Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 137-156

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_137_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRODIE (B.-C.), F. R. S., professeur de Chimie à l'Université d'Oxford. — LE CALCUL DES OPÉRATIONS CHIMIQUES, SOIT UNE MÉTHODE POUR LA RECHERCHE, PAR LE MOYEN DE SYMBOLES, DES LOIS DE LA DISTRIBUTION DU POIDS DANS LES TRANSFORMATIONS CHIMIQUES; traduit de l'anglais par le Dr A. NAQUET. — 1 vol. in-4°. Paris, Gauthier-Villars, 1879.

C'est venir un peu tard sans doute pour parler d'un Livre qui a été publié depuis plusieurs années déjà, d'autant plus que la traduction dont il s'agit, avant de paraître en Volume, avait été insérée dans le *Moniteur scientifique* du Dr Quesneville (novembre 1878, mars et avril 1879). Mais le sujet est d'une nature tellement originale, et d'autre part il semble avoir attiré si peu jusqu'à présent l'attention des mathématiciens français, qu'on nous pardonnera, nous l'espérons du moins, ce défaut d'actualité, plus apparent que réel.

C'est du reste le danger des publications de cette nature, de passer quelquefois au milieu de l'inattention générale, malgré l'intérêt très positif qu'elles peuvent présenter. Sur la seule inspection du titre : « C'est de la Chimie ! » s'écrient volontiers les mathématiciens, et ils passent à une occupation plus sérieuse selon eux; en feuilletant le Volume et le trouvant tout rempli de formules algébriques : « Ce sont des Mathématiques! » déclarent les chimistes, et ils retournent à leur laboratoire.

Naguère, au siècle dernier même, les sciences étaient loin d'avoir produit les innombrables résultats qu'on peut constater aujourd'hui, et les esprits les plus éminents ne dédaignaient pas d'associer des études très diverses ; ils embrassaient les branches les plus variées parfois du savoir humain, et ils y marquaient leur trace par des découvertes empreintes d'une idée de généralisation extrême.

De nos jours il n'en est plus ainsi. Nous sommes embarrassés sans doute par l'excès même de nos richesses ; personne ne saurait s'assimiler la somme énorme des vérités scientifiques acquises ; pour produire, il faut se spécialiser, s'attacher, non pas même à une science, mais à une section particulière de telle ou telle science, ce qui conduit volontiers à négliger le reste. C'est là une tendance fâcheuse au point de vue de la coordination philosophique des connaissances humaines et qui finirait par amener dans l'avenir une certaine stérilité. Nous avons la confiance que malgré tout une réaction salutaire ne tardera pas à se produire dans le sens dont nous parlons, d'autant plus qu'elle se manifeste déjà quelque peu dans les autres pays. Mais, pour revenir à notre sujet, il faut reconnaître qu'en France, actuellement, il y a peu de mathématiciens qui s'intéressent à la Chimie et peu de chimistes s'occupant de Mathématiques.

Ici, c'est au point de vue mathématique, à peu près exclusivement, que nous voulons essayer de rendre compte de l'Ouvrage de M. Brodie. Notre complète incompétence au point de vue chimique, que nous confessons en la regrettant fort, nous interdirait aussi bien l'éloge que le blâme. Mais, en laissant de côté toute appréciation sur ce point, il reste un calcul symbolique d'une espèce nouvelle, créé pour apporter une méthode rationnelle de représentation des faits chimiques, à la place des notations en vigueur. Cette Algèbre spéciale mérite certainement qu'on ne la laisse pas passer inaperçue ; il y a là une tentative éminemment intéressante et très philosophique ; mais, en raison même de son objet, le nouveau calcul ne pourra produire des résultats vraiment efficaces et appréciables qu'à partir du jour où les chimistes auront entrepris de se l'assimiler.

Il nous semble donc que le Dr Naquet a donné un bon exemple et fait œuvre scientifique dans le sens le plus élevé du mot en présentant au public français la traduction du *Calcul des opérations chimiques*.

L'Ouvrage se compose de deux Mémoires distincts.

Dans le premier, qui renferme huit Sections, M. Brodie, se plaçant en dehors de toute hypothèse *a priori*, et ayant seulement pour but la représentation des phénomènes, débute par un certain nombre de définitions sur les *poids* (il désigne par le mot *poids* une portion déterminée de matière pondérable). Il distingue les poids *uniques*, les *groupes* de poids, les poids *composés* et les poids *simples*. Il appelle enfin *distribution de poids* l'opération par laquelle un poids composé se résout en ses composants, ce qui le conduit à la notion des poids *distribués* et *non distribués*.

Il considère ensuite toute opération chimique comme s'accomplissant sur l'unité d'espace et donnant pour résultat un *poids*, et il représente ces opérations par des symboles $x_1, x_2, \ldots$, répondant aux poids $A_1, A_2, \ldots$ qui résultent des opérations correspondantes.

Vient, après cela, la notion d'*identité* entre deux opérations, pour laquelle on emploie le signe $=$, puis l'introduction des signes $+$ et $-$, qui se définissent tout naturellement et sont soumis aux mêmes règles que celles de l'Algèbre ordinaire. Le symbole chimique 0 représente l'absence de poids.

Un poids composé, si les poids composants sont x, y, se représente par le symbole $\varphi = xy$. C'est ce qu'on pourrait appeler la multiplication chimique, dont on établit les propriétés, pareilles à celles de la multiplication algébrique. L'auteur résume ces notions en disant que les signes xy, (xy), $x+y$, $(x+y)$ représentent ces mêmes opérations se faisant *successivement, conjointement, séparément* ou *collectivement*.

