série

$$\sum_\mu A_\mu x^\mu$$

converge et que l'on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) = \sum_\mu A_\mu x^\mu.$$

C'est ce qui avait été annoncé.

Soit, maintenant,

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

une série quelconque ayant la propriété dont il a été question à la fin du n° 1 et soit A′ une des portions dont se compose, comme il a été supposé, la région de convergence de cette série.

Soit a_0 un point choisi arbitrairement dans A′ et limitons la variable x au domaine du point a_0; non seulement les fonctions $f(x)$, mais encore, en vertu du lemme précédent, leur somme pourront s'exprimer au moyen d'une série procédant suivant les puissances entières et positives de $x - a_0$; je représenterai cette série par

$$\mathfrak{P}(x - x_0),$$

et l'appellerai, d'après la notation introduite par moi dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions analytiques*, un *élément* de la fonction $F(x)$.

Si maintenant on prend dans le domaine de a_0 un second point a_1, et si $\mathfrak{P}_1(x - a_1)$ est l'élément de $F(x)$ correspondant à ce point, on a pour les valeurs de x communes aux domaines de a et de a_0

$$\mathfrak{P}_1(x - a_1) = \mathfrak{P}_0(x - a_0),$$

$$\mathfrak{P}_0(x - a_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_0^{(\mu)}(a_1 - a_0)\frac{(x - a_1)^\mu}{\mu!},$$

où

$$\mathfrak{P}_0^{(\mu)}(x - a_0) = \frac{d^\mu \mathfrak{P}_0(x - a_0)}{dx^\mu},$$

et il faut que le coefficient de $(x - a_1)^\mu$ dans $\mathfrak{P}_1(x - a_1)$ ait la même valeur que le coefficient correspondant dans le développement de $\mathfrak{P}_0(x - a_0)$, suivant les puissances de $x - a_1$ [1].

Soit a un point quelconque de A', on peut, entre a_0 et a, former une suite de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que a_1 soit dans le domaine de a_0, a_2 dans le domaine de a_1, ..., et finalement a dans le domaine de a_n.

---

[1] Je remarque ici que, d'après le théorème du numéro précédent, le coefficient de $(x - a_0)^\mu$ est

$$\frac{1}{\mu!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{d^\mu f_\nu(x)}{dx^\mu}\right]_{(x=a_0)},$$

en sorte que, dans A', la fonction $F(x)$ a des dérivées de tout ordre, et que l'on a

$$\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d^\mu f_\nu(x)}{dx^\mu}.$$

Il est ensuite aisé de démontrer que la série du second membre converge uniformément dans le voisinage de chaque point de A' et qu'elle a ainsi la même propriété que la série proposée.

En désignant par $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$, $\mathfrak{P}_2(x-a_2)$, ..., $\mathfrak{P}_n(x-a_n)$, $\mathfrak{P}(x-a)$ les éléments de la fonction correspondant aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$, on aura

$$\mathfrak{P}_1(x-a_1)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathfrak{P}_0^{(\mu)}(a_1-a_0)\,\frac{(x-a_1)^\mu}{\mu!},$$

$$\mathfrak{P}_2(x-a_2)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathfrak{P}_1^{(\mu)}(a_2-a_1)\,\frac{(x-a_2)^\mu}{\mu!},$$

. . . .

$$\mathfrak{P}(x-a)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathfrak{P}_n^{(\mu)}(a-a_n)\,\frac{(x-a)^\mu}{\mu!}.$$

La connexion qui existe entre les différents éléments de la fonction considérée dans la région A′ est donc telle que l'on peut déduire de chaque élément donné chacun des autres éléments par un calcul déterminé : en sorte que, dans cette région, la fonction est complètement déterminée si l'on connaît un de ses éléments.

Il peut se faire que, lorsque le point a s'approche du contour qui limite A′, la région de convergence de la série $\mathfrak{P}(x-a)$ dépasse A′. Dans ce cas (qui est le cas ordinaire), il existe une infinité de de séries $\mathfrak{P}'(x-a')$ que l'on peut déduire de $\mathfrak{P}_0(x-a_0)$ par le procédé qui a été décrit précédemment, et dont la région de convergence est, en totalité ou en partie, extérieure à A′, et il peut arriver que, de ces dernières séries, on puisse en déduire d'autres dont la région de convergence contienne encore des points de A′, mais qui, pour ces points, fournissent d'autres valeurs que $F(x)$; toutes ces séries constituent des continuations de la fonction définie tout d'abord pour tous les points à l'intérieur de A′ par la série donnée $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$; elles sont toutes, d'après la terminologie introduite dans mes Leçons, des éléments d'une fonction analytique monogène, qui peut être uniforme ou multiforme, mais qui est complètement définie quand on donne un de ses éléments.