Le symbole 1 s'introduit dans ce calcul, où il a une grande importance, comme la représentation de l'unité d'espace, et on a $x^0 = 1$; quant au signe ∞, il représente la totalité de l'univers pondérable.

Les poids étant les seuls éléments à considérer pour constater l'identité des opérations, on se trouve conduit aux équations chimiques fondamentales $xy = x+y$, $\frac{x}{y} = x-y$, d'où l'on tire en particulier $1 = 0$ et $0 = 1 = 2 = \ldots = n$. Ces conséquences peuvent paraître répugnantes et paradoxales à qui s'attache trop à la signification des symboles ordinaires; mais elles n'en sont pas moins justifiées et se prêtent à la représentation des faits. L'Algèbre chimique se trouve faire à peu près du signe 1 ce que l'arithmétique fait du zéro. Il reste à bien tracer les règles à suivre dans le nouveau calcul, ce qui est l'objet essentiel de l'Ouvrage.

On appelle *facteur premier* le symbole d'un poids simple, et les symboles de deux poids simples l'un par rapport à l'autre sont dits *premiers entre eux*. De là suivent une série de déductions présentant avec la théorie arithmétique des nombres premiers l'analogie la plus curieuse, et spécialement le symbole d'un poids composé entier $\varphi = a^n b^{n_1} c^{n_2} \ldots$.

Partant de ces propriétés, l'auteur se propose, pour chaque problème particulier, d'exprimer les symboles chimiques au moyen d'un nombre entier de facteurs premiers, en s'appuyant sur les données fournies par l'expérience, et cela avec le plus petit nombre possible de facteurs premiers. La méthode qu'il indique, dans sa généralité, vaut la peine d'être résumée très sommairement ici.

Si les symboles chimiques φ, φ_1, φ_2, ... sont reliés par n équations de la forme

$$m\varphi + m'\varphi_1 + m''\varphi_2 + \ldots = 0,$$

m, m', m'', ... étant des symboles numériques, on pose

$$\varphi = a^p b^{p_1} c^{p_2} \ldots, \quad \varphi_1 = a^q b^{q_1} c^{q_2} \ldots, \quad \varphi_2 = a^r b^{r_1} c^{r_2} \ldots, \quad \ldots.$$

Alors p, q, r, p_1, q_1, r_1, ... sont reliés par un système d'équations de la forme

$$mp + m'q + m''r + \ldots = 0, \quad mp_1 + m'q_1 + m''r_1 + \ldots = 0, \quad \ldots.$$

La question est alors ramenée à la recherche des solutions en nombres positifs entiers des valeurs p, q, r, p_1, q_1, r_1, ... qui satisfont à ces équations indéterminées. Le nombre des formes admissibles est de plus limité par la condition que les facteurs a, b, c, ... soient les symboles de poids réels, condition qui s'exprime encore sous forme analytique.

Voilà certes une application de l'Analyse indéterminée aussi ingénieuse que surprenante. M. Brodie s'en sert, dans les Sections suivantes de son étude, pour construire les équations chimiques, d'après les données fournies par l'expérience. Cette partie relevant plus spécialement du domaine chimique, nous sommes obligé de la passer presque sous silence. Nous nous bornerons à signaler la formule que l'Analyse indéterminée conduit à assigner au chlore, en partant de la décomposition de l'acide chlorhydrique. α étant le symbole de l'hydrogène et χ un facteur premier, on trouve : acide chlorhydrique, $\alpha^{1+t}\chi^{1+t_1}$; chlore, $\alpha^{1+2t}\chi^{2(1+t_1)}$, avec les conditions $t \leqq 17$, $t_1 \geqq 0$, et par suite $\alpha\chi^2$ est le symbole le plus simple du chlore. Pour l'iode, le brome et certains autres corps, interviennent des résultats semblables. Il est certain que, le jour où l'on viendrait à reconnaître que le chlore, l'iode et le brome sont des corps composés renfermant de l'hydrogène, il y aurait là un éclatant triomphe pour les doctrines de M. Brodie, qui n'en ont pas moins dès à présent une grande valeur, en tant que procédés pour la représentation des phénomènes.

Dans une conclusion qui termine le premier Mémoire, l'auteur s'applique à caractériser l'esprit de sa méthode et à montrer combien elle est indépendante de toute théorie hypothétique et de la théorie atomique spécialement.

Le second Mémoire, intitulé *De l'analyse des faits chimiques*, a plus particulièrement pour objet l'application de l'instrument symbolique dont la construction est indiquée dans le premier. Il débute par une Introduction *sur la loi des nombres pairs*, dont l'objet essentiel est de justifier l'hypothèse fondamentale du système, en vertu de laquelle l'unité d'hydrogène est toujours un poids simple non distribué, dont le symbole doit être par conséquent un facteur premier α.

En appliquant les procédés de raisonnement indiqués dans le premier Mémoire, on reconnaît qu'il n'y a réellement à hésiter qu'entre les symboles α et α^2 pour la représentation de l'hydrogène ; mais l'hypothèse α^2 se prêterait à toute une série de composés dont l'existence serait en contradiction avec la loi des nombres pairs de Laurent et Gerhardt, et cela motive l'exclusion de cette hypothèse. On trouve enfin une critique des exceptions (déjà indiquées dans le premier Mémoire) qui sembleraient mettre en défaut le système symbolique proposé ; de là des objections et des difficultés que l'auteur s'attache à réfuter. Nous regrettons de ne pouvoir insister sur cette partie très intéressante et nous pourrions dire très littéraire de l'Ouvrage ; mais les questions qui s'y trouvent traitées relèvent soit de la Chimie, soit de la logique pure, bien plutôt que du domaine mathématique.

Nous allons désormais suivre, Section par Section, les matières exposées dans le corps du second Mémoire, et nous efforcer d'en présenter l'analyse, en y mettant la clarté compatible avec les limites fort restreintes d'un simple compte rendu.

La Section I est intitulée *Sur les équations chimiques.* Le type d'une équation chimique est $\nu = m\varphi + m'\varphi_1 + m''\varphi_2 + \ldots = 0$, d'où résulte, comme on l'a vu plus haut, un certain système d'équations indéterminées. En général, on ne peut multiplier une telle équation par un symbole chimique, et cette impossibilité restreindrait à un très haut degré le calcul symbolique dont nous nous occupons; mais on démontre assez facilement que cette opération est possible lorsque l'on a la condition $m + m' + \ldots = 0$. Une équation $\nu = 0$ qui remplit cette condition est appelée *équation chimique normale*. Un très grand nombre d'équations chimiques satisfont d'elles-mêmes à cette condition; mais on peut rendre normale une équation chimique quelconque en lui ajoutant un symbole numérique convenable, ce qui peut se faire, puisque ce symbole désigne l'absence de poids. Une fois cette transformation effectuée, il devient licite de multiplier ou de diviser les équations par un symbole chimique. Par exemple, l'équation fondamentale $xy = x + y$ n'est pas normale. Elle le devient en l'écrivant $1 + y = x + y$ ou $(x - 1)(y - 1) = 0$, et l'on démontre la formule plus générale $A(x - a)(y - b)(z - c)\ldots = 0$, A étant un symbole chimique. C'est grâce à cette réduction aux formes normales que l'on arrive à la parfaite coïncidence des propriétés du symbole chimique 1 avec le symbole arithmétique représenté par le même signe.

Comme exemple bien simple, l'auteur prend l'équation

$$2\alpha^m \nu^m = 3\alpha + \alpha^n \nu^n.$$

On peut l'écrire

$$(\alpha^m \nu^{m_1})^2 = \alpha^3 \alpha^n \nu^{n_1}$$

et la traiter par l'analyse indéterminée, comme on l'a vu plus haut, ce qui donne

$$2m = 3 + n \tag{1}$$

et

$$2m_1 = n_1. \tag{2}$$

Autrement, donnons-lui la forme normale $2 + 2\alpha^m \nu^{m_1} = 3\alpha + \alpha^n \nu^{n_1}$. Si l'on y fait $\nu = 1$, elle donne

$$2 = \frac{\alpha(2\alpha^{m-1} - \alpha^{n-1} - 1)}{\alpha - 1},$$

expression dont la vraie valeur pour $\alpha = 1$ est

$$2m - 2 - n + 1 = 2m - n - 1;$$

donc

$$2m - n - 1 \quad \text{ou} \quad 3m - n = 3.$$

Si au contraire on fait d'abord $\alpha = 1$, on a

$$-1 = \frac{\nu^{m_1} - \nu^{n_1}}{\nu^{m_1} - 1},$$

ou, en prenant la vraie valeur pour $\nu = 1$,

$$-1 = \frac{m_1 - n_1}{m_1},$$

c'est-à-dire $2m_1 = n_1$. On retombe donc par cette méthode sur les deux relations (1) et (2).

Après avoir remarqué le bénéfice qu'on obtient non seulement au point de vue algébrique, mais même au point de vue concret, lorsqu'on rend normale une équation chimique, l'auteur insiste sur ce fait qu'on peut substituer un poids simple à un autre poids simple, sans altérer l'équation. Pour les substitutions à effectuer à la place du symbole 1, il y a un intérêt très grand (sur lequel peut-être l'auteur n'insiste pas assez) à donner aux équations une forme homogène, en écrivant par exemple l'équation fondamentale $1 + xy = x + y$ sous cette forme-ci :

$$1^2 + xy = x . 1 + y . 1.$$

La Section II traite *des faits chimiques simples et composés*. Une équation chimique peut être envisagée non seulement comme une assertion relative à l'identité de certains poids, mais comme un moyen d'enregistrer un *fait chimique*, en appelant ainsi tout changement survenu dans la composition chimique des unités de matière. On distingue les faits chimiques en faits *simples* et *composés*, ces définitions étant essentiellement relatives et un fait composé dans un certain système de faits pouvant fort bien être considéré comme simple dans un autre système. La Section se termine par un certain nombre d'exemples propres à éclaircir ces notions.

La Section III, *Sur les causes des faits chimiques*, a pour objet l'étude des opérations au moyen desquelles les faits se produisent, ou des *causes* de ces faits. Analytiquement, la cause d'un fait est caractérisée par la substitution réciproque de deux symboles a et x ; un même fait peut être rapporté à deux ou plusieurs causes indifféremment ; il peut aussi reconnaître deux ou plusieurs causes concourant simultanément à sa production, c'est-à-dire résulter de 2, 3, ..., n substitutions. Les symboles $x, y, z, \ldots$ sont appelés les *variables*, et ceux qu'on met à leur place, $a, b, c, \ldots$, les *valeurs* de ces variables. Il nous semble que l'auteur néglige un peu trop de développer ces définitions, qui semblent présenter quelque chose d'incomplet, en raison de la réciprocité entre $x, y, z, \ldots$ et $a, b, c, \ldots$; mais cela s'éclaircit par les applications ultérieures. Un poids *constant* est celui qui ne subit aucune substitution dans un système de faits déterminé.