Si la région de convergence de la série $\mathfrak{P}(x-a)$ est toujours, quel que soit a, contenue dans A′, il est impossible de continuer en dehors des limites de la région A′ la fonction que l'expression

$F(x)$ définit à l'intérieur de cette région. Dans ce cas, qui se rencontre effectivement, ainsi qu'on le montrera bientôt; la série représente complètement, en limitant les valeurs de x à celles qui appartiennent à la région A', une fonction uniforme monogène.

Ainsi, par toutes les explications qui précèdent, se trouve justifiée la proposition énoncée à la fin du n° 1.

Une question importante pour la théorie des fonctions se pose maintenant.

Dans le cas où la région de convergence de la série considérée se compose de plusieurs portions A_1, A_2, ..., il est possible que la série représente, dans ces différentes portions, des branches d'une même fonction monogène; mais nous avons à nous poser cette question : cela arrive-t-il dans tous les cas? Si nous arrivons à une réponse négative (à laquelle nous arriverons en réalité), il sera prouvé que le *concept d'une fonction monogène d'un argument complexe et le concept d'une dépendance exprimable par une suite d'opérations arithmétiques ne se rencouvrent pas entièrement*. De la résulte encore que plusieurs des plus importants théorèmes de la nouvelle théorie des fonctions ne peuvent être toujours appliqués aux expressions qui, au sens de l'ancienne analyse (Euler, Lagrange, etc.), sont des fonctions d'une variable complexe ([2]).

([1]) Le contraire a été énoncé par Riemann (*Grundlagen für die allgemeine Theorie der Functionen einer complexen Grösse*, § 19, à la fin). Je remarque à ce propos qu'une fonction d'une variable complexe, telle que Riemann la définit, est toujours une fonction monogène.

([2]) Soient, par exemple, deux expressions

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{f_\nu}(x)$$

de la nature de celles qui nous occupent, et supposons qu'on ait prouvé que, dans le voisinage d'un point appartenant à la région de convergence commune aux deux séries, il existe une infinité de valeurs de x qui rendent égales les deux expressions; il sera prouvé par là même que, à l'intérieur d'une région déterminée et continue, l'égalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{f_\nu}(x)$$

a lieu, mais on n'en peut pas conclure que cette égalité soit vraie pour tous les

J'ai trouvé il y a longtemps, et j'ai montré dans mes Leçons que la série déjà citée

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x^{\nu} + x^{-\nu}},$$

dont la région de convergence se compose de deux morceaux, représente deux fonctions monogènes différentes, et qu'elle représente chacune d'elles complètement.

Si, en effet, x_0 est une valeur quelconque de x dont le module soit égal à 1, on peut, en faisant usage de théorèmes qui appartiennent à la théorie de la transformation linéaire des fonctions ϑ elliptiques, montrer que, parmi les valeurs de x dont le module est inférieur à 1, comme aussi parmi celles dont le module est supérieur, on peut trouver, dans une aire aussi petite qu'on le veut entourant le point x_0, des points tels que le module de $F(x)$ dépasse toute quantité donnée. Ceci montre directement que la série considérée représente dans chacune des deux portions dont se compose sa région de convergence une fonction qui ne peut pas être continuée au delà des limites de cette portion.

Cependant, quoique l'exemple cité puisse déjà servir de réponse à la question posée, il reste toutefois encore un point à éclaircir.

Les deux fonctions définies par la série considérée ont entre elles une relation très simple,

$$F(x^{-1}) = F(x).$$

On pouvait donc se demander si, dans le cas où une expression arithmétique $F(x)$, dans les différentes parties de sa région de convergence, représente des fonctions monogènes différentes de la variable x, il n'existe pas entre ces fonctions une connexion nécessaire qui permette de déduire des propriétés de l'une d'entre elles les propriétés des autres. S'il en était ainsi, il conviendrait d'élargir le concept d'une fonction monogène.

Pour lever toute espèce de doute sur ce point, je me suis pro-

---

points appartenant à la région commune de convergence, tant qu'on n'a pas prouvé que les deux expressions sont, dans cette région, des fonctions monogènes.

posé de construire une expression

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

de la nature qui a été définie plus haut, et qui satisfasse aux conditions suivantes : La région de convergence de la série se compose de n portions $A_1, A_2, \ldots, A_n$, telles que celles qui ont été définies précédemment, et de plus $F(x)$ doit être égal à $F_1(x)$ dans A_1, à $F_2(x)$ dans $A_2, \ldots$, à $F_n(x)$ dans A_n, les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots, F_n(x)$ étant des fonctions uniformes et monogènes, complètement arbitraires et définies dans tout le plan de la variable x, à l'exception des points isolés.

Pour la solution de ce problème, je construis d'abord une expression de la forme considérée, qui, dans le voisinage de tout point pour lequel la partie réelle de x est différente de zéro, converge uniformément, et qui ait la valeur

$$+1 \quad \text{ou} \quad -1,$$

suivant que la partie réelle de x est positive ou négative. Des formules que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques conduisent à de telles expressions; mais, dans ce qui suit, j'ai voulu expressément ne rien emprunter à cette théorie.

4. Si l'on prend deux quantités complexes ω, ω' finies et différentes de zéro, et telles que la partie réelle du quotient

$$\frac{\omega'}{\omega i}$$

soit différente de zéro, et si l'on désigne par ν et ν' des nombres entiers variables, susceptibles de prendre toutes les valeurs, on sait que la somme

$$\sum_{\nu,\nu'}{}' \, |\, 2\nu\omega + 2\nu'\omega' \,|^{-3} \quad (^1)$$

(1) Le symbole $\sum'$ indiquera dans ce qui suit que l'on doit excepter de la sommation les termes qui se présentent avec une valeur infinie.

a une valeur finie, si, dans la sommation, on laisse de côté le terme qui provient de la supposition $\nu = 0$, $\nu' = 0$. Il en résulte, ainsi que je l'ai montré dans le n° 2 de mon Mémoire sur les fonctions uniformes, que la série

$$\frac{1}{u} + \sum_{\nu,\nu'}{}' \left[\frac{1}{u - 2\nu\omega - 2\nu'\omega'} \left(\frac{u}{2\nu\omega + 2\nu'\omega'} \right)^2 \right],$$

qui conserve la même valeur, quel que soit l'ordre dans lequel on range ses termes, définit une fonction analytique uniforme de la variable u, avec le seul point singulier essentiel ∞ ; je la représenterai par

$$\psi(u, \omega, \omega'),$$

à l'aide des équations connues

$$\cot u\pi = \frac{1}{u} + \sum_{\nu}{}' \left(\frac{1}{u - \nu} + \frac{1}{\nu} \right),$$

$$\pi(\cot u\pi - \cot a\pi) = \sum_{\nu} \left(\frac{1}{u - \nu} - \frac{1}{a - \nu} \right),$$

où a désigne un nombre non entier,

$$\left(\frac{\pi}{\sin u\pi} \right)^2 = \sum_{\nu} \left(\frac{1}{u - \nu} \right)^2, \quad \frac{\pi^2}{3} = \sum_{\nu}{}' \frac{1}{\nu^2}.$$

On peut transformer comme il suit l'expression de $\psi(u, \omega, \omega')$.

On a

$$\psi(u, \omega, \omega') = \frac{1}{u} + \sum_{\nu,\nu'}{}' \left[\frac{1}{u - 2\nu\omega - 2\nu'\omega'} + \frac{1}{2\nu\omega + 2\nu'\omega'} + \frac{u}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^2} \right].$$

La somme de tous les termes de cette série pour lesquels ν' est nul est

$$\frac{1}{2\omega} \left[\frac{2\omega}{u} + \sum_{\nu}{}' \left(\frac{1}{\frac{u}{2\omega} - \nu} + \frac{1}{\nu} \right) \right] + \frac{u}{4\omega^2} \sum_{\nu}{}' \frac{1}{\nu^2}$$

$$= \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{u\pi}{2\omega} + \frac{\pi^2}{12\omega^2} u;$$

puis la somme de tous les termes pour lesquels ν' a une valeur déterminée différente de zéro est

$$\frac{1}{2\omega}\sum_{\nu}\left(\frac{1}{\dfrac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}-\nu}-\frac{1}{-\dfrac{\nu'\omega'}{\omega}-\nu}\right)+\frac{u}{4\omega^2}\sum_{\nu}\frac{1}{\left(-\dfrac{\nu'\omega'}{\omega}-\nu\right)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}\cdot\pi+\cot\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi+\frac{\pi^2 u}{4\omega^2\sin^2\left(\dfrac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)}\right];$$

donc

$$\psi(u,\omega,\omega')=\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{u\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{\nu'}{}'\left(\cot\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}\pi+\cot\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)$$
$$+\left[\frac{1}{3}+\sum_{\nu'}{}'\sin^{-2}\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)\right]\frac{u\pi^2}{4\omega^2},$$

ou encore, si, n désignant un nombre entier positif, on pose

$$\eta=\frac{\pi^2}{\omega}\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{-2}\left(\frac{n\omega'}{\omega}\pi\right)\right],$$

$$\psi(u,\omega,\omega')=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{u\pi}{\omega}$$
$$+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi+\cot\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right);$$

il résulte de cette équation que l'on a

$$\psi(u+2\omega,\omega,\omega')=\psi(u,\omega,\omega')+2\eta.$$

Si l'on observe maintenant que $\psi(u,\omega,\omega')$ est une fonction impaire de u, qui n'est pas infinie quand on y fait $u=-\omega'$, l'égalité précédente, où l'on fait $u=-\omega$, donne

$$\eta=\psi(\omega,\omega,\omega').$$

En faisant $u=\omega'$, dans l'équation qui donne la dernière forme de $\psi(u,\omega,\omega')$, on obtient