Toutes ces notions se traduisent algébriquement par autant de propriétés correspondantes que doivent présenter les équations chimiques. Mais, réciproquement, toute racine d'une équation chimique ne saurait être interprétée comme la cause d'un fait, pas plus que les racines d'une équation qui traduit un problème de Géométrie ou de Mécanique ne sont toutes nécessairement des solutions réelles de ce problème, susceptibles d'une interprétation concrète.

Dans cet ordre d'idées vient en premier lieu l'étude de l'équation $Axy + Aab = Aya + Axb$; on arrive à y satisfaire soit par la substitution réciproque de a à x, soit par celle de b à y. Le fait chimique qu'elle représente est donc susceptible d'être rapporté à deux causes, et l'équation peut s'écrire

$$u = A(x - a)(y - b) = 0.$$

Le fait chimique $-u$ est défini l'*inverse* du fait u.

Toutes les équations chimiques ainsi formées le sont au moyen des facteurs premiers représentant des poids simples. Une certaine part, dans la construction de ces équations, est donc laissée à l'hypothèse, laquelle s'appuie elle-même sur des considérations d'ordre expérimental.

L'équation que nous venons de considérer peut affecter la forme

$$A(x - a)(y - a) = 0,$$

résultant de la condition $a = b$, et aussi la forme $A(x - a)^2 = 0$, résultant de $a = b$ et $x = y$. On peut aussi avoir $a = 1$, d'où $A(x - 1)(y - b) = 0$; une des causes du fait est la substitution à x d'un « non-poids » ; on donne le nom de *transférence* à une substitution de cette espèce. Ainsi le fait ci-dessus a pour cause soit la transférence de x, soit la substitution de b à y. Enfin la constante A peut être remplacée par 1. Des exemples éclaircissent toutes ces particularités.

La fin de la Section III est consacrée à l'examen des équations

$$A(x-a)(y-b)(z-c)=0,$$
$$A(x-a)(y-b)(z-c)(v-d)=0$$

et des particularités qu'elles peuvent présenter. Il n'y a là rien qui mérite véritablement d'être plus spécialement analysé au point de vue de la méthode algébrique, après ce que nous avons dit ci-dessus.

Pour la même raison nous passerons également sous silence la Section IV, *Exemples d'analyse élémentaire des faits*, qui est très digne d'intérêt pour les chimistes et dont l'étude peut jeter beaucoup de lumière sur les théories précédentes, mais qui ne rentre pas directement dans la catégorie des notions dont l'analyse importe au public mathématique, le seul auquel nous nous adressions ici.

Nous avons hâte d'arriver à la Section V et dernière, *Sur l'analyse théorique d'un fait chimique*, qui offre un intérêt mathématique tout spécial. Elle débute par un nouvel examen approfondi des équations du second et du troisième ordre écrites plus haut, en considérant les substitutions variées auxquelles elles répondent, et dont l'interprétation concrète est éminemment curieuse. On trouve aussi cette remarque, déjà faite plus haut, qu'un symbole de poids simple quelconque peut être substitué à 1, pris pour symbole de poids simple, de façon à rendre l'équation homogène.

L'auteur définit ensuite une *congruence chimique;* deux fonctions chimiques sont dites *congrues par rapport à une substitution* si elles acquièrent la même valeur lorsque dans chacune d'elles on opère cette substitution. La substitution est appelée *module* et la valeur commune *résidu*. On représentera une congruence chimique par la notation

$$f(x)\equiv \mathrm{R},\ \mathrm{mod}(x-a),$$

et, plus généralement,

$$f(x,y,z,\ldots)\equiv \mathrm{R},\ \mathrm{mod}(x-a)\,\mathrm{mod}(y-b)\,\mathrm{mod}\,(z-c)\ldots.$$

Dans la congruence $f(x)\equiv \mathrm{R}\ \mathrm{mod}\ (x-a)$, si l'on remplace x

par $a + (x - a)$, $f(x)$ est une fonction rationnelle et entière de $x - a$, de la forme

$$A_0 + A_1(x - a) + \ldots + A_n(x - a)^n;$$

on en déduit

$$f(a) = A_0, \quad A_0 = R \quad \text{et} \quad f(x) = f(a) + A_1(x - a),$$

en vertu d'un principe antérieurement établi. En faisant $x = a$, on obtient $A_1 = f'(a)$. Cette notion s'étend au cas de deux ou plusieurs symboles variables. Par exemple, la congruence

$$f(x, y, z) \equiv f(a, b, c), \text{ mod}(x - a) \text{ mod}(y - b) \text{ mod}(z - c)$$

donne

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \equiv f(a, b, c) & \\ & + f'_a(a, b, c)(x - a) + f'_b(a, b, c)(y - b) \\ & + f'_c(a, b, c)(z - c). \end{aligned}$$

Le rapprochement, sinon l'identité, entre l'idée de congruence chimique et celle de congruence numérique se fait de lui-même et justifie largement le système de notation adopté.