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega,\omega')$$
$$=-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\omega'\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cot\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi-\cot\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\pi\right];$$

mais on a, en désignant par m un entier positif quelconque,

$$-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\omega'\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\cot\frac{(2n-1)\,\omega')}{2\omega}\pi-\cot\frac{(2n+1)\,\omega'}{2\omega}\pi\right)$$
$$=-\frac{\pi}{2}\cot\frac{(2m+1)\,\omega'}{2\omega}\pi:$$

la quantité

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega,\omega')$$

est donc égale à la limite de

$$-\frac{\pi}{2}\cot\frac{(2m+1)\,\omega'}{2\omega}\pi=\frac{e^{\frac{(2m+1)\omega'\pi}{\omega i}}+e^{-\frac{(2m+1)\omega'\pi}{\omega i}}}{e^{\frac{(2m+1)\omega'\pi}{\omega i}}-e^{-\frac{(2m+1)\omega'\pi}{\omega i}}}\,\frac{\pi i}{2};$$

pour $m=\infty$; cette limite est

$$\frac{\pi i}{2}\quad\text{ou}\quad-\frac{\pi i}{2},$$

suivant que la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ est positive ou négative.

Si l'on se reporte à l'expression primitive de $\psi(u,\omega,\omega')$, on voit qu'elle ne change pas quand on y remplace ν par ν' et ν' par $-\nu$; il en résulte que l'on a

$$\psi(u,\omega,\omega')=\psi(u,\omega',-\omega);$$

on a donc

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega',-\omega)=\pm\frac{\pi i}{2},$$

suivant que la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ est positive ou négative.

On a encore, en désignant par c une quantité arbitraire,

$$\psi(u,\omega,\omega')=c\psi(cu,c\omega,c\omega');$$

d'où, en prenant $c=\frac{1}{\omega}$,

$$\psi(\omega,\omega,\omega')=\frac{1}{\omega}\psi\left(1,1,\frac{\omega'}{\omega}\right);$$

de même,

$$\psi(\omega',\omega',-\omega)=\frac{1}{\omega'}\psi\left(1,1,-\frac{\omega}{\omega'}\right);$$

on en conclut

$$\frac{\omega'}{\omega i}\psi\left(1, 1, \frac{\omega'}{\omega}\right) + \frac{\omega i}{\omega'}\psi\left(1, 1, -\frac{\omega}{\omega'}\right) = \pm\frac{\pi}{2},$$

et si l'on pose

$$\frac{\omega'}{\omega i} = x,$$

x étant une variable complexe, susceptible de prendre toutes les valeurs dont la partie réelle n'est pas nulle; si l'on fait en outre

$$\chi(x) = \frac{2x}{\pi}\psi(1, 1, xi) + \frac{2}{\pi x}\psi\left(1, 1, \frac{i}{x}\right),$$

on aura une série

$$\chi(x) = \frac{2}{\pi}(x + x^{-1}) + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu,\nu'}{}' \left[\frac{x}{(1 - 2\nu - 2\nu' xi)(2\nu + 2\nu' xi)^2} + \frac{x^{-1}}{(1 - 2\nu - 2\nu' x^{-1} i)(2\nu + 2\nu' x^{-1} i)^2}\right],$$

dont les termes *sont tous des fonctions rationnelles de x et qui aura la valeur*

$$+1 \quad \text{ou} \quad -1,$$

selon que la partie réelle de x sera positive ou négative.

Si, maintenant, dans le plan de la variable x, on prend une région X, à distance finie, telle aussi que, ni à l'intérieur, ni sur le contour, la partie réelle de x ne soit nulle, on peut montrer que la série précédente converge à l'intérieur de cette région inconditionnellement et uniformément.