L'analyse théorique d'un fait chimique produit par un nombre quelconque de substitutions consiste dans l'énumération de tous les faits chimiques différents qui résultent de ces substitutions d'une manière quelconque et dont le fait soumis à l'analyse est le total. Ce problème se présente dans toute congruence chimique. Pour l'aborder, l'auteur fait cette remarque, éminemment philosophique, que le théorème de Taylor, tout à fait indépendant de l'interprétation des symboles, s'appuie exclusivement au fond sur les lois commutative et distributive de la multiplication, $xy = yx$, $x(y + z) = xy + xz$, démontrées pour les symboles chimiques. De là il tire cette conséquence que la congruence

$$f(x) \equiv f(a) \text{ mod}(x - a)$$

entraîne l'équation

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) & \\ & + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n, \end{aligned}$$

qui se décompose ainsi, en raison des propriétés concrètes antérieurement établies :

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=0, \quad \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2=0, \quad \ldots,$$
$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n=0.$$

Toutes ces équations, individuellement considérées, font connaître les phases successives par lesquelles on obtient le résultat indiqué dans la première d'entre elles.

Pour ne pas exagérer la longueur de ce compte rendu et comme nous avons pour objet de mettre sous les yeux du lecteur l'esprit de la méthode bien plutôt que les éléments mêmes de cette théorie, nous ne ferons que mentionner l'extension toute logique du théorème de Taylor aux cas de deux ou de plusieurs variables.

Ces considérations conduisent à une définition nouvelle de l'équation chimique normale, fondée sur les propriétés des dérivées successives du premier membre. Ces diverses dérivées, de même que le premier membre lui-même, doivent toutes s'annuler séparément lorsqu'on remplace par 1 les facteurs premiers que l'équation contient. Cette seconde définition, résultant de l'analyse, est plus exacte et plus complète que la définition antérieurement exprimée.

On se trouve ainsi mis en possession d'une théorie générale systématique du mode de production des faits chimiques, tout fait chimique résultant de certaines transférences de poids simples, et beaucoup de faits, simples en apparence, doivent être logiquement considérés comme composés de nombreux autres faits, parmi lesquels il y a lieu de distinguer ceux qui sont réalisables et ceux qui peuvent ne pas l'être. Le problème général de l'analyse des faits chimiques est donc ainsi résolu.

L'Ouvrage se termine par deux Notes critiques de M. Naquet et une de M. Brodie, mais dont nous n'avons pas à parler, car les matières traitées par les deux savants sont dans un ordre d'idées se rapportant à la Chimie pure. Notre tâche se trouve donc terminée, et nous n'ajouterons plus que peu de mots pour caractériser l'œuvre dont nous avons essayé de donner un aperçu.

Les tentatives de cette nature, c'est-à-dire ayant pour objet la constitution systématique d'un ensemble de symboles et de règles de calcul pour représenter un ordre de faits scientifiques, nous semblent dignes au plus haut degré d'attirer l'attention des savants. L'application pratique peut en être plus ou moins facile, la fécondité peut en être plus ou moins grande; dans le cas particulier dont il s'agit ici, par exemple, on ne pourra, encore une fois, décider sur ces points que du jour où les chimistes auront entrepris l'étude de cette Algèbre particulière, au lieu de s'en tenir à leurs formules habituelles.

Mais ce qui est certain, c'est que l'idée à laquelle obéit l'inventeur est de nature à placer sous son vrai jour l'interprétation philosophique de l'Algèbre, prise dans son acception la plus élevée et la plus étendue. Une Algèbre est une véritable langue écrite, dont les symboles et les règles dérivent des faits qu'il s'agit d'interpréter, et, lorsque l'on considère, dans l'Algèbre usuelle, les règles de calcul auxquelles on doit se conformer, ce serait une grave erreur de jugement, à notre avis, que de leur donner un caractère absolu, en ne se reportant pas aux faits qui ont imposé ces règles. Pour que la théorie d'un système d'opérations quelconques ait une valeur rationnelle, il faut que ce système d'opérations ne soit que la conséquence d'une catégorie de faits dont les transformations se traduiront dans cette langue nouvelle, d'une merveilleuse concision, si précieuse par suite pour offrir à l'esprit de recherche un point d'appui solide.

Un écueil cependant doit être soigneusement évité : il ne faudrait pas créer une Algèbre pour une catégorie de faits trop particuliers. Autrement, on tomberait dans une anarchie intellectuelle engendrée par la multiplicité des langages, au milieu desquels il deviendrait presque impossible de se retrouver. Ce serait une sorte de Babel scientifique. Mais nous n'en sommes pas là, il s'en faut de beaucoup, et il y a plutôt, pour l'instant, à redouter la tendance contraire.

L'Algèbre de la ligne droite, ou l'Algèbre ordinaire, est répandue partout; l'Algèbre des figures planes, c'est-à-dire le Calcul des imaginaires ou des équipollences, est entrée dans la science mathématique depuis un demi-siècle à peine ; l'Algèbre des figures dans l'espace, ou Calcul des quaternions, est bien peu cultivée jusqu'à présent, surtout en France. Tout au plus avons-nous vaguement entendu parler des tentatives faites pour créer un Algorithme spécial applicable aux lois de la logique. Enfin, en ce qui concerne la Chimie, nous ne croyons pas que M. Brodie compte de précurseurs.

Il est à remarquer que chaque innovation de ce genre donne lieu à une sorte de paradoxe apparent, qui épouvante et fait reculer tout d'abord les mathématiciens habitués à leurs conceptions anciennes et trop portés à leur donner un sens absolu qu'elles n'ont pas. C'est ainsi, pour ne rien dire de la théorie des quantités négatives, que les équipollences mènent à l'extraction de la racine carrée de $-a^2$ ou de -1, opération impossible et absurde, disait-on, et sur laquelle on a si longtemps disputé ; c'est ainsi que les quaternions enlèvent à la multiplication sa propriété d'être commutative ; c'est ainsi que dans le calcul de M. Brodie nous trouvons cette équation fondamentale étrange,

$$xy = x + y,$$

et cette assertion non moins singulière,

$$0 = 1 = 2 = \ldots = n.$$

Mais ce serait faire preuve d'un esprit bien superficiel que de trouver là des motifs suffisants pour repousser l'étude de ce calcul. Avant de se révolter contre de tels paradoxes, il faut voir si ce sont bien des paradoxes, et pour cela chercher sous les symboles leur signification concrète. Il faut, en un mot, étudier pour pouvoir comprendre.

Si nous arrivons, par l'aperçu qui précède, par cette analyse certainement insuffisante, à donner à quelques-uns de nos lecteurs le désir d'entreprendre l'étude dont nous parlons, nous aurons atteint le seul but que nous nous soyons proposé, car ce serait folie que de prétendre exposer en quelques pages une doctrine nouvelle, qui présente certainement quelques difficultés, et qui réclame un examen attentif et approfondi. A. LAISANT.

GÜNTHER (S.). — Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen. Halle, 1881. In-8°, x-440 pages, 58 fig.

Il ne s'agit pas ici d'un Ouvrage original, mais bien d'un aperçu de nos connaissances actuelles dans une branche importante des Mathématiques. C'est donc un Traité que l'on peut en toute confiance recommander à l'attention des géomètres, parce qu'il leur permettra de juger des progrès accomplis et de la variété des questions auxquelles se prête l'emploi des fonctions hyperboliques.

La grande utilité de ces fonctions comme instrument analytique paraît avoir été moins appréciée en Allemagne que dans les autres pays d'Europe. C'est ce que déclare M. Günther au début même de sa Préface. Gronau, en 1861, et Heis, en 1875, avaient pourtant cherché à les accréditer auprès de leurs compatriotes. Dans l'intervalle, deux géomètres français, dont nous retrouverons les noms dans toutes les tentatives de vulgarisation des nouvelles méthodes analytiques, M. Hoüel en 1870, et M. Laisant en 1874, publiaient des Ouvrages ou des travaux plus spécialement consacrés aux fonctions hyperboliques, dont M. Frischauf fit encore ressortir l'avantageux emploi dans certaines théories de l'Analyse, et même en Géométrie absolue, telle que la comprenait J. Bolyai.

Bien que les fonctions hyperboliques soient connues des géomètres depuis plus d'un siècle, elles ne sont pas encore entrées dans le courant de l'enseignement des écoles. Elles sont restées la spécialité de quelques géomètres, qui en ont d'ailleurs étendu les applications à un assez grand nombre de questions pour justifier la faveur avec laquelle on a fini par les accueillir. Aujourd'hui, en effet, l'Analyse et la Géométrie cherchent à profiter de toutes les ressources que peuvent leur procurer les méthodes nouvelles qui commencent à être appréciées en France et à l'étranger par tout le public mathématique : les équipollences de Bellavitis, les quaternions d'Hamilton, les fonctions hyperboliques de Riccati.

Cet heureux résultat est le fruit des efforts des deux géomètres français que nous venons de citer.

Ce que MM. Hoüel et Laisant ont essayé avec succès dans notre pays, M. Günther vient de le tenter avec non moins de réussite dans le sien, en ce qui se rapporte aux fonctions hyperboliques. C'est ce que l'on pourra juger par l'indication succincte des principaux sujets traités dans la Monographie que M. Günther vient de publier.

Le Chapitre I est consacré à l'histoire et à la bibliographie des fonctions hyperboliques. L'auteur y a, comme d'habitude, déployé toutes les ressources de son érudition. Il paraît avoir eu connaissance de tout ce qui a été écrit sur cet important sujet d'études.

Le lecteur trouvera, dans ce Chapitre, la part qui revient aux divers géomètres qui ont fondé ou développé la théorie des fonctions hyperboliques : Newton, Cotes, qui ont étudié la quadrature de l'hyperbole; Riccati, qui a jeté les bases de cette doctrine et qui a saisi le premier l'analyse des lignes trigonométriques dérivées du cercle et de l'hyperbole équilatère; Moivre, qui a complété cette analogie en lui donnant une forme si élégante et si générale, bien classique aujourd'hui; Foncenex, qui a laissé, sur les expressions imaginaires, d'intéressants travaux qui ont servi de point de départ à de nouvelles objections d'Euler et de d'Alembert dans une théorie qui avait déjà donné un sujet de controverse à Leibniz et à Jean Bernoulli; Lambert, qui approfondit les propriétés des transcendantes circulaires et logarithmiques et s'efforça de démontrer les avantages de l'emploi des lignes hyperboliques en construisant les premières Tables numériques de ces fonctions. C'est à ce propos qu'il imagina la notion nouvelle d'*angle transcendant,* qui sert à effectuer le passage des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques.

Les travaux de Lambert marquent une importante étape dans l'histoire des fonctions hyperboliques. Ils nous mènent à la fin du XVIII^e siècle. A cette époque, Lambert avait réuni en corps de doctrine les remarquables analogies des formules de Trigonométrie hyperbolique avec celles de la Trigonométrie rectiligne et il avait appliqué ces formules à la résolution de divers problèmes astronomiques dans lesquels la Trigonométrie ordinaire se trouvait en défaut.