Posons

$$w = 2\nu + 2\nu' xi,$$

en sorte que

$$\psi(1, 1, xi) = 1 + \sum_{\nu,\nu'} \frac{1}{(1 - w)w^2};$$

si l'on désigne par k la plus petite valeur que puisse prendre le module de la quantité

$$\varepsilon + \varepsilon'(\xi + \xi' i)i,$$

les variables ε, ε', ξ, ξ' étant réelles, les deux premières satisfaisant à la condition

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = 1,$$

et le point $\xi + \xi' i$ étant situé à l'intérieur ou sur le contour de X, k ne sera pas nul et l'on aura

$$|w| \geqq 2k\sqrt{\nu^2 + \nu'^2},$$

$$|1 - w| \geqq k\sqrt{(2\nu - 1)^2 + 4\nu'^2},$$

pour tout point x qui n'est pas en dehors de la région X; mais, pour tout nombre entier ν, on a

$$(2\nu - 1)^2 \geqq \nu^2, \quad (2\nu - 1)^2 + 4\nu'^2 \geqq \nu^2 + \nu'^2,$$

et par conséquent

$$\left|\frac{1}{(1 - w)w^2}\right| \leqq \frac{(\nu^2 + \nu'^2)^{-\frac{3}{2}}}{4k^2}.$$

Chaque terme de la série qui représente $\psi(1, 1, xi)$ a donc un module inférieur ou au plus égal au terme correspondant de la série

$$1 + \sum_{\nu, \nu'} \frac{(\nu^2 + \nu'^2)^{-\frac{3}{2}}}{4k^2},$$

dont la somme est finie : il est donc prouvé que la première série, pour les valeurs de x qui appartiennent à la région X, converge inconditionnellement et uniformément.

Mais, si la variable x reste dans X, la variable $\frac{1}{x}$ restera dans une région où, tant à l'intérieur que sur le contour, la partie réelle de $\frac{1}{x}$ ne peut être nulle. Par conséquent, pour le domaine considéré de la variable x, l'expression $\psi\left(1, 1, \frac{1}{x}\right)$ converge aussi uniformément et inconditionnellement : il en est donc de même de la série $\chi(x)$.

On peut encore remarquer que, puisque la série $\psi(1, 1, xi)$ converge uniformément, on peut y réunir en un seul les deux termes pour lesquels, ν ayant la même valeur, ν' a des valeurs opposées; on aura donc ainsi, en désignant par n un entier positif,

$$\begin{aligned}&\psi(1, 1, xi)\\&= 1 + \sum_{\nu}{}' \frac{1}{4\nu^2(1-2\nu)} + \frac{1}{2}\sum_{n,\nu'}\left[\frac{(6\nu-1)n^2x^2 - (2\nu-1)\nu^2}{4n^2x^2 + (2\nu-1)^2(n^2x^2+\nu^2)^2}\right].\end{aligned}$$

Les termes de cette série sont des fonctions rationnelles de x, à coefficients rationnels et qui ne deviennent infinis que pour des valeurs de x dont la partie réelle soit nulle. On peut mettre $\chi(x)$ sous la forme d'une somme semblable.

5. Soit maintenant x' une fonction rationnelle quelconque de x, et posons

$$\chi_1(x) = \chi(x');$$

$\chi_1(x)$ sera encore une somme d'une infinité de fonctions rationnelles de la variable x. Dans le plan de cette dernière quantité, les valeurs pour lesquelles la partie réelle de x' s'annule sont représentées par une courbe algébrique réelle qui partage le plan en plusieurs morceaux, tels que dans les uns la partie réelle de x' soit positive et qu'elle soit négative dans les autres. Dans les premiers $\chi_1(x)$ a partout la valeur $+1$, dans les autres la valeur -1.

Que l'on prenne, par exemple,

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

où α, β, γ, δ désignent des constantes telles que $\alpha\delta - \beta\gamma$ ne soit pas nul, cette courbe sera, comme on sait, toujours un cercle (pourvu que l'on regarde une droite illimitée comme un cercle de rayon infini), et l'on peut déterminer α, β, γ, δ de façon que ce cercle soit un cercle donné et que la partie réelle de x' ait, en un point donné, un signe donné.

Soient maintenant $F_1(x)$, $F_2(x)$ deux fonctions uniformes de x avec un nombre fini de points singuliers; si l'on fait

$$\chi_1(x) = \chi\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right),$$

$$\mathfrak{F}_0(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2}, \quad \mathfrak{F}_1(x) = \frac{F_1(x) - F_2(x)}{2},$$

l'expression

$$\mathfrak{F}_0(x) + \mathfrak{F}_1(x)\chi_1(x)$$

peut être mise sous la forme d'une série infinie dont les termes soient des fonctions rationnelles de x et représente la fonction $F_1(x)$ dans l'une des deux régions que le cercle détermine dans le plan des x, et la fonction $F_2(x)$ dans l'autre région.

Si, dans ce même plan de la variable x, on prend arbitrairement des cercles ou des droites illimitées

$$K', K'', \ldots, K^{(r)},$$

et que l'on détermine r fonctions linéaires de x

$$x', x'', \ldots, x^{(r)},$$

telles que la partie réelle de $x^{(\lambda)}$ s'annule sur la ligne $K^{(\lambda)}$, le plan sera partagé par les lignes en un certain nombre de portions telles que, dans chacune d'elles, la partie réelle d'une quelconque des fonctions $x^{(\lambda)}$ ait partout le même signe.

Soient ensuite

$$\mathfrak{F}_0(x), \quad \mathfrak{F}_1(x), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_r(x)$$

des fonctions uniformes de x avec un nombre fini de points singuliers essentiels, et posons

$$\chi_\lambda(x) = \chi[x^{(\lambda)}] \quad (\lambda = 1, \ldots, r);$$

l'expression

$$\mathfrak{F}_0(x) + \mathfrak{F}_1(x)\chi_1(x) + \mathfrak{F}_2(x)\chi_2(x) + \ldots + \mathfrak{F}_r(x)\chi_r(x)$$

pourra être mise sous la forme d'une série infinie dont les termes soient des fonctions rationnelles de x, et cette série aura cette propriété que, à l'intérieur de chacune des portions dans lesquelles nous avons divisé le plan, elle représentera, il est vrai, une branche d'une fonction monogène, mais dans chaque portion différente, une branche d'une fonction différente.

Si, par exemple, $K', K'', \ldots, K^{(r)}$ sont des cercles dont aucun n'en renferme un autre, le plan se trouvera ainsi partagé en $r+1$ portions, et si la fonction $x^{(\lambda)}$ est déterminée de façon que sa partie réelle soit positive au centre de $K^{(\lambda)}$ (1), l'expression

$$F_{r+1}(x) + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r}[1 + \chi_\lambda(x)][F_\lambda(x) - F_{r+1}(x)],$$

qui est de la même forme que la précédente, si $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{r+1}(x)$ désignent des fonctions uniformes à nombre fini de points singuliers essentiels, représente une série de la nature de celles qui nous occupent; car si x est à l'intérieur du cercle limité par $K^{(\lambda)}$, elle est égale à $F_\lambda(x)$, et lorsque x est extérieur à tous les cercles, elle est égale à $F_{r+1}(x)$; elle représente donc, dans chacune des $r+1$ portions qui composent le plan, une branche d'une fonction uniforme à nombre fini de points singuliers, choisie d'ailleurs d'une façon tout arbitraire.

On obtient un autre exemple en supposant que les cercles K', K'', ..., $K^{(r)}$ aient été pris de façon que les $r-1$ premiers soient contenus dans le dernier; le plan est encore ainsi divisé en $r+1$ portions. L'expression

$$\frac{1}{2}[F_1(x) + F_{r+1}(x)] + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r} F_\lambda(x) - F_{\lambda+1}(x)]\,\chi_\lambda(x)$$

est égale dans ces différentes portions aux fonctions

$$F_1(x),\quad F_2(x),\quad \ldots,\quad F_{r+1}(x)$$

(un cas particulier est celui où l'on prend au lieu des r cercles r droites parallèles).

Si maintenant on exclut du plan de la variable x toutes les valeurs négatives (y compris zéro), il existe, comme on sait, des séries infinies, formées de fonctions rationnelles de x, qui représentent des branches uniformes (2) de certaines fonctions multi-

---

(1) Si r_λ est le rayon du cercle $K^{(\lambda)}$ et a_λ la valeur de x au centre, on peut poser

$$x^{(\lambda)} = \frac{r_\lambda - a_\lambda + x}{r_\lambda + a_\lambda - x}.$$

(2) *Voyez*, dans les Tomes 66 et 67 du *Journal de Borchardt*, les Mémoires de M. Thomé sur les fractions continues de Gauss et les séries procédant suivant les fonctions sphériques.

formes comme $\log x$, x^m (où m est une constante quelconque) et qui convergent uniformément dans le voisinage de tout point autre que les points exclus. Or on peut prendre dans l'expression

$$F_0(x) + F_1(x)\chi_1(x) + \ldots + F_r(x)\chi_r(x),$$

pour $F_0(x)$, $F_1(x)$, $\ldots$, $F_r(x)$, des fonctions de cette dernière espèce; dans ce cas nous aurons une série infinie, dont les termes sont des fonctions rationnelles de x, et qui représente, dans chacune des portions dans lesquelles se divise le plan de la variable x par les lignes $K^{(\lambda)}$ et la droite des valeurs négatives de x, une branche uniforme d'une fonction monogène multiforme, mais en général, dans des portions différentes, des branches de fonctions différentes.