Après Lambert, il conviendrait de citer avec quelques détails les travaux de Sauri, L'Huillier, Dirksen, Ohm et Grassmann.

Ce que l'on pourrait appeler, pour les fonctions hyperboliques, l'époque moderne est caractérisé par les travaux de Gudermann, en Allemagne, et de Lamé, en France, travaux qui ont servi à relier, pour la première fois, les fonctions hyperboliques aux fonctions elliptiques et aux coordonnées curvilignes. Les efforts des géomètres contemporains ont eu pour objet et pour résultat d'étendre le champ des applications des fonctions hyperboliques à presque toutes les branches de l'Analyse mathématique : c'est la meilleure preuve que l'on puisse donner de l'utilité de ces fonctions et des ressources qu'elles peuvent offrir dans l'étude de plusieurs questions encore délicates.

Le Chapitre II traite des fonctions circulaires et hyperboliques, déduites d'une même origine algébrique. Il a pour objet de faire ressortir la similitude d'origine des fonctions trigonométriques du cercle ou de l'hyperbole équilatère. Il forme, en réalité, un compte rendu substantiel d'un important Mémoire de M. Éd. Lucas, intitulé *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, publié dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. III et t. IV, 1877 et 1878), et dans le Journal de M. Sylvester, t. I.

M. Éd. Lucas, étudiant les propriétés des racines a et b de l'équation

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

s'est trouvé conduit à deux fonctions symétriques de ces racines,

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n,$$

qui donnent naissance, pour toutes les valeurs entières et positives de n, à trois espèces de séries, suivant la nature des racines de l'équation. Des valeurs particulières de a et de b donnent des séries récurrentes considérées pour la première fois par Fermat, Pell et Léonard Fibonacci.

Les fonctions U_n et V_n offrent une analogie complète avec les fonctions circulaires et hyperboliques. Aussi M. Günther a-t-il cru devoir leur consacrer une place toute spéciale.

Le Chapitre III renferme de nombreux extraits de l'Ouvrage de M. Laisant et constitue la partie théorique de l'ensemble : propriétés des fonctions hyperboliques; leur périodicité, leurs développements en séries, en produits indéfinis, en fonctions continues, formules d'addition, de multiplication et de division.

Le Chapitre IV est consacré aux applications des fonctions hyperboliques à des questions d'Algèbre et d'Analyse.

Voici les principales applications traitées dans ce Chapitre : Logarithmes d'addition et de soustraction. Résolution des équations quadratiques et cubiques. Intégration de fonctions ou d'équations différentielles. Nombres et fonctions de Bernoulli. Série de Lambert. Fonctions sphériques. Double périodicité des fonctions ϑ.

Le Chapitre V, de beaucoup le plus étendu de l'Ouvrage, dont il forme en effet le quart de la substance, est consacré aux applications des fonctions hyperboliques à diverses questions de Géométrie et de Physique mathématique.

Voici les titres des principales applications : Deux identités de Trigonométrie (Glaisher). Le théorème de Pythagore dans la Géométrie de la sphère (d'après Gudermann, qui rédigea ce travail le 21 septembre 1851, c'est-à-dire la veille de sa mort). Le problème du point par la méthode de Villarceau. Rectification de la parabole; centre de gravité d'un arc de cette courbe. Notion de l'anomalie dans l'ellipse et son extension au cas de l'hyperbole équilatère. Théorie de l'ellipse sphérique et de l'hyperbole sphérique (Grunert, Salmon, Heilermann). Coordonnées curvilignes et elliptiques. Surfaces isothermes (Lamé). Application à la méthode des équipollences (Bellavitis et Laisant). Détermination de l'orbite hyperbolique d'une comète. Application à la théorie des fonctions elliptiques (Gyldén).

Équations de surfaces minima en coordonnées hyperboliques. Applications numériques (Kiepert, Schwarz).

Emploi des fonctions hyperboliques dans l'étude des courbes transcendantes. Exemples : courbe dont l'arc est égal au logarithme de l'abscisse; rectification de la spirale d'Archimède; centre de gravité de la courbe logarithmique (Fischer, Hoüel, Barsotti).

Étude des cycloïdes elliptiques et hyperboliques (Laisant) : M. Günther a reproduit presque identiquement les considérations traitées par M. Laisant. C'est ainsi qu'il établit les principales propriétés de ces courbes, leur tangente, leur courbure, leur quadrature et leur rectification. Il lui emprunte aussi les paragraphes consacrés à l'étude des curieuses propriétés de la chaînette et de sa développante, la courbe tractoire ou tractrice dont les tangentes sont égales, courbe dont Perrault et Leibniz ont fait connaître un mode de génération mécanique.

M. Günther reproduit aussi, d'après MM. Laisant et Jullien, les applications aux courbes suivantes :

1° Forme d'équilibre d'un fil pesant dont la densité est en chaque point proportionnelle à la racine carrée de l'arc qui sépare ce point du point le plus bas ;

2° Courbe affectée par une corde élastique et pesante, suspendue par ses deux extrémités.

Il termine ce même paragraphe par un extrait d'un Mémoire de M. Ligowski sur la détermination de la forme et de la résistance des arcs courbes employés dans les constructions.

Le Chapitre VI contient les fondements analytiques de la Géométrie non euclidienne.

But que se propose la Géométrie non euclidienne. Développement de la règle du levier, par Foncenex. Construction statique d'une formule fondamentale.