Ces exemples suffisent pour répondre comme il suit à la question posée à la fin du n° 3.

Si la région de convergence d'une série, dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable x, peut être partagée en portions telles que la série converge uniformément dans le voisinage de chaque point situé dans l'intérieur de ces morceaux, cette série représente dans chacun de ces morceaux une branche uniforme d'une fonction monogène de x, mais elle ne représente pas nécessairement une même fonction dans les différents morceaux.

6. Dans mes Leçons sur les éléments de la théorie des fonctions, j'ai mis en évidence, dès le début, deux théorèmes qui ne s'accordent point avec les vues ordinaires, à savoir que :

I. — *Si une fonction d'une variable réelle est continue, on ne peut pas en conclure que, pour les diverses valeurs de la variable, elle ait une dérivée déterminée; encore moins peut-on en conclure qu'elle possède toujours une dérivée continue, au moins dans des intervalles définis.*

II. — *Si une fonction d'une variable complexe est définie pour une certaine région de cette dernière, il n'est pas toujours possible de la continuer au delà des limites de cette région : en d'autres termes, il existe des fonctions monogènes d'une variable ayant cette propriété, que les points du plan de la* *variable, pour lesquels elle ne peut être définie, ne sont pas seulement des points isolés, mais forment des lignes et des surfaces.*

Comme il a été question, dans ce qui précède, de fonctions d'une variable complexe qui jouissent de cette dernière propriété, je profite de cette occasion pour indiquer un exemple facile à traiter d'une telle fonction.

Supposons que le rayon du cercle de convergence d'une série ordinaire procédant suivant les puissances entières de x

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu$$

soit égal à 1, et que la série converge inconditionnellement et uniformément pour toutes les valeurs de x dont le module est égal à 1, en sorte que, t désignant une variable réelle, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i}$$

soit une fonction continue de t.

Dans l'intérieur du cercle de convergence, prenons arbitrairement un point x_0 et transformons la série donnée en une série ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$, $\mathfrak{P}(x - x_0)$. Si r_0 est le module de x_0, le rayon de convergence de la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$ ne peut pas être inférieur à $1 - r_0$, mais peut lui être supérieur. Si l'on se trouve dans le dernier cas, une partie de la circonférence du cercle de convergence de la série donnée est située à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - x_0)$, et si l'on pose

$$\frac{x_0}{r_0} = e^{t_0 i}, \quad x_t = e^{ti},$$

pour toutes les valeurs de t comprises entre deux limites déterminées $t_0 - \tau$, $t_0 + \tau$, on aura l'égalité

$$\sum_{0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i} = \mathfrak{P}(x_t - x_0);$$

maintenant $\mathfrak{P}(x - x_0)$, regardée comme une fonction de x, admet des dérivées de tous les ordres possibles; il en est de même pour la série $\mathfrak{P}(x_t - x_0)$ regardée comme une fonction de t, pour les valeurs de cette variable comprises entre $t_0 - \tau$ et $t_0 + \tau$. Il en résulte que si, dans un cas particulier, on peut démontrer que la fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i}$$

ne possède dans aucun intervalle des dérivées de tous les ordres possibles, il faudra en conclure que le cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$, et cela de quelque façon que l'on choisisse le point x_0, est toujours tout entier à l'intérieur du cercle de convergence de la série donnée, et que la fonction représentée par cette série ne peut pas être continuée au delà de ce cercle de convergence.

Soit maintenant a un nombre entier positif impair, b une quantité positive plus petite que 1 et soit $a_\nu = a^\nu$: la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu x^{a_\nu}$$

satisfait aux conditions précédemment imposées, mais j'ai démontré que la fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos a_\nu t,$$

tant que l'on a $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, n'a, pour aucune valeur de t, de quotient différentiel déterminé ([1]). La fonction définie par la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu x^{a_\nu}$$

est donc, si ab est inférieur à $1 + \frac{3}{2}\pi$, une fonction qui ne peut pas être continuée au delà du cercle de convergence de la série, et elle

---

([1]) Cette démonstration, que j'avais communiquée par lettre à M. P. du Bois-Reymond, a été publiée par lui dans le Tome 79 du *Journal de Borchardt*.

n'existe que pour les valeurs de x dont le module ne dépasse pas l'unité.

Il est aisé de construire une infinité de séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de la variable qui jouissent de la même propriété que la précédente, et même de démontrer l'existence, pour une région arbitrairement limitée, de fonctions qui ne peuvent pas être continuées au delà de cette région; mais, à présent, je ne veux pas m'arrêter là-dessus.

Pour conclure, je ferai encore remarquer que des formes arithmétiques plus composées, à l'aide desquelles on peut exprimer des fonctions monogènes d'une ou de plusieurs variables, où des branches uniformes de telles fonctions donneraient lieu à des recherches analogues à celles que nous avons développées pour une forme simple et conduiraient à des résultats pareils.

M. Weierstrass a fait la communication suivante à l'Académie des Sciences de Berlin (1).

Dans un Mémoire présenté à l'Académie le 12 août, et intitulé *Zur Functionen-Lehre*, j'ai formé une série infinie, dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable x, et qui possède la propriété d'avoir pour valeur $+1$ ou -1, selon que la partie réelle de x est positive ou négative.

Bien que cette série soit assez simple par elle-même et convienne fort bien pour l'emploi que j'en ai fait, — elle sert à la démonstration du théorème principal énoncé au n° 5 du Mémoire cité, — sa déduction est pourtant un peu compliquée et exige la connaissance de plusieurs lemmes empruntés à la théorie des fonctions trigonométriques. Il m'a donc été fort intéressant d'apprendre par une lettre de M. J. Tannery, professeur suppléant à la Faculté des Sciences de Paris (qui a été aussi le traducteur (2) de mon Mémoire en français), qu'il existe d'autres séries, extrêmement simples, de la même forme que la mienne, qui possèdent aussi

---

(1) *Monatsbericht*, février 1881.

(2) Qu'il me soit permis de remercier ici l'illustre géomètre, qui a bien voulu prendre la peine de revoir cette traduction. J. T.

la propriété en question et peuvent non seulement servir tout aussi bien pour le but proposé, mais sont encore préférables en ce que leur déduction et la démonstration de leur propriété caractéristique ne s'appuient que sur des lemmes tout à fait élémentaires de la théorie des fonctions.

Je me permets d'emprunter ce qui suit à la lettre de M. Tannery.

« Prenons une série de nombres entiers positifs

$$m_0, \quad m_1, \quad m_2, \quad \ldots,$$

assujettis à la condition

$$\lim_{n=\infty} m_n = \infty,$$

on a alors

$$\lim \frac{1 + x^{m_n}}{1 - x^{m_n}} = \begin{cases} +1 \text{ si } |x| < 1, \\ -1 \text{ si } |x| > 1; \end{cases}$$

mais on a

$$\frac{1 + x^{m_n}}{1 - x^{m_n}} = \frac{1 + x^{m_0}}{1 - x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[\frac{1 + x^{m_\nu}}{1 - x^{m_\nu}} - \frac{1 + x^{m_{\nu-1}}}{1 - x^{m_{\nu-1}}}\right]$$

$$= \frac{1 + x^{m_0}}{1 - x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{2 x^{m_{\nu-1}} (x^{m_\nu - m_{\nu-1}} - 1)}{(x^{m_\nu} - 1)(x^{m_{\nu-1}} - 1)}.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$\psi(x) = \frac{1 + x^{m_0}}{1 - x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{2 x^{m_{\nu-1}} (x^{m_\nu - m_{\nu-1}} - 1)}{(x^{m_\nu} - 1)(x^{m_{\nu-1}} - 1)},$$

la série du second membre de cette équation sera convergente pour chaque valeur de x dont le module est différent de 1 et aura pour valeur $+1$ ou -1, selon que le module de x sera inférieur ou supérieur à l'unité.

» Si l'on pose dans l'expression précédente

$$m_\nu = 2^\nu,$$

cette expression prend une forme extrêmement simple

$$\psi(x) = \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2x^2}{x^4 - 1} + \frac{2x^4}{x^8 - 1} + \ldots. »$$

A ceci j'ajouterai encore ce qui suit :

On voit facilement que la série de M. Tannery converge uniformément dans le voisinage de chaque valeur de x dont le module est différent de 1.

Soit de plus x' une fonction rationnelle de x; les valeurs de cette dernière quantité, pour lesquelles les valeurs correspondantes de x' ont un module égal à 1, seront représentées dans le plan de x par une courbe algébrique, qui partage ce plan en plusieurs portions, de manière que, dans quelques-unes d'entre elles, le module de x' sera supérieur, dans les autres sera inférieur à 1.

Aussi, en posant

$$\psi(x') = \chi_1(x),$$

$\chi_1(x)$ représentera une expression de la même nature que celle désignée de la même manière au commencement du n° 5 de mon Mémoire cité. Si l'on prend en particulier

$$x' = \frac{1+x}{1-x},$$

on obtient une expression qui, à l'égal de celle que j'ai désignée par $\chi(x)$, a pour valeur $+1$ ou -1, selon que la partie réelle de x est positive ou négative.