Les surfaces à courbure constante. Si cette courbure est positive, la surface est une sphère; si elle est nulle, la surface est développable (cône, cylindre); si elle est négative, la surface est appelée *pseudosphère,* étudiée par Minding, Beltrami et plusieurs autres géomètres, depuis que l'on a reconnu le rôle important de ce type de surfaces dans les discussions auxquelles a donné lieu le *postulatum* d'Euclide.

Angles de parallèles; lignes de limite; surfaces limites. Calcul des surfaces et des volumes dans la Géométrie absolue. Variétés d'ordre supérieur.

Le Chapitre VII renferme diverses considérations sur la généralisation des sujets et problèmes mathématiques; extension de la notion des fonctions trigonométriques aux courbes que représente l'équation $x^m \pm y^m = 1$.

Généralisation des points de vue restreints du but final de la Science. Principe de la conservation des types énoncé par Hankel. Son application au cas actuel. Définitions différentes des fonctions circulaires et hyperboliques. Leur généralisation. Fonctions longimétriques considérées par Unverzagt. Fonctions trigonométriques du type cyclique et du type hyperbolique. Périodicité et théorème de l'addition.

Le Chapitre VIII traite des lignes trigonométriques obliquangles du cercle et de l'hyperbole équilatère; lignes trigonométriques rectangles de l'ellipse et de l'hyperbole quelconque.

Ces notions représentent un essai de généralisation tenté par Biehringer et Unverzagt. Elles ont pour objet de passer des coordonnées rectangles aux coordonnées obliquangles en cherchant ce que deviennent alors les lignes trigonométriques naturelles. Presque tout ce Chapitre est extrait de la Monographie de M. Laisant, pages 37 à 48 (extension de la Trigonométrie du cercle et de l'hyperbole équilatère à l'ellipse et à l'hyperbole quelconque), et pages 71 à 83 (coordonnées polaires elliptiques et hyperboliques). M. Günther lui emprunte aussi, pour terminer ce Chapitre, une application de ces coordonnées polaires à la quadrature de deux courbes planes (p. 96 et 97).

Le Chapitre IX a pour titre : *Généralisation des séries trigonométriques et des règles de transformation de la Trigonométrie.*

Exposé historique de cette extension de l'idée de fonction. Débuts de Riccati dans cette voie, continuée successivement par Olivier, Magnus, Hellwig, Buttel, Simon, Beyssell, Most, Knar. Travaux récents de MM. Appell et Glaisher.

Le Chapitre X est intitulé : *Extension des fonctions hyperboliques à l'espace; fonctions hyperboloïdiques.*

Ce Chapitre débute par l'exposé des propriétés des fonctions circulaires et hyperboliques, considérées comme solutions d'une équation différentielle du second ordre. L'auteur envisage ensuite les fonctions sphériques comme généralisation ou extension des fonctions circulaires, puis il étudie les fonctions hyperboloïdiques de première espèce et de seconde espèce, et les applique à diverses questions de la théorie de l'élasticité et de la détermination d'intégrales définies.

Ce rapide examen des Chapitres de l'Ouvrage de M. Günther aura sans doute établi dans l'esprit de nos lecteurs la conviction que cette Monographie précisera la situation actuelle des fonctions hyperboliques et l'avenir qui les attend.

M. Günther s'est inspiré principalement de deux Ouvrages antérieurs : *L'Essai sur les fonctions hyperboliques,* de M. Laisant, extrait du t. X des *Mémoires de la Société des Sciences Phy-*

siques et Naturelles de Bordeaux, 1874 (Voir *Bulletin*, t. I_2, p. 168) et les *Tavole logaritmiche* de M. Forti, extraites du t. VI des *Annali delle Università toscane* (Voir *Bulletin*, t. I, p. 265).

En adoptant le premier de ces Ouvrages, dont le titre, beaucoup trop modeste, ne fait pas pressentir la richesse et la variété des développements, M. Günther a voulu témoigner à notre savant collaborateur la profonde sympathie qu'il éprouve pour ses travaux. Un simple coup d'œil jeté sur les deux Monographies fera reconnaître au lecteur le moins attentif que l'*Essai sur les fonctions hyperboliques* a été entièrement traduit et refondu dans le texte de M. Günther. C'est le plus juste hommage que l'on puisse rendre au mérite de ce travail.

M. Günther a été sans doute moins heureux dans le choix exclusif qu'il paraît avoir fait des *Tavole* de M. Forti. Les Tables de fonctions hyperboliques doivent, autant que possible, ressembler aux Tables de lignes trigonométriques, parce que cette disposition est de nature à faciliter leur emploi dans le Calcul. C'est le principe qui a guidé les auteurs des premières Tables de fonctions hyperboliques, Lambert, Gudermann et surtout Gronau, qui a apporté à leur disposition les plus heureuses simplifications. Nous n'avons pas à revenir sur les remarques exposées par M. Hoüel, à propos des *Tavole* de M. Forti ; ces remarques subsistent encore aujourd'hui et elles prouvent que la publication de nouvelles Tables aussi étendues que celles de M. Forti (¹), mais construites dans le système de Gronau, répondrait à un légitime désir des géomètres et formerait le complément obligé à une monographie dont ces critiques de détail ne doivent pas faire oublier les grandes qualités et l'incontestable mérite. H. BROCARD.

(¹) Nous apprenons, au dernier moment, que M. Forti lui-même s'est chargé de ce travail, et qu'il se propose de publier une quatrième édition de ses *Tavole*, dans laquelle il abandonnera la disposition empruntée à son ancien maître Massotti, pour se rapprocher de la disposition de Gronau